

基于最小参数区间集的不确定结构响应分析*

王晓军, 王磊, 邱志平

(北京航空航天大学 固体力学研究所, 北京 100083)

摘要: 考虑到实际工程问题中普遍存在不确定性,完成了针对工程结构从定量化到传播的完整不确定性分析过程.通过建立包含全部有限样本点的最小区间/超立方体域来描述不确定参数的变化范围;借助于最小区间参数集,开展了不确定结构传播分析的研究工作以确定其最有利/不利响应.此外,进一步就给出的区间分析方法同经典概率方法的相容性进行了分析和探究.采用2个数值算例很好地论证了所述方法的正确性和可行性.

关键词: 定量化分析; 最小区间集/超立方体; 不确定结构响应; 最有利响应; 最不利响应

中图分类号: O327 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.09.005

引 言

不确定性广泛存在于结构物理、几何特性或外载荷之中^[1-2].目前,比较流行的处理不确定性的方法有3种^[3]:概率分析方法、模糊分析方法和集合理论凸方法.概率统计方法一直以来被众多学者应用于结构的安全性评估,其中材料属性和载荷往往被视作随机变量.相较于概率理论,基于模糊数学的方法近些年来也逐渐发展起来,可以有效地解决认知不确定性问题^[4-5].

以上2种方法,在处理不确定性问题时,通常需要大量的数据信息以确定概率密度函数或隶属度函数.然而,工程实际中相应的试验数据是非常有限的,这就大大制约了上述方法在处理实际贫信息问题时的可行性和有效性^[2,6].

鉴于此,基于非概率的区间集合理论凸方法,作为传统方法的补充开始引起越来越多的关注.该方法的优势在于不需要像概率或模糊方法那样探究不确定性的内涵,而只需要确定其变化的界限.近年来,涌现出大量涉及不确定但有界方法的研究成果^[7-11].可是基于不确定性的可靠性分析及优化设计,尤其是考虑参数不确定性源的研究目前并不多见.

迄今为止,流行且比较成熟的经典区间分析方法,所采用的关于不确定参数的区间集是包围所有有限试验数据且与原始坐标系相平行的超长方体^[12-14].然而,这种区间集未必是包围所有试验数据的最小区间集合,它与原始坐标系不一定是平行的.本文以包围所有有限试验数

* 收稿日期: 2011-04-29; 修订日期: 2012-04-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11002013);国防基础科研计划基金资助项目(A2120110001;B2120110011);高等学校学科创新引智计划基金资助项目(B07009)

作者简介: 王晓军(1978—),男,陕西岐山人,副教授,博士,博士生导师(联系人. E-mail: xjwang@buaa.edu.cn).

据的区间集的体积为目标函数,提出了一种确定最优(体积最小)参数区间集的方法,并基于得到的最小参数区间集给出了一种新的估计不确定结构最有利响应和最不利响应的区间分析方法.

当然,本文的目的并不是过分地强调区间分析方法的优越性,而是提出了一种可选择的求解不确定性问题的新思路.并且考虑到现有文献中结构分析的参数不确定性通常是人为赋予的,而非来自真实的试验数据.因此,本文的研究将在一定程度上弥补相关领域的空白,完成由不确定性的定量化到响应传播的完整不确定性问题分析过程,为工程应用提供必要的参考.

1 问题描述

1.1 基于试验数据的最小体积参数集

假设现有描述结构特性或外载荷的 m 个不确定参数 $a_i (i=1,2,\dots,m)$, 它们构成了一个 m 维参数空间, 即 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$. 当关于这些参数仅有 M 组有限试验数据时, 可将它们描述为这个 m 维参数空间中的 M 个点 $\mathbf{a}^{(r)} (r=1,2,\dots,M)$. 下面推导一种包围这些试验数据点的最小区间集的方法.

利用坐标变换矩阵 $\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta})$ (其中 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_i), i=1,2,\dots,m-1$ 为坐标轴旋转角)

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m), \quad (1)$$

式中

$$\mathbf{u}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{k-2} \\ \tilde{\mathbf{u}}_k \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

其中, $\mathbf{0}_{k-2}$ 为一个由 $k-2$ 个 0 分量组成的列向量, $\tilde{\mathbf{u}}_k$ 为一个 $m-k+2$ 维列向量

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \begin{pmatrix} -\sin \theta_{k-1} \\ \cos \theta_{k-1} \cos \theta_k \\ \vdots \\ \cos \theta_{k-1} \sin \theta_k \cdots \sin \theta_{m-2} \cos \theta_{m-1} \\ \cos \theta_{k-1} \sin \theta_k \cdots \sin \theta_{m-2} \sin \theta_{m-1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

这 M 个点在变换后坐标系中可表示为 $\mathbf{b}^{(r)} (r=1,2,\dots,M)$. 为得到包围这些点的最小区间集(或超立方体), 首先可确定与变换后坐标轴平行且包含这 M 个点的域为

$$|\mathbf{b} - \mathbf{b}_0| \leq \mathbf{d}, \quad (4)$$

其中, 半轴向量 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_m)^T$ 和中心点 $\mathbf{b}_0 = (b_{10}, b_{20}, \dots, b_{m0})^T$ 可由下式确定:

$$\begin{cases} d_k = \frac{1}{2} \left(\max_r (b_k^{(r)}) - \min_r (b_k^{(r)}) \right) \\ b_{k0} = \frac{1}{2} \left(\max_r (b_k^{(r)}) + \min_r (b_k^{(r)}) \right) \end{cases} \quad (r=1,2,\dots,M; k=1,2,\dots,m). \quad (5)$$

式(4)所表示的超立方体的体积为

$$V_I = \prod_{k=1}^m (2d_k)^m. \quad (6)$$

这样体积 V_I 将成为参数 $\theta_k (k=1,2,\dots,m-1)$ 的函数. 因此, 包围这 M 个试验数据点的最优超立方体就应该为其中体积最小的一个, 即

$$V_I = \min_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-1}} \{ V_I(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-1}) \}. \quad (7)$$

1.2 优化算法分析

一种可能的确定这个最小超立方体的方法是从 0 到 $\pi/2$ 以很小的增量 $\Delta\theta_k$ 增加 θ_k ($k=1, 2, \dots, m-1$), 比较得到的超立方体, 从中便可以找到了在某个旋转坐标系下体积最小的(比方说, 最优旋转角为 $\theta^* = (\theta_k^*)$, $k=1, 2, \dots, m-1$), 此时的区间集的边不一定与原始坐标系平行. 上述过程详见图 1.

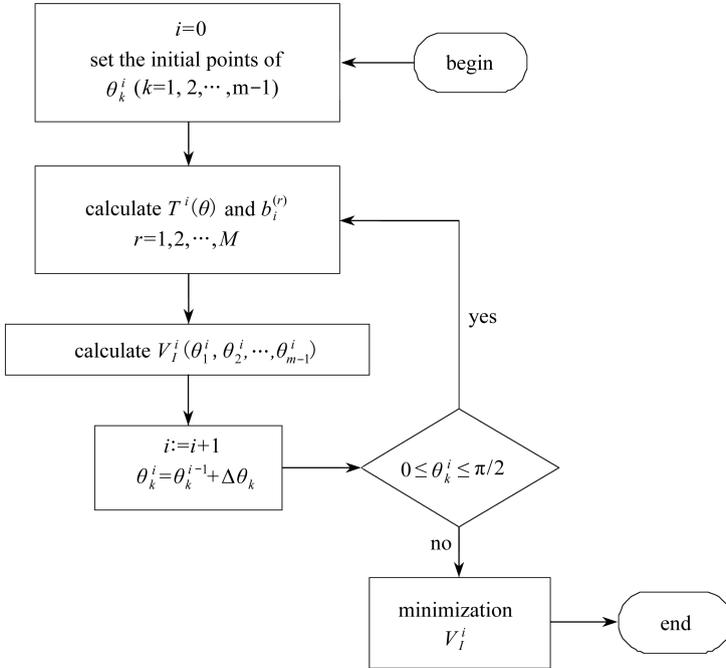


图 1 最小体积方法寻优流程图

Fig. 1 The flow chart of optimization for minimizing volume

为了兼顾优化设计的精度和效率, 本文将采用智能优化算法粒子群算法 (PSO) 来完成下面的优化求解过程.

PSO 算法是一种智能全局寻优求解技术. 每一个粒子代表一个潜在的优化解, 并且其位置代表某种方向向量. 最初种群将被随机地赋予初始位置和初始速度, 它们将沿着之前的最优位置加速更新, 而全局最优点的确定将依靠下面两个公式:

$$v_i^{(k)} = w^* v_i^{(k-1)} + c_1^* \text{ran } d_1^* (\text{pbess } t_i - x_i^{(k-1)}) + c_2^* \text{ran } d_2^* (\text{gbess } t_i - x_i^{(k-1)}), \quad (8)$$

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + v_i^{(k)}, \quad (9)$$

式中, i 代表第 i 个粒子, k 代表第 k 次迭代过程, v_i 表示第 i 个粒子的更新速度, x_i 是第 i 个粒子的当前位置. c_1^* 和 c_2^* 表示加速常数, $\text{ran } d_1^*$ 和 $\text{ran } d_2^*$ 是在 $[0, 1]$ 区间内满足均匀分布的随机数. w^* 代表权重系数, $\text{pbess } t_i$ 和 $\text{gbess } t_i$ 分别表示基于个体和总体的最优位置.

上述迭代过程的完成取决于最小误差或迭代步数的预设值, 这也就决定了计算结果的精度(详见图 3).

如上所述, 显然基于最优体积得到的超立方体边界并不总是与坐标轴平行. 以 $m=2$ 情况为例, 图 2 显示了由某组试验数据点(图中“ \circ ”)确定的最小区间集(虚线)和经典区间集(实线)的比较.

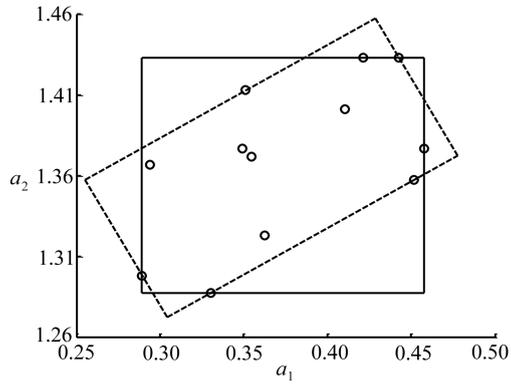


图 2 包围试验数据点的最小区间集和经典区间集

Fig. 2 The smallest interval set and the classical interval set determined by experimental data

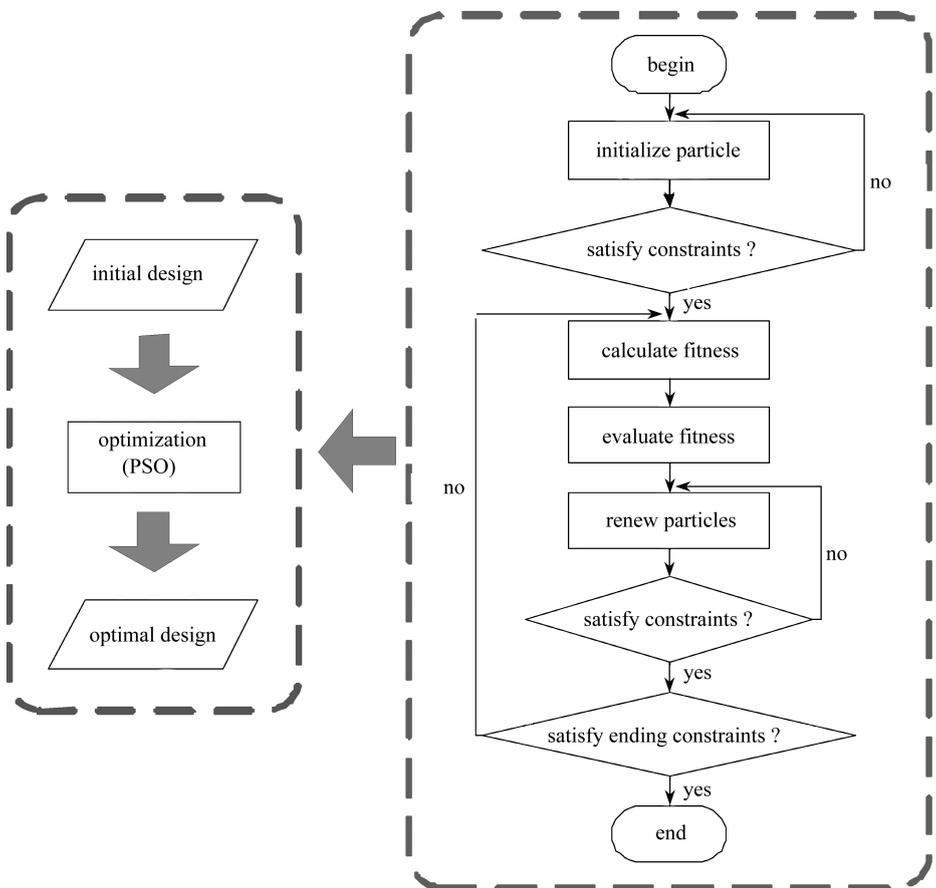


图 3 粒子群优化算法流程图

Fig. 3 Flow chart of the particle swarm optimization (PSO) algorithms

2 基于最小参数区间集的不确定结构分析

本节将基于第 1 节得到的最小参数区间集来估计不确定结构的最不利响应和最有利响应. 为方便说明问题, 这里仅给出具有不确定参数结构的静力响应分析列式. 事实上, 本文方法

同样适用于其它不确定结构力学问题,例如固有振动频率分析、动力响应分析等。

考虑结构静力有限元方程

$$\mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{u}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}), \quad (10)$$

其中, $\mathbf{K} = (k_{ij})$ 为 $n \times n$ 维刚度矩阵, $\mathbf{u} = (u_i)$ 为 n 维结点位移列向量, $\mathbf{f} = (f_i)$ 为 n 维外载荷列向量, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$ 为结构参数,例如结构物理、材料和几何特性等。

考虑一现实情况,经常地,我们对结构参数的试验数据信息掌握较少而难以确定其概率特性。此时,可采用第 1 节方法得到包围试验数据点的最小参数区间集

$$\Omega = \{\mathbf{a} : \mathbf{a} \in R^m, \mathbf{a} = \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\theta}^*)\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}^*), \underline{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\theta}^*) \leq \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}^*) \leq \bar{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\theta}^*)\}, \quad (11)$$

其中, \mathbf{a} 为结构参数可行点, $\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}^*)$ 为与最优旋转角 $\boldsymbol{\theta}^*$ 对应的坐标变换矩阵, $\underline{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\theta}^*)$ 和 $\bar{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\theta}^*)$ 分别为试验数据点在最优旋转坐标系下坐标 $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}^*)$ 的下界和上界向量。

由式(11)可知,结构参数 \mathbf{a} 的中心点 \mathbf{a}_0 与 \mathbf{b} 的中心 $\mathbf{b}_0(\boldsymbol{\theta}^*)$ 的关系为

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\theta}^*)\mathbf{b}_0, \quad (12)$$

与中心值 \mathbf{a}_0 有微小变化的结构参数可以记作

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \delta\mathbf{a}, \quad a_i = a_{i0} + \delta a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (13)$$

其中, $\delta\mathbf{a} = (\delta a_i) \in R^m$ 是一个小量。

借助一阶 Taylor 级数展开,具有不确定参数 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \delta\mathbf{a}$ 结构静力位移可近似为

$$u_i(\mathbf{a}) = u_i(\mathbf{a}_0 + \delta\mathbf{a}) = u_i(\mathbf{a}_0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial u_i(\mathbf{a}_0)}{\partial a_j} \delta a_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

因而,求解结构最不利和最有利静力响应问题,就可以转化为求解目标函数式(14)在约束集合式(11)下的最优值问题。由式(14)知,目标函数关于不确定参数是线性的,而且参数可行集式(11)是具有 2^m 个顶点的盒子(即凸集),从而,由最优化理论可知,结构静力响应的最优值将在可行集的顶点上达到,通过将参数可行集式(11)的顶点分别代入式(14),其中结构静力响应值的最小值即为结构最有利响应,最大值即为结构最不利响应。

而经典区间分析方法的最有利响应和最不利响应分别为^[15]

$$\underline{u}_{il} = u_{i0} - \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial u_{i0}}{\partial a_j} \right| \Delta a_j, \quad \bar{u}_{il} = u_{i0} + \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial u_{i0}}{\partial a_j} \right| \Delta a_j, \quad (15)$$

其中, Δa_j 为由试验数据确定的参数经典区间集的半径。

有一点必须要指出,尽管在处理非线性问题时一阶 Taylor 级数展开法存在一定程度的精度不足,但由于该方法在计算规模和求解效率方面存在明显优势,本文仍采用该方法进行后续的不确定传播分析研究。当然,除了 Taylor 级数展开法以外,还有一些处理不确定性传播分析的方法,如顶点法、配点法、Monte-Carlo 模拟法、直接优化法等,其实不同的工程实际问题将决定最终分析方法的选择。

因此,通过与经典区间分析方法的比较可以得到以下结论:

(i) 经典区间分析方法和本文所述的最小体积方法都是基于一阶 Taylor 级数展开的思想(表达式(14))来求得结构响应的近似解;

(ii) 通过经典区间分析得到的最优解往往在边界处求得,而基于文中所提出方法的最优解通常在最小区间集的顶点处获得。

至此,就会出现一个问题:基于最小参数区间集和基于经典区间集的两种区间分析方法,哪一个得到的结构响应区间更窄?

3 数值算例与讨论

3.1 一个简单的二维不确定性分析问题

考虑如图 4 所示 7 杆平面桁架,其中杆横截面积 $A = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$,弹性模量 $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, F_1 和 F_2 分别为作用在 2 节点和 4 节点 y 方向的外载荷.这里,取 F_1 和 F_2 为不确定参数.

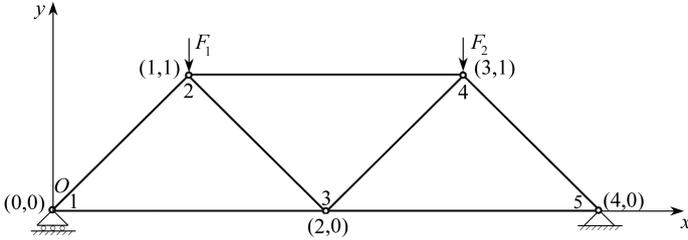


图 4 7 杆平面桁架

Fig.4 Seven-bar planar truss

给出几组样本来描述不确定参数.本算例中的样本数据来源于计算机编程生成的随机数据,仅以此说明方法的可行性,而在处理实际工程时上述信息均应来自真实的试验.下面将通过这几组不同的不确定参数的样本数据来求解 3 节点 y 方向位移响应区间界限,并对本文方法和经典区间分析方法进行比较.其中,通过 PSO 算法寻找包含全部样本点的最优超立方体域,坐标旋转角的迭代历程曲线如图 5 所示.

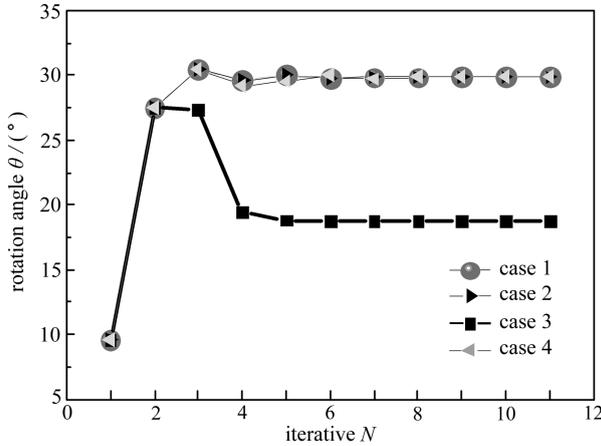


图 5 基于 PSO 算法的坐标旋转角 θ 迭代历程曲线

Fig.5 The iterative process of rotation angle θ for coordinate transformation based on the PSO algorithms

1) 设有一组如表 1 所示的不确定参数 F_1 和 F_2 的试验数据,图 6 显示了由本文方法确定的最小区间集和经典区间集,此时最小区间集包含于经典区间集.

表 1 不确定参数 F_1 和 F_2 的试验数(工况 1)

Table 1 Experimental data of the uncertain loads F_1 and F_2 (case 1)

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_1	0.452	0.344	0.357	0.301	0.468	0.391	0.364	0.419	0.304	0.478	0.428	0.254
F_2	1.394	1.385	1.412	1.317	1.367	1.426	1.344	1.356	1.273	1.373	1.459	1.359

通过本文区间分析方法,可以求得 3 节点 y 方向最有利位移(或位移下界)和最不利位移(或位移上界)分别为

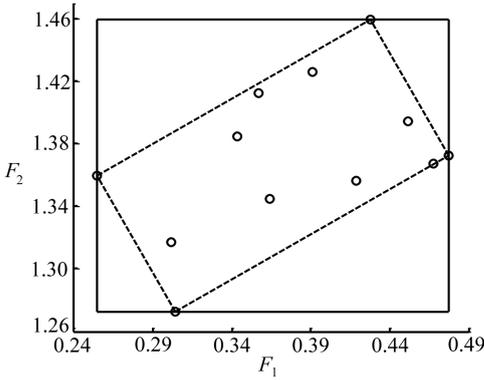


图6 包围不确定参数的最小区间集
和经典区间集(工况1)

Fig. 6 The quantitative results obtained from the smallest interval analysis method and the classical interval analysis method (case 1)

$$\min |u_{l1}^{3y}| = 2.6960E-7, \max |u_{l1}^{3y}| = 3.2256E-7. \quad (16)$$

通过经典区间分析方法,可以求得3节点y方向最有利位移(或位移下界)和最不利位移(或位移上界)分别为

$$\min |u_{l2}^{3y}| = 2.6106E-7, \max |u_{l2}^{3y}| = 3.3111E-7. \quad (17)$$

从式(16)和式(17)可以看出,当最小区间集包含于经典区间集时,本文区间分析方法得到的响应区间要比经典区间分析方法得到的响应区间要窄。

2) 设有一组如表2所示的不确定参数 F_1 和 F_2 的试验数据,图7显示了由本文方法确定的最小区间集和经典区间集,此时最小区间集与经典区间集相交且没有包含关系。

表2 不确定参数 F_1 和 F_2 的试验数据(工况2)

Table 2 Experimental data of the uncertain loads F_1 and F_2 (case 2)

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_1	0.452	0.344	0.357	0.301	0.468	0.391	0.364	0.419	0.382	0.400	0.473	0.259
F_2	1.394	1.385	1.412	1.317	1.367	1.426	1.344	1.356	1.318	1.328	1.381	1.351

通过本文区间分析方法,可以求得3节点y方向最有利位移(或位移下界)和最不利位移(或位移上界)分别为

$$\min |u_{l1}^{3y}| = 2.6960E-7, \max |u_{l1}^{3y}| = 3.2222E-7. \quad (18)$$

通过经典区间分析方法,可以求得3节点y方向最有利位移(或位移下界)和最不利位移(或位移上界)分别为

$$\min |u_{l2}^{3y}| = 2.6945E-7, \max |u_{l2}^{3y}| = 3.2452E-7. \quad (19)$$

从式(18)和式(19)可以看出,本文区间分析方法得到的响应区间要比经典区间分析方法得到的响应区间要窄。

3) 设有一组如表3所示的不确定参数 F_1 和 F_2 的试验数据,图8显示了由本文方法确定的最小区间集和经典区间集,此时最小区间集与经典区间集相交且没有包含关系。

通过本文区间分析方法,可以求得3节点y方向最有利位移(或位移下界)和最不利位移(或位移上界)分别为

$$\min |u_{l1}^{3y}| = 2.4858E-7, \max |u_{l1}^{3y}| = 3.4361E-7. \quad (20)$$

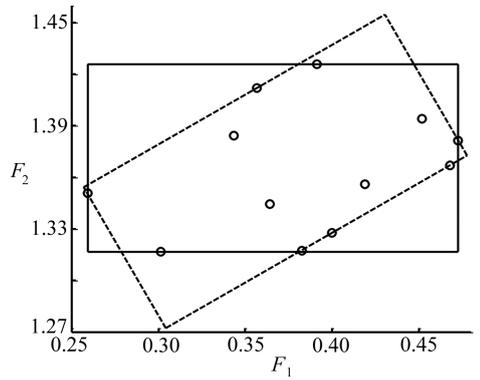


图7 包围不确定参数的最小区间集
和经典区间集(工况2)

Fig. 7 The quantitative results obtained from the smallest interval analysis method and the classical interval analysis method (case 2)

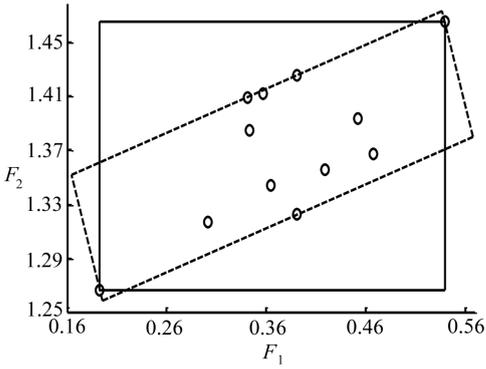


图 8 包围不确定参数的最小区间集和经典区间集(工况 3)

Fig. 8 The quantitative results obtained from the smallest interval analysis method and the classical interval analysis method (case 3)

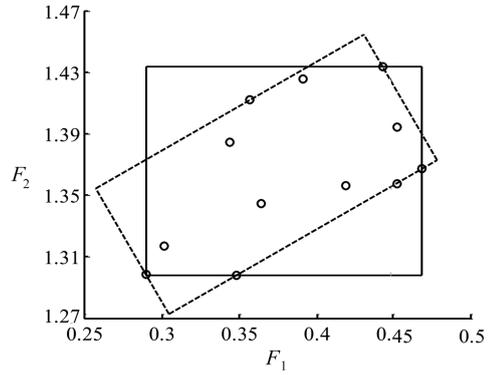


图 9 包围不确定参数的最小区间集和经典区间集(工况 4)

Fig. 9 The quantitative results obtained from the smallest interval analysis method and the classical interval analysis method (case 4)

通过经典区间分析方法,可以求得 3 节点 y 方向最有利位移(或位移下界)和最不利位移(或位移上界)分别为

$$\min |u_{l2}^{3y}| = 2.4938 \text{E} - 7, \max |u_{l2}^{3y}| = 3.4278 \text{E} - 7. \tag{21}$$

从式(20)和式(21)可以看出,经典区间分析方法得到的响应区间要比本文区间分析方法得到的响应区间要窄。

表 3 不确定参数 F_1 和 F_2 的试验数(工况 3)

Table 3 Experimental data of the uncertain loads F_1 and F_2 (case 3)

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_1	0.452	0.344	0.357	0.301	0.468	0.391	0.364	0.419	0.193	0.539	0.391	0.341
F_2	1.394	1.385	1.412	1.317	1.367	1.426	1.344	1.356	1.266	1.466	1.323	1.409

4) 设有一组如表 4 所示的不确定参数 F_1 和 F_2 的试验数据,图 9 显示了由本文方法确定的最小区间集和经典区间集,此时最小区间集与经典区间集相交。

表 4 不确定参数 F_1 和 F_2 的试验数(工况 4)

Table 4 Experimental data of the uncertain loads F_1 and F_2 (case 4)

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_1	0.452	0.344	0.357	0.301	0.468	0.391	0.364	0.419	0.348	0.452	0.443	0.289
F_2	1.394	1.385	1.412	1.317	1.367	1.426	1.344	1.356	1.298	1.358	1.433	1.299

通过本文区间分析方法,可以求得 3 节点 y 方向最有利位移(或位移下界)和最不利位移(或位移上界)分别为

$$\min |u_{l1}^{3y}| = 2.6960 \text{E} - 7, \max |u_{l1}^{3y}| = 3.2222 \text{E} - 7. \tag{22}$$

通过经典区间分析方法,可以求得 3 节点 y 方向最有利位移(或位移下界)和最不利位移(或位移上界)分别为

$$\min |u_{l2}^{3y}| = 2.7131 \text{E} - 7, \max |u_{l2}^{3y}| = 3.2498 \text{E} - 7. \tag{23}$$

从式(22)和式(23)可以看出,本文区间分析方法得到的响应区间要比经典区间分析方法得到的响应区间呈相交关系,即本文区间分析方法的下界小于经典区间分析方法的下界,而本文区间分析方法的的上界小于经典区间分析方法的的上界。此时,我们可以取这两种方法区间结果

的交,即

$$\min |u_l^{3y}| = 2.713 \text{ 1E} - 7, \max |u_l^{3y}| = 3.222 \text{ 2E} - 7. \quad (24)$$

作为“最优”结构响应区间.这样,最终得到的结构响应区间将比单独使用这两种区间分析方法的结构响应区间都窄.

基于这两种定量化方法(最小体积/经典)得到的结构响应间的关系可以从上述4种工况集中体现出来.有一点必须要强调,关于哪种方法更优越或者更具适用性的评价准则通常是由不确定性信息的特质以及实际工程问题的要求所决定的.

3.2 复合材料层合板结构屈曲问题的多维不确定性分析

本节中,基于区间分析理论,将通过某复合材料层合板屈曲问题的多维不确定性分析,即定量化和传播分析来进一步验证文中所提出方法在处理复杂工程问题时的正确性和可行性.

考虑一10层对称层合矩形板 $[\theta/90^\circ + \theta/\theta/90^\circ + \theta/\theta]_{\text{sym}}$, 单层厚度 $t = 0.4 \text{ mm}$, 简支边界条件, 板的长和宽均为 800 mm . 该复合材料采用碳纤维 T300-QY8911, 密度为 $1\,380.0 \text{ kg/m}^3$. 由于复合材料本身的分散性,我们将弹性系数 $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \nu_{21}, G_{12})^T$ 看作是不确定参数, 铺层角度 θ 从 0° 到 90° 间变化.

根据单向受压复合层合板屈曲的基本计算公式, 屈曲载荷的近似表达式(公式推导见文献[16])如下所示:

$$\bar{N}_b(m, n) = -\pi^2 \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \left(\frac{a}{m} \right)^2 \right], \quad (25)$$

其中, D_{ij} 是单元弯曲刚度矩阵, m 和 n 代表屈曲波数.

很显然,在进行复合材料层合板结构屈曲特性分析之前,弹性系数的取值是必须要确知的.然而,由于材料编织和加工工艺带来的不确定性,这就导致结构的屈曲问题必须要综合考虑材料分散性的影响.

表5 T300-QY8911 弹性系数的试验数据

Table 5 Experimental data of the elastic moduli for T300-QY8911

N	E_1/GPa	E_2/GPa	ν_{21}	G_{12}/GPa	N	E_1/GPa	E_2/GPa	ν_{21}	G_{12}/GPa
1	129.20	9.34	0.28	5.23	9	132.19	9.07	0.30	4.85
2	131.59	9.53	0.33	4.97	10	132.00	9.73	0.35	5.00
3	130.63	9.08	0.33	5.16	11	130.39	9.21	0.34	5.34
4	132.01	9.34	0.33	5.15	12	128.28	8.67	0.33	4.98
5	131.04	8.94	0.34	5.15	13	135.30	9.18	0.32	5.13
6	120.61	9.04	0.33	4.81	14	137.33	9.28	0.33	5.25
7	127.69	8.99	0.32	5.11	15	141.69	10.73	0.31	5.47
8	133.65	9.36	0.35	5.08	16	126.91	9.39	0.33	5.65

文献[17]中给出了关于 T300-QY8911 弹性系数的真实试验数据,具体见表5.这本身是一个4维不确定性问题,于是坐标转换矩阵可以表示为

$$\mathbf{T}_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_2 \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

这样基于式(7),包含全部样本点的最小体积公式为

$$V_I = \min_{\theta_1, \theta_2, \theta_3} \{ V_I(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \}. \quad (27)$$

借助于前述的定量化方法和优化算法,最终最佳坐标偏转角为 $\theta^* = (\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*) = (38^\circ, 30^\circ, 60^\circ)$, 这表明最小体积的超立方体并不与全局坐标系的轴向平行. 弹性系数中心值的向量表达为

$$E_0 = (E_1^0, E_2^0, v_{21}^0, G_{12}^0)^T = (133.475\ 9, 9.573\ 9, 0.312\ 1, 5.115\ 6)^T. \quad (28)$$

为了避免由于各不确定参数间量级不同所带来的数值计算误差,引入无量纲的不确定弹性系数表示如下:

$$e_1 = \frac{E_1}{131.0}, e_2 = \frac{E_2}{9.4}, \mu_{21} = \frac{v_{21}}{0.3}, g_{12} = \frac{G_{12}}{5.3}. \quad (29)$$

通过公式(26)和式(29),最小超立方体的16个顶点如表6所示. 而通过经典区间分析得到的超立方体顶点坐标如表7所示. 根据,我们不难发现两个超立方体之间的相交关系.

表6 最小体积超立方体的16个顶点

Table 6 16 vertices of the smallest hyper-rectangle

N	$(e_1, e_2, \mu_{21}, g_{12})$	N	$(e_1, e_2, \mu_{21}, g_{12})$
e^1	(0.886 3, 0.917 7, 1.003 4, 0.986 8)	e^9	(0.953 2, 0.865 5, 1.003 4, 0.986 8)
e^2	(0.932 6, 0.976 9, 1.133 5, 1.073 6)	e^{10}	(0.999 5, 0.924 7, 1.133 5, 1.073 6)
e^3	(0.909 4, 0.947 3, 1.068 4, 0.856 8)	e^{11}	(0.976 3, 0.895 1, 1.068 4, 0.856 8)
e^4	(0.955 7, 1.006 5, 1.198 5, 0.943 6)	e^{12}	(1.022 6, 0.954 3, 1.198 5, 0.943 6)
e^5	(1.015 3, 1.082 8, 0.882 5, 0.986 8)	e^{13}	(1.082 1, 1.030 5, 0.882 5, 0.986 8)
e^6	(1.061 5, 1.142 0, 1.012 6, 1.073 6)	e^{14}	(1.128 4, 1.089 7, 1.012 6, 1.073 6)
e^7	(1.038 4, 1.112 3, 0.947 4, 0.856 8)	e^{15}	(1.105 2, 1.060 1, 0.947 4, 0.856 8)
e^8	(1.084 6, 1.171 5, 1.077 6, 0.943 6)	e^{16}	(1.151 5, 1.119 3, 1.077 6, 0.943 6)

表7 经典超立方体的16个顶点

Table 7 16 vertices of the classical hyper-rectangle

N	$(e_1, e_2, \mu_{21}, g_{12})$	N	$(e_1, e_2, \mu_{21}, g_{12})$
e^1	(0.920 7, 0.922 3, 0.933 3, 0.907 5)	e^9	(1.081 6, 0.922 3, 0.933 3, 0.907 5)
e^2	(0.920 7, 0.922 3, 0.933 3, 1.066 0)	e^{10}	(1.081 6, 0.922 3, 0.933 3, 1.066 0)
e^3	(0.920 7, 0.922 3, 1.166 7, 0.907 5)	e^{11}	(1.081 6, 0.922 3, 1.166 7, 0.907 5)
e^4	(0.920 7, 0.922 3, 1.166 7, 1.066 0)	e^{12}	(1.081 6, 0.922 3, 1.166 7, 1.066 0)
e^5	(0.920 7, 1.141 5, 0.933 3, 0.907 5)	e^{13}	(1.081 6, 1.141 5, 0.933 3, 0.907 5)
e^6	(0.920 7, 1.141 5, 0.933 3, 1.066 0)	e^{14}	(1.081 6, 1.141 5, 0.933 3, 1.066 0)
e^7	(0.920 7, 1.141 5, 1.166 7, 0.907 5)	e^{15}	(1.081 6, 1.141 5, 1.166 7, 0.907 5)
e^8	(0.920 7, 1.141 5, 1.166 7, 1.066 0)	e^{16}	(1.081 6, 1.141 5, 1.166 7, 1.066 0)

利用已获得定量化结果,进而采用区间分析手段考察不确定性对复合材料层合板结构稳定性的影响. 该10层板结构屈曲载荷上下界限随铺层角度 θ 变化的历程曲线如图10和图11所示.

从结果历程曲线可以看出,随着复合材料层合板铺层角度的改变,整体的屈曲特性变化显著,而且要值得注意的是本算例基于最小体积运算得到的响应结果较经典方法边界更宽,这与上例中工况3所述情况相同.

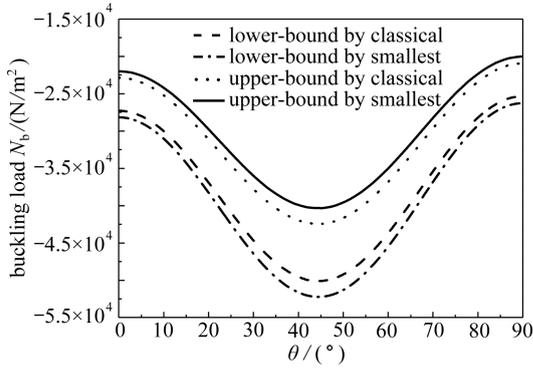


图 10 基于最小/经典区间分析方法的
复合材料层合板屈曲载荷
历程曲线 ($m = 1, n = 1$)

Fig. 10 Variability of the buckling load for laminated
plate obtained by the smallest/classical
interval analysis method ($m = 1, n = 1$)

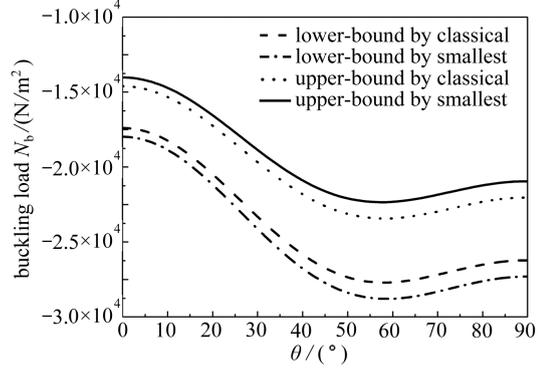


图 11 基于最小/经典区间分析方法的
复合材料层合板屈曲载荷
历程曲线 ($m = 1, n = 2$)

Fig. 11 Variability of the buckling load for laminated
plate obtained by the smallest/classical
interval analysis method ($m = 1, n = 2$)

如上所述,便完成了基于有限不确定信息的参数定量化和结构传播响应的整个分析过程。实际上,本文的目的并不是过分突出最小体积方法较经典方法的优越性,或是想要替代现有的概率方法,相反仅仅是提出一种新的可能性选择和补充。针对不同问题,比如不确定性信息的可获知量,分析系统的复杂程度,精度和效率的要求等往往才是决定各种方法适用性好坏的真正评定准则。

4 结 论

本文研究了结构参数的不确定性对结构响应的影响。一方面针对关于不确定参数的试验数据点有限导致概率分析和模糊分析方法的使用受限问题,另一方面考虑到经典区间分析方法采用的参数区间集未必是最优区间集问题,提出了一种确定包围所有试验数据的最小参数区间集的方法,并基于最小参数区间集给出了一种新的估计不确定结构最有利响应和最不利响应的区间分析方法。通过几组的不确定参数的可能试验数据,对本文提出的方法与经典区间分析方法得到的结构响应区间的关系进行了讨论。结果发现,两种方法的优劣完全依赖于试验数据。

当由试验数据所确定的最小参数区间集包含于经典参数区间集时,前者方法的响应区间要比后者方法的响应区间要窄;当由试验数据所确定的最小参数区间集与经典参数区间集不存在包含关系而相交时,会出现 3 种情况的结果:(a) 前者方法的响应区间比后者方法的响应区间窄;(b) 后者方法的响应区间比前者方法的响应区间窄;(c) 前者方法的响应区间与后者方法的响应区间相交,此时可取两种方法区间结果的交作为“最优”结构响应区间,这样,最终得到的结构响应区间将比单独使用这两种区间分析方法的结构响应区间都窄。

最后,想要说明每种方法都有各自的优势和不足,针对不同问题选择合适的求解方法才能更加准确而高效地处理实际工程问题。

参考文献(References):

- [1] Jiang C, Han X, Lu G Y, Liu J, Zhang Z, Bai Y C. Correlation analysis of non-probabilistic convex model and corresponding structural reliability technique[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, **200**(33/36): 2528-2546.
- [2] Elishakoff I, Ohsaki M. *Optimization and Anti-Optimization of Structures Under Uncertainty*[M]. London: Imperial College Press, 2010.
- [3] Impollonia N, Muscolino G. Interval analysis of structures with uncertain-but-bounded axial stiffness[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, **200**(21/22): 1945-1962.
- [4] Degrauwe D, Roeck G D, Lombaert G. Uncertainty quantification in the damage assessment of a cable-stayed bridge by means of fuzzy numbers[J]. *Computers & Structures*, 2009, **87**(17/18): 1077-1084.
- [5] Zhai D Y, Mendel J M. Uncertainty measures for general type-2 fuzzy sets[J]. *Information Science*, 2011, **181**(3): 503-518.
- [6] Kang Z, Luo Y J. Non-Probabilistic reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures using convex models[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, **198**(41/44): 3228-3238.
- [7] Qiu Z P, Ma L H, Wang X J. Non-probabilistic interval analysis method for dynamic response analysis of nonlinear systems with uncertainty[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **319**(1/2): 531-540.
- [8] Chen S H, Ma L, Meng G W, Guo R. An efficient method for evaluating the natural frequencies of structures with uncertain-but-bounded parameters[J]. *Computers & Structures*, 2009, **87**(9/10): 582-590.
- [9] Luo Y J, Kang Z, Li A. Structural reliability assessment based on probability and convex set mixed mode[J]. *Computers & Structures*, 2009, **87**(21/22): 1408-1415.
- [10] Guo S X. Stability analysis and design of time-delay uncertain systems using robust reliability method[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2011, **22**(3): 493-499.
- [11] Luo Y J, Kang Z, Luo Z, Li A. Continuum topology optimization with non-probabilistic reliability constraints based on multi-ellipsoid convex model[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, **39**(3): 297-310.
- [12] Ferson S, Kreinovich V, Hajagos J, Oberkampf W, Ginzburg L. Experimental uncertainty estimation and statistics for data having interval uncertainty[R]. SAND2007-0939, 2007.
- [13] Aggarwal C C. *Managing and Mining Uncertain Data*[M]. New York: Springer, 2009.
- [14] Coleman H W, Steele W G. *Experimentation, Validation, and Uncertainty Analysis for Engineers*[M]. New Jersey: Wiley, 2009.
- [15] Qiu Z P. Comparison of static response of structures using convex models and interval analysis method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, **56**(12): 1735-1753.
- [16] Özben T. Analysis of critical buckling load of laminated composites plate with different

- boundary conditions using fem and analytical methods[J]. *Computational Materials Science*, 2009, **45**(4): 1006-1015.
- [17] Goggin P R. The elastic constants of carbon-fibre composites[J]. *Journal of Materials Science*, 1973, **8**(2): 233-244.

Response Analysis Based on Smallest Interval Set of Parameters for Structures With Uncertainty

WANG Xiao-jun, WANG Lei, QIU Zhi-ping

(*Institute of Solid Mechanics, Beihang University, Beijing 100191, P. R. China*)

Abstract: An integral analytic process from quantification to propagation based on limited uncertain parameters was investigated for dealing with practical engineering problems. A new method using the smallest interval-set/hyper-rectangle containing all the experimental data was proposed to quantify the uncertainties of parameters. By virtue of the smallest parameter interval-set, the study of uncertainty propagation evaluating the most favorable response and the least favorable response of structures based on interval analysis was then presented. Furthermore, the relationship between the proposed interval analysis method and the classical interval analysis method was discussed. Two numerical examples were performed to demonstrate the feasibility and validity of the developed method.

Key words: quantification analysis; smallest interval-set/hyper-rectangle; uncertain structural response; most favorable response; least favorable response