

膜与不可压缩有界流体接触时的自由振动*

S·泰瑞维蒂洛¹, J·米尔扎普尔¹, M·萨马达尼¹, Gh·瑞扎扎德²

(1. 乌尔米大学 工程学院 土木工程系, 乌尔米耶, 伊朗;
2. 乌尔米大学 工程学院 机械工程系, 乌尔米耶, 伊朗)

摘要: 圆形膜与流体接触时的振动被广泛应用于工业中. 推导了圆形膜在与不可压缩有界流体接触时,非对称自由振动的自振频率. 鉴于膜在不可压缩、非粘性流体中振动引起的小振幅,采用速度势函数来描述流体场. 使用两种方法来推导系统的自由振动频率. 它们包括变分法及一种近似解法——Rayleigh 商法. 在用两种方法求得的自由振动频率值之间具有良好的相关性. 最后,研究了流体的深度、质量密度以及径向张力对耦合系统自由振动频率的影响.

关键词: Rayleigh 商; 非对称自由振动; 薄膜; 变分法

中图分类号: O322;O353.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.09.006

符号说明

| | | | |
|----------------|-------------------------------|----------|--------------------------------|
| a | 有界流体的半径 | h | 有界流体的深度 |
| w | 薄膜挠度 | F | 流体压力 |
| A_{ij} | 第 i 圆周节点, 第 j 径向节点处膜的模态振幅 | B_{ij} | 第 i 圆周节点, 第 j 径向节点处流体的模态振幅 |
| J_i | i 阶第一类 Bessel 函数 | L | 耦合系统的 Lagrange 函数 |
| T | 膜单位长度的径向张力 | T_m | 膜的动能 |
| T_f | 流体的动能 | V_m | 膜的势能 |
| β_{ij} | 流体特征参数 | ρ | 膜的质量密度 |
| λ_{ij} | 膜的频率参数 | ω | 耦合系统的固有频率 |
| φ | 流体的速度势函数 | ρ_f | 流体的质量密度 |
| δ_{im} | Kronecker 符号 | | |

引 言

在交换器和传感器, 生物医学假体如人造动脉、人造器官, 空间应用如收音机天线、光学反射镜这些产业中, 与流体接触的膜被广泛用作隔膜^[1]. 流体和薄膜的相互作用影响了耦合系统的频率特性, 同时能够改变系统在动力荷载下的性能.

* 收稿日期: 2011-07-26; 修订日期: 2012-02-13

作者简介: S. Tariverdilo(联系人. Tel: +98-441-2972947; Fax: +98-441-2972901; E-mail: s. tariverdilo@urmia. ac. ir).

本文原文为英文, 张晓庆 译, 张禄坤 校.

许多学者都研究了流体-膜的相互作用问题, Chiba 等^[2]考虑了带有灵活底膜的圆柱空腔的自由水弹性振动. Pan 等^[3]在无阀微型泵内, 通过评价谐波激励时相互作用的响应效应, 来研究流体-膜的相互作用. Hsieh 等^[4]采用有限差分法和边界元法, 分析了圆柱膜接触流体时的二维振动. 他们发现在分析结果与实验结果间具有良好的相关性. Gutierrez 等^[5]采用有限元法、微分求积法和优化的 Rayleigh 商法分析了环形膜的横向振动. Crighton^[6]应用 Green 函数, 研究了集中激励荷载作用下, 带有膜的流体的响应. Molki 等^[7]完成了空气动力荷载作用下膜振动的研究. 他们为上述问题的恒压加载情况研发了一种分析方法. Ghavanloo 等^[8]研发了一种分析方法, 对流体-膜的非线性相互作用做出了解释, 同时将分析结果与数值、实验结果进行了比较.

本文研究了圆形膜在与不可压缩的有界流体接触时的自由振动. 对薄膜和流体同时应用变分原理, 说明薄膜和流体的挠度具有相容性, 进而给出了耦合系统的控制方程. 为了验证变分法的结果, 采用 Rayleigh 商法对耦合系统的频率也进行了评估. 最后评估了流体深度、密度, 以及薄膜径向张力对耦合系统自由振动响应的影响.

1 薄膜的特征函数

图 1 描述了放置在有界不可压缩、非粘性流体上的圆形薄膜. 膜与流体接触的动态平衡方程为

$$T \nabla^2 w + F = \rho \ddot{w}, \quad (1)$$

其中, T 为单位长度膜的径向边界均布张力, ρ 为薄膜质量密度, F 为流体压力, w 表示薄膜的挠度. 引入径向边界控制张力 T , 从而膜的刚度和固有频率可控. 引入小位移理论, 假设径向张力保持不变, 同时不受薄膜挠度的影响.

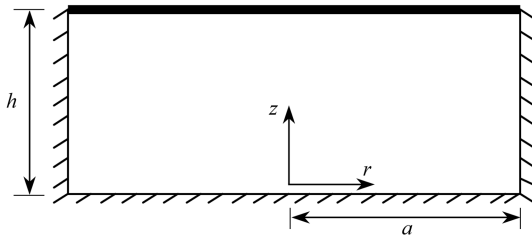


图 1 与流体接触的圆形膜

Fig. 1 Circular membrane in contact with fluid

接触薄膜的流体由可压缩逐渐变为不可压缩 (相当于就是流体中的声速逐渐增大), 本文对于这种情况膜的非对称模式提出了一个渐近解. 这里的不可压缩流体指的是流体不可能有体积变化. 假设流体和膜的挠曲具有相容性, 对称模式下, 膜的任何部位的任意挠曲都需要流体的体积发生变化, 这便否定了关于不可压缩流体的假定. 因此, 轴对称模式对总体响应没有任何贡献. 就非对称模式而言, 圆形薄膜在空气中 (干燥膜) 的自由振动模态可以写为^[9]

$$w_{ij} = J_i \left(\frac{\lambda_{ij} r}{a} \right) \cos(i\theta), \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

其中, J_i 为 i 阶第一类 Bessel 函数, j 为径向节点数, i 为圆周节点数, λ_{ij} 为频率参数. 求解下面的特征方程可以得到频率参数:

$$J_i(\lambda_{ij}) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots. \quad (3)$$

此时膜的位移可以写为

$$w(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} J_i \left(\frac{\lambda_{ij} r}{a} \right) \cos(i\theta) A_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(r) \cos(i\theta) A_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{w}_k(r, \theta) A_k(t), \quad (4)$$

其中, A_k 为圆周节点 i 、径向节点 j 处的模态振幅. 换句话说, 就是假定 k 与 (i, j) 是一一对应的关系.

2 流体的速度势函数

假设一个不可压缩、非粘性的流体, 膜振动引起的流体运动可以用速度势函数来描述. 速度势函数满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (5)$$

以及下面的边界条件

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=k} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (6)$$

加上方程(6)的第1个和第2个边界条件, 速度势函数的解变为

$$\varphi(r, z, \theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}(t) J_i(\beta_{ij} r/a) \cos(i\theta) \cosh(\beta_{ij} z/a) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(r) \cos(i\theta) \cosh\left(\frac{\beta_k z}{a}\right) B_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\varphi}_k(r, z, \theta) B_k(t), \quad (7)$$

这里, 与用于膜挠曲的符号相似, B_k 为圆周节点 i 、径向节点 j 处的模态幅值. 加上第1个边界条件, 导出 β_{ij} 的值为

$$J'_i(\beta_{ij}) = 0. \quad (8)$$

3 变分推导

对薄膜和流体同时采用变分原理, 有可能推导出耦合系统的控制方程. 同时对膜和流体应用变分原理, 简化处理了二者之间挠曲的相容性. 假定薄膜和流体始终是接触的, 则薄膜和流体的 Lagrange 函数变为^[9-10]

$$L = \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{T}{2} |\nabla w|^2 \right] r d\theta dr + \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho_f \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \varphi + \frac{\partial w}{\partial t} \varphi - \frac{g}{2} w^2 \right] r d\theta dr, \quad (9)$$

其中, ρ_f 为流体的质量密度, 第1项和第2项分别为薄膜和流体的 Lagrange 函数项. 按照干燥膜的模态分解其挠曲, 同时以方程(7)作为流体的速度势, 则耦合系统的 Lagrange 函数变为

$$\int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\frac{\rho}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k \bar{w}_k \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \dot{A}_l \bar{w}_l \right) - \frac{T}{2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \bar{w}_{k,r} + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \bar{w}_{k,\theta} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} A_l \bar{w}_{l,r} + \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} A_l \bar{w}_{l,\theta} \right) \right] \right] r d\theta dr + \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho_f \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k \bar{\varphi}_{k,z} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} B_l \bar{\varphi}_l \right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k \bar{w}_k \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} B_l \bar{\varphi}_l \right) - \frac{g}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \bar{w}_k \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} A_l \bar{w}_l \right) \right] r d\theta dr. \quad (10)$$

将任意时间间隔上 Lagrange 积分的变分设为 0, 得到

$$\begin{aligned}
 & - \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\rho \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \ddot{A}_k \bar{w}_k \bar{w}_l + \right. \\
 & \quad T \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_k \left(\bar{w}_{k,r} \bar{w}_{l,r} + \frac{1}{r} \bar{w}_{k,r} \bar{w}_{l,\theta} + \frac{1}{r} \bar{w}_{k,\theta} \bar{w}_{l,r} + \frac{1}{r^2} \bar{w}_{k,\theta} \bar{w}_{l,\theta} \right) + \\
 & \quad \left. \rho_f \left(g \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_k \bar{w}_k \bar{w}_l + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \dot{B}_k \bar{\varphi}_k \bar{w}_l \right) \right] \delta A_l r d\theta dr + \\
 & \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho_f \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} B_k \bar{\varphi}_{k,z} \bar{\varphi}_l - \right. \\
 & \quad \left. \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} B_k \bar{\varphi}_{l,z} \bar{\varphi}_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \dot{A}_k \bar{w}_k \bar{\varphi}_l \right) \delta B_l r d\theta dr = 0, \tag{11}
 \end{aligned}$$

等价于

$$(\mathbf{d} + \mathbf{e})\mathbf{A} + \mathbf{f}\dot{\mathbf{A}} + \rho_f \mathbf{r}'\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{0}, \tag{12a}$$

$$-\mathbf{sB} + \mathbf{r}\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}, \tag{12b}$$

其中

$$\begin{cases}
 d_{kl} = T \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\bar{w}_{k,r} \bar{w}_{l,r} + \frac{1}{r^2} \bar{w}_{k,\theta} \bar{w}_{l,\theta} + \frac{1}{r} (\bar{w}_{k,r} \bar{w}_{l,\theta} + \bar{w}_{k,\theta} \bar{w}_{l,r}) \right) r d\theta dr, \\
 e_{kl} = \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho_f g \bar{w}_k \bar{w}_l r d\theta dr, \\
 f_{kl} = \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho_f \bar{w}_k \bar{w}_l r d\theta dr, \\
 r_{kl} = \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \bar{w}_l \bar{\varphi}_k r d\theta dr, \\
 s_{kl} = \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2} (\bar{\varphi}_k \bar{\varphi}_{l,z} + \bar{\varphi}_l \bar{\varphi}_{k,z}) r d\theta dr.
 \end{cases} \tag{13}$$

消去方程 (12a) 中的 \mathbf{B} , 得到

$$(\mathbf{d} + \mathbf{e})\mathbf{A} + (\mathbf{f} + \mathbf{g})\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}, \tag{14}$$

其中

$$\mathbf{g} = \rho_f \mathbf{r}' \mathbf{s}^{-1} \mathbf{r}. \tag{15}$$

考虑谐波自由振动响应, 得到

$$(\mathbf{d} + \mathbf{e})\mathbf{A} = \omega^2 (\mathbf{f} + \mathbf{g})\mathbf{A}. \tag{16}$$

在上述方程中, 矩阵 \mathbf{e} 和 \mathbf{g} 分别表示由流体-膜相互作用引起的刚度增加和质量增加. 通过求解这些广义特征值问题, 得到了耦合系统的固有频率和模态. 由于膜的模态正交性, 矩阵 \mathbf{d} 和 \mathbf{f} 为对角线矩阵, 矩阵 \mathbf{e} 和 \mathbf{g} 含有非对角线元素. 这些非对角线元素的存在表明湿膜的模态不同于干膜. 另一方面, 若忽略这些非对角线元素便意味着对湿膜和干膜采用了相同的模态. 实验结果^[11-13]、理论值^[14]以及后面部分(仿真结果的部分)的数值结果证明使用这种假定是合理的.

4 Rayleigh 商法

采用 Rayleigh 商法, 作为计算干膜和湿膜固有频率的第 2 种方法. 假设膜与流体不分离, 采用方程 (6) 的第 3 个边界条件, 从而来描述流体和膜间的速度相容性, 结论如下:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}(t) \frac{\beta_{mn}}{a} J_m\left(\frac{\beta_{mn}r}{a}\right) \sinh\left(\frac{\beta_{mn}h}{a}\right) \cos(m\theta) = \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_{mn}(t) J_m\left(\frac{\lambda_{mn}r}{a}\right) \cos(m\theta), \end{aligned} \quad (17)$$

两边同时乘以 $rJ_i(\beta_{ij}r/a) \cos(i\theta)$, 沿着湿膜表面积分, 得到

$$B_k = B_{ij} = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_{im} \alpha_k c_{kl} \dot{A}_l, \quad (18)$$

其中, k, l 分别相当于 $(i, j), (m, n)$, δ_{im} 为 Kronecker 符号, 当 $i = m$ 时为 1, $i \neq m$ 时为 0. 由方程 (18) 得到

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{a}{\beta_{ij} \sinh(\beta_{ij}h/a) \int_0^a r J_i^2(\beta_{ij}r/a) dr}, \\ c_{kl} = \int_0^a r J_i\left(\frac{\beta_{ij}r}{a}\right) J_m\left(\frac{\lambda_{mn}r}{a}\right) dr, \end{cases} \quad (19)$$

注意 $J_i(\beta_{ij}r/a)$ 与 $J_m(\lambda_{mn}r/a)$ 是不正交的, 该方程显示出了不同模态间的耦合. 考虑这种耦合作用, 并且将 B_k 代入方程 (7), 得到

$$\varphi(r, \theta, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_{im} \alpha_k c_{kl} \varphi_k \cos(i\theta) \cosh\left(\frac{\beta_k z}{a}\right) \dot{A}_l(t). \quad (20)$$

不考虑模态间的相互作用, 等同于在变分公式化过程中, 忽略矩阵 \mathbf{e} 和 \mathbf{g} 的非对角线元素, 可以将势函数简化为

$$\varphi(r, \theta, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k c_{kk} \varphi_k \cos(i\theta) \cosh\left(\frac{\beta_k z}{a}\right) \dot{A}_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\varphi}_k \dot{A}_k(t). \quad (21)$$

仅采用 Rayleigh 商法以及流体的简化动能计算膜的湿润面^[15-16], 得到与 k 阶模态相应的固有频率为

$$\omega_k^2 = \frac{V_{m,k}}{T_{m,k} + T_{f,k}}, \quad (22)$$

其中, $V_{m,k}$ 为膜的应变能, $T_{m,k}$ 为膜的动能, $T_{f,k}$ 为不可压缩流体的简化动能. 注意在上述公式中, 忽略了流体对耦合系统势能的贡献. 因为在下节显示, 流体势能对自振频率的影响是微不足道的. 沿着膜的湿润表面积分, 流体的动能简化为

$$T_{f,k} = \frac{\rho_f}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial z} \Big|_{z=h} \bar{\varphi}_k \Big|_{z=h} r dr d\theta. \quad (23)$$

考虑到在接触面处, 流体和膜的速度相容性 (方程 (6c)), 有

$$T_{f,k} = \frac{\rho_f}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \bar{w}_k \bar{\varphi}_k \Big|_{z=h} r dr d\theta; \quad (24)$$

膜的动能为

$$T_{m,k} = \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \bar{w}_k^2 r dr d\theta; \quad (25)$$

最终, 膜的应变能为

$$V_{m,k} = \frac{T}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a |\nabla \bar{w}_k|^2 r dr d\theta. \quad (26)$$

利用方程式 (24) 至 (26), 采用 Rayleigh 商法可以求出 k 阶模态的固有频率. 这种方法采用了

方程(21)中势函数的简化形式,忽略了不同模态间耦合作用的影响。

5 仿真结果

本节首先比较了变分法与 Rayleigh 商法的结果,然后研究了流体深度、密度以及膜的径向张力对不同模态频率的影响。假定膜为铝制的,直径为 60 mm,厚度为 0.5 mm,质量密度为 $2\,700\text{ kg/m}^3$ 。

表 1 用变分法(考虑非对角线元素的影响)计算得到的流体势能(流体刚度),评价了对湿膜自振频率的影响。计算时,流体深度取为 60 mm,密度为 $1\,000\text{ kg/m}^3$,膜直径为 60 mm,径向张力为 100 N/m 。结果包含了径向和周向节点数从 1 增加到 4 的各种模态。可以看到流体刚度对自由振动频率的影响是可以忽略不计的。这表明,在 Rayleigh 商法中忽略流体势能的假定是可以接受的。

表 1 当径向和周向的节点数从 1 增加到 4 时,采用变分法评价流体刚度对湿膜自由振动频率的影响

Table 1 Effect of fluid stiffness on the free vibration frequency of the wet membrane evaluated using the variational formulation for diametrical and circular nodes of 1 to 4

| mode number N | circular node, diametrical node i, j | wet membrane | | discrepancy $\delta / \%$ |
|--------------------|--|--------------------------------|--------------------------|------------------------------|
| | | accounting for fluid stiffness | ignoring fluid stiffness | |
| 1 | 1,1 | 19.374 7 | 19.150 2 | 1.16 |
| 2 | 1,2 | 53.093 2 | 52.895 4 | 0.37 |
| 3 | 1,3 | 94.765 5 | 94.598 4 | 0.18 |
| 4 | 1,4 | 159.066 7 | 158.905 9 | 0.10 |
| 5 | 2,1 | 32.945 1 | 32.729 7 | 0.65 |
| 6 | 2,2 | 70.977 2 | 70.797 1 | 0.25 |
| 7 | 2,3 | 115.835 7 | 115.681 0 | 0.16 |
| 8 | 2,4 | 186.061 9 | 185.910 4 | 0.08 |
| 9 | 3,1 | 46.868 1 | 46.668 3 | 0.43 |
| 10 | 3,2 | 89.077 3 | 88.910 5 | 0.19 |
| 11 | 3,3 | 136.932 4 | 136.787 6 | 0.11 |
| 12 | 3,4 | 212.898 2 | 212.754 6 | 0.07 |
| 13 | 4,1 | 61.413 8 | 61.227 9 | 0.30 |
| 14 | 4,2 | 107.484 4 | 107.328 3 | 0.15 |
| 15 | 4,3 | 158.130 5 | 157.994 0 | 0.09 |
| 16 | 4,4 | 239.670 0 | 239.533 1 | 0.06 |

表 2 比较了采用 Rayleigh 商法和变分法得到的膜的固有频率,其中忽略了流体刚度的影响。从表中可以明显地看出,对于干膜来说,两种方法得到的结果没有差异。这是因为对于干膜而言,模态振幅之间没有耦合作用,从而导致两种方法的结果一样。对于湿膜,模态振幅之间具有耦合作用,这意味着湿膜的固有振型与干膜的不同。这刚好证明了方程(16)中用非对角线元素表示增加的质量矩阵和刚度矩阵。然而,在计算频率时,忽略非对角线元素(Rayleigh 商法)和考虑这些元素(变分法)得到的结果差别相当小。这表明干膜和湿膜振型间的差异是可以忽略的。

图 2 和图 3 描述了模态的自由振动频率随着周向、径向节点数的变化而变化。可以看出,径向或者周向的节点数增加,与之对应的频率也增加。与预期的一样,同干膜相比,流体-膜间的相互作用充分减小了湿膜的自由振动频率。通过对干膜和湿膜自由振动频率变化的比较,显

示出在周向和径向节点数较少的情况下,流体-膜间的相互作用使得各个模态的自由振动频率产生了较大的改变。

表2 采用 Rayleigh 商法(忽略非对角线元素)和变分法(考虑非对角线元素),得到的自由振动频率(Hz)的比较

Table 2 Comparison of the free vibration frequency (Hz) evaluated using the Rayleigh quotient and the variational formulation accounting and ignoring off-diagonal terms

| mode number N | circular node, diametrical node i, j | Rayleigh quotient method | | variational method | |
|--------------------|--|--------------------------|--------------|--------------------|---|
| | | dry membrane | wet membrane | dry membrane | wet membrane accounting for off-diagonal terms |
| 1 | 1,1 | 87.476 9 | 19.377 6 | 87.471 3 | 19.150 2 |
| 2 | 1,2 | 160.164 7 | 49.986 6 | 160.146 6 | 52.895 4 |
| 3 | 1,3 | 232.258 9 | 88.666 8 | 232.220 8 | 94.598 4 |
| 4 | 1,4 | 304.177 3 | 149.848 5 | 304.110 8 | 158.905 0 |
| 5 | 2,1 | 117.244 7 | 33.004 2 | 117.244 7 | 32.729 7 |
| 6 | 2,2 | 192.162 9 | 69.228 7 | 192.162 7 | 70.797 1 |
| 7 | 2,3 | 265.277 6 | 112.103 7 | 265.277 8 | 115.681 0 |
| 8 | 2,4 | 337.789 6 | 181.310 1 | 337.792 0 | 185.910 0 |
| 9 | 3,1 | 145.658 7 | 46.970 0 | 145.660 1 | 46.668 3 |
| 10 | 3,2 | 222.841 6 | 87.805 9 | 222.842 0 | 88.910 5 |
| 11 | 3,3 | 297.134 3 | 134.164 7 | 297.135 6 | 136.787 6 |
| 12 | 3,4 | 370.379 2 | 209.972 2 | 370.381 5 | 212.754 6 |
| 13 | 4,1 | 173.239 3 | 61.543 4 | 173.239 1 | 61.227 9 |
| 14 | 4,2 | 252.604 8 | 106.466 7 | 252.605 7 | 107.328 3 |
| 15 | 4,3 | 328.121 2 | 155.951 7 | 328.121 8 | 157.994 0 |
| 16 | 4,4 | 402.169 7 | 237.724 7 | 402.172 1 | 239.533 1 |

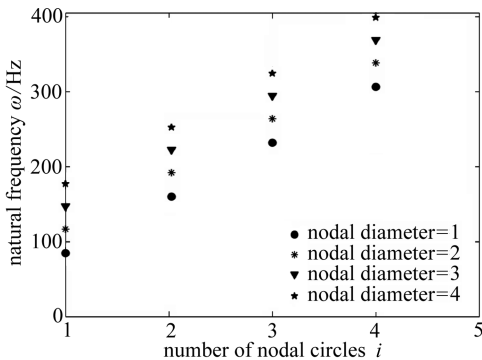


图2 干膜状态下,自由振动频率随着径向和周向节点数的变化

Fig. 2 Evolution of free vibration frequency with number of nodal diameters and circles in dry membrane

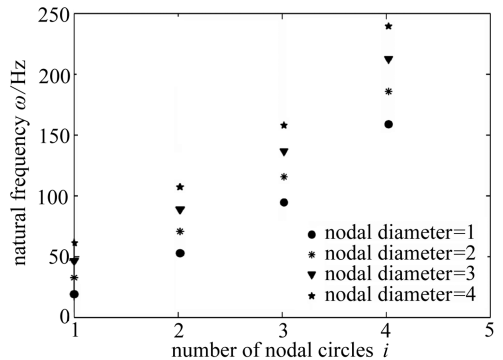
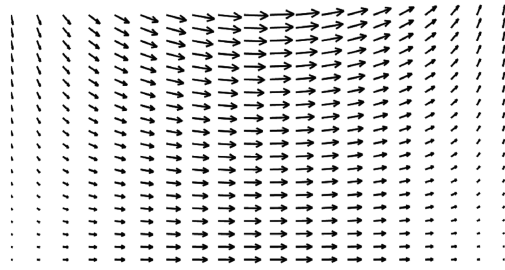


图3 湿膜状态下,自由振动频率随着径向和周向节点数的变化

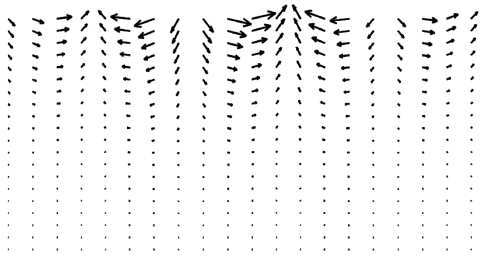
Fig. 3 Evolution of free vibration frequency with number of nodal diameters and circles in wet membrane

由于考虑了与不同模态相对应的流速场,高阶振型的振动频率变化较小.图4显示了不同周向的节点数和径向节点数的流体速度矢量.从该图推断出,膜振动几乎影响整个流域的一阶模态.但这不是模态随着周向和径向节点数增加而变化的情况.对于高阶振型,容器下部越来越

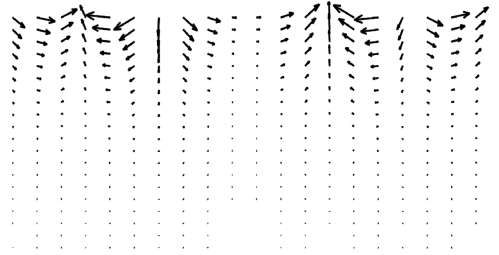
越大部分流体,不受膜振动的影响,这导致了高阶振型质量增加较少,从而与之对应的频率变化较小。



(a) $m = 1, n = 1$



(b) $m = 1, n = 3$

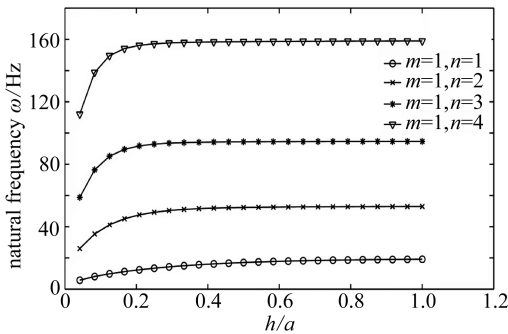


(c) $m = 3, n = 1$

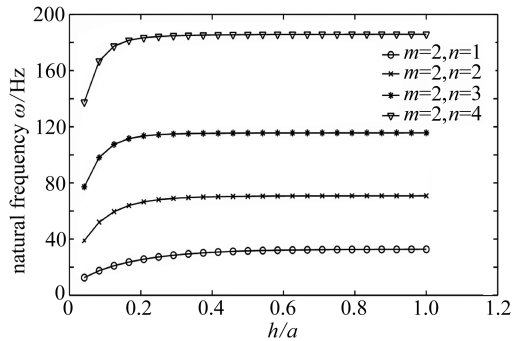
图4 不同模式的流体速度矢量图

Fig.4 Plot of fluid velocity vector for different modes

图5描述了不同振型的自由振动频率随着流体深度的变化.即使深度较小,粘性仍然对流体流动有主要的影响,因此势函数模型不再适用,为了推导出自由振动频率随流体深度的变化,对2.5~60 mm的流体深度进行了分析.该图显示出对于每一种频率,都有一个临界流体深度,超过该临界深度后,湿膜的频率不再随着流体深度的进一步增加而发生变化.频率较大时,临界深度较小. h/a 在0.3~1的范围内时,不同模式的频率基本上保持不变,并且不依赖于流体深度.这意味着当流体深度处于正常范围时,湿膜的自由振动频率对流体深度的变化不敏感。



(a) $m = 1$



(b) $m = 2$

图5 不同模式的自由振动频率随着流体深度的变化

Fig.5 Evolution of free vibration frequency of different modes with fluid depth

定义流体深度大于自由振动频率保持不变的深度为有效深度,图6表示了不同模式有效深度的变化.表2给出了每种模式的周向和径向节点数.有趣的是随着模式阶数的增加,有效

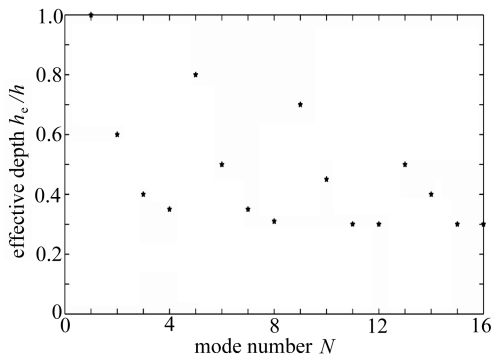


图6 有效深度随着模式阶数的变化

Fig. 6 Evolution of effective depth with mode number

深度在减小. 这再次解释了应考虑每个模式的流速场(图4). 对于高阶模式, 容器中较低部分流体的贡献稳定地减小, 这刚好反映了这些模式的有效深度较小. 当一阶模式的有效深度为 h 时, 最小的有效深度大约为 $0.3h$.

图7描述了流体质量密度在 $0 \sim 2000 \text{ kg/m}^3$ 范围内变化时, 湿膜自由振动频率的变化. 与有效深度相似, 可以对每阶模式定义一个有效流体质量密度, 即: 大于该密度时频率保持不变. 不同模式的有效质量密度图见图8, 图中揭示出对于这些模式, 圆周节点数增加, 有效质量密度也增加, 然而径向节点数的增加对有效质量密度没有影响.

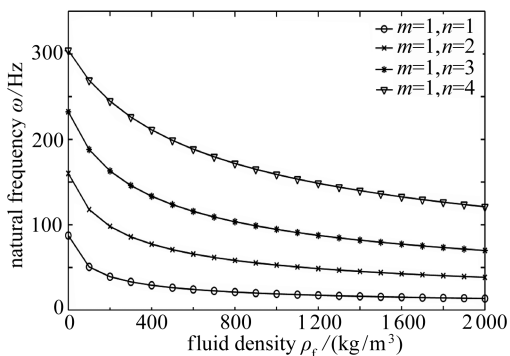


图7 不同模式的自由振动频率随着流体密度的变化

Fig. 7 Evolution of free vibration frequency of different modes with fluid density

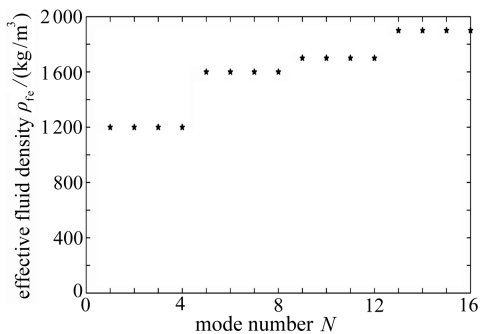


图8 有效密度随着模式阶数的变化

Fig. 8 Evolution of effective density with mode number

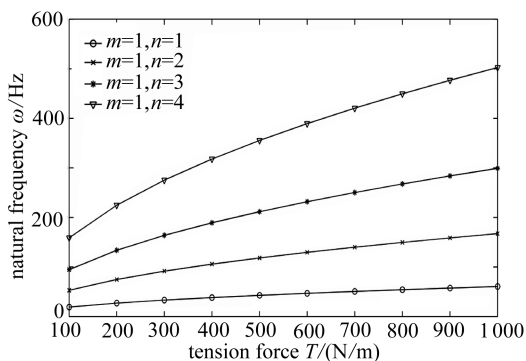


图9 不同模式的自由振动频率随着径向张力的变化

Fig. 9 Evolution of free vibration frequency of different modes with tension force

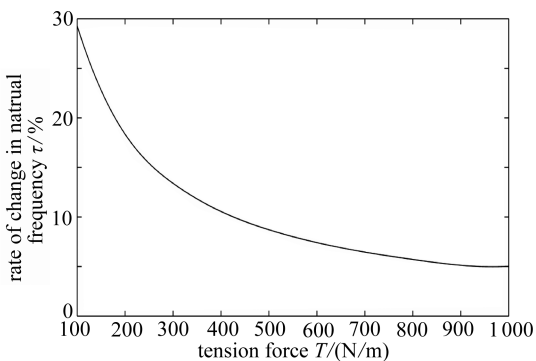


图10 当薄膜径向张力增大时, 与径向节点和圆周节点之一对应的模式的自由振动频率变化率

Fig. 10 The rate of change in the free vibration frequency of mode corresponding to diametrical and circular nodes of one for increase in the membrane radial tension force

图9表示了当膜轴向力变化时,自振频率的变化.正如预期的,由于径向张力的增大,自由振动频率也增大;然而对于较大的径向张力,变化率降低.有趣的是,当径向张力增大时,所有模态的振动频率具有相同的变化率.图10显示了当径向张力增加时,一阶模态振动频率的变化率.

6 结 论

推导了圆形膜在与不可压缩有界流体接触时,流体-膜间的相互作用对自由振动频率的影响.由于流体的不可压缩性质,湿膜的自由振动模态应该是不对称的.采用两种方法推导耦合系统的自由振动频率.第一种方法对膜和流体同时采用了变分原理,第二种方法为 Rayleigh 商法.发现两种公式的结果间具有强烈的相关性.最后,推导了随着流体深度、质量密度以及膜的轴向力的变化,湿膜自由振动频率的变化.

参考文献(References):

- [1] Jenkins C H M, Kordeb U A. Membrane vibration experiments: a historical review and recent results[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, **295**(3): 602-613.
- [2] Chiba M, Watanabe H, Bauer H F. Hydroelastic coupled vibrations in a cylindrical container with a membrane bottom, containing liquid with surface tension[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, **251**(4): 717-740.
- [3] Pan L S, Ng T Y, Liu G R, Lam K Y, Jiang T Y. Analytical solutions for the dynamic analysis of a valveless micropump—a fluid-membrane coupling study[J]. *Journal of Sensors and Actuators A: Physical*, 2001, **93**(2): 173-181.
- [4] Hsieh J -C, Plaut R H, Yucel O. Vibrations of an inextensible cylindrical membrane inflated with liquid[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1989, **3**(2): 151-163.
- [5] Gutierrez R H, Laura P A A, Bambill D V, Jederlinic V A, Hodges D H. Axisymmetric vibrations of solid circular and annular membranes with continuously varying density[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **212**(4): 611-622.
- [6] Crighton D G. The Green function of an infinite, fluid loaded membrane[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1983, **86**(3): 411-433.
- [7] Molki M, Breuer K. Oscillatory motions of a prestrained compliant membrane caused by fluid-membrane interaction[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2010, **26**(3), 339-358.
- [8] Ghavanloo E, Daneshmand F. Analytical analysis of the static interaction of fluid and cylindrical membrane structures[J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2010, **29**(4): 600-610.
- [9] Meirovitch L. *Principles and Techniques of Vibrations*[M]. Prentice-Hall International, 1997: 439-443.
- [10] Isshiki H, Nagata S. Variational principles related to motions of an elastic plate floating on a water surface[C]//*Proceedings of the Eleventh International Offshore and Polar Engineering Conference*, Stavanger, Norway, 2001, **1**: 190-197.
- [11] Kwak M K, Amabili M. Hydroelastic vibration of free-edge annular plates[J]. *ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 1999, **121**(1): 26-32.
- [12] Espinosa F M, Gallego-Juarez A G. On the resonance frequencies of water-loaded circular plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1984, **94**(2): 217-222.
- [13] Nagia K, Takeuchi J. Vibration of a plate with arbitrary shape in contact with a fluid[J].

- Journal of the Acoustical Society of America*, 1984, **75**(3): 1511-1518.
- [14] Amabili M, Kwak M K. Free vibration of circular plates coupled with liquids; revising the Lamb problem[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1996, **10**(7): 743-761.
- [15] Amabili M. Eigenvalue problems for vibrating structures coupled with quiescent fluids with free surface[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **231**(1): 79-97.
- [16] Amabili M. Ritz method and substructuring in the study of vibration with strong fluid-structure interaction[J]. *Journal of Fluid and Structures*, 1997, **11**(5): 507-523.

Free Vibration of Membrane/Bounded Incompressible Fluid

S. Tariverdilo¹, J. Mirzapour¹, M. Shahmardani¹, Gh. Rezazadeh²

(1. *Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Urmia University, Urmia, Iran;*

2. *Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Urmia University, Urmia, Iran*)

Abstract: Vibration of circular membrane in contact with fluid had extensive applications in the industry. The natural vibration frequencies for asymmetric free vibration of circular membrane in contact with incompressible bounded fluid were derived. Considering small oscillations induced by the membrane vibration in incompressible and inviscid fluid, velocity potential function was used to describe the fluid field. Two approaches were used to derive the free vibration frequencies of the system. These included a variational formulation and an approximate solution employing the Rayleigh quotient method. Good correlation was found between free vibration frequencies evaluated using the two methods. Finally, the effects of the fluid depth and mass density, and radial tension on the free vibration frequencies of the coupled system were investigated.

Key words: Rayleigh quotient; asymmetric free vibration; membrane; variational formulation