

非线性自治振动系统同宿解的 广义双曲函数摄动法*

陈洋洋¹, 燕乐纬², 余锦炎³, 陈树辉⁴

- (1. 广州大学, 减震控制与结构安全教育部重点实验室, 广州 510405;
2. 广州大学 工程力学系, 广州 510405;
3. 香港大学 机械工程系, 中国香港;
4. 中山大学 应用力学与工程系, 广州 510405)

(陈立群推荐)

摘要: 提出广义的双曲函数摄动法,用于求解强非线性自治振子的同宿解,克服一般摄动步骤中派生方程须存在显式精确同宿解的限制.以广义双曲函数作为摄动步骤的基本函数,拓展了基于双曲函数的摄动法的适用范围.对同时含2,3次和含4次强非线性项的系统进行求解分析,验证了方法的有效性和精度.

关键词: 广义双曲函数摄动法; 自激系统; 同宿解

中图分类号: O322 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.09.004

引言

过去一个世纪以来,摄动方法在求解非线性振子的近似解析解方面取得巨大进展.然而,经典的摄动方法基本上只对求弱非线性振子的周期解有效.近几十年来,为了改进这些方法的有效性和精度,使之适用于形式更广泛的系统,许多新的摄动方法被提出,这些方法主要是基于采用更多类型的周期函数、改进摄动步骤的思路,从而对某些强非线性系统的周期解更具适用性.这些改进的摄动方法总体上可以分为改进的圆函数(三角函数)摄动方法、椭圆函数摄动方法和广义谐波函数摄动方法等,文献[1]对这几类方法作了概述.

除周期解之外,同宿和异宿解在非线性系统的全局分岔、混沌性质和孤立波等相关问题的研究中也扮演着重要的角色^[2-8].因此,许多学者也致力于研究非线性振动系统的同(异)宿分岔和同(异)宿解问题.例如,Vakakis^[9]分析了 Duffing 振子稳定与不稳定流形的变化过程;

* **收稿日期:** 2012-05-08; **修订日期:** 2012-05-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10972240);国家自然科学基金青年基金资助项目(11102045);广东省自然科学基金博士启动基金资助项目(S2011040004039);广东省高校优秀青年创新人才培养基金资助项目(LYM10108);广州市高校科研基金资助项目(10A024);香港研究资助局研究基金资助项目(GRF HKU 7173 09E)

作者简介: 陈洋洋(1981—),男,广东人,讲师,博士(联系人. Tel:+86-20-86395053; E-mail:chenyangyang2007@gmail.com).

Vakakis 等^[10]发展了一种迭代算法近似计算一类同宿轨道; Xu 等^[11]提出了半解析计算强非线性振子分界线和极限环的摄动增量法; Chan 等^[12]应用摄动增量法研究了一类极限环的稳定性和分岔; Belhaq^[13]发展了一种预测极限环发生同宿连结的解析判据, 随后, 他和他的同事分别应用椭圆函数平均法^[14]和椭圆函数 Lindstedt-Poincaré 法^[15]来改进他们方法的预测精度, 并得到与经典 Melnikov 方法一致的结果; Mikhlin^[16]解析构造了一类二维和一类三维系统的同宿轨道; Mikhlin 等^[17]随后应用他们的方法定量求解了一类含多个平衡点的机械系统的同宿和异宿轨道; Manucharyan 等^[18]应用 Padé 和 quasi-Padé 近似构造了一类非线性系统的同宿和异宿解; Cao 等^[19]提出了一种主共振最优控制技术来抑制一类振子的同宿或异宿轨道的横截相交; Zhang 等^[20]应用待定固有频率法研究了一类强非线性振子的异宿分岔问题; Zhang 等^[21]应用待定固有频率法研究一类强非线性振子的同宿分岔问题; Izydorek 等^[22-23]研究了二阶 Hamilton 系统的同宿和异宿解的存在性. Cao 等^[24]对摄动增量法做了改进, 更精确的求解一类非线性振子的同宿和异宿解.

最近, 本文作者先后提出双曲函数摄动法和双曲函数 L-P (Lindstedt-Poincaré) 法^[25-28], 应用这些方法可以获得强非线性自治系统

$$\ddot{x} + c_1 x + c_m x^m = \varepsilon f(\mu, x, \dot{x}) \quad (1)$$

的同宿解, 其中, $m = 2$ 或 3 , $f(\mu, x, \dot{x})$ 是其变量的任意非线性多项式, ε 是摄动参数, μ 代表同宿分岔控制参数. 然而, 这些方法仅能应用于那些派生方程具有已知的准确同宿解的系统.

在已有工作的基础上, 本文研究拓展求同宿解的双曲函数摄动方法的适用范围, 使之适用于形式更一般的系统

$$\ddot{x} + g(x) = \varepsilon f(\mu, x, \dot{x}), \quad (2)$$

其中, $g(x)$ 是 x 的任意非线性多项式. 本文方法的基本思路是以定义广义双曲函数 $\operatorname{sech}(\tau(t))$ 和 $\operatorname{tanh}(\tau(t))$ 为出发点, 定义 $\tau(t)$ 为时间 t 的非线性时间变换. 该方法可以认为是之前方法^[25-28]的推广. 本文应用该法分别研究同时含有 2 次和 3 次非线性项及含有 4 次非线性项的典型振子, 算例表明该法的有效性和精度.

1 广义双曲函数

我们以讨论派生方程的同宿解为出发点, 令 $\varepsilon = 0$, 方程(2)的派生方程可以表示为

$$\ddot{x} + g(x) = 0, \quad (3)$$

将方程乘以 \dot{x} 并对 t 积分一次得到

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) = E, \quad (4)$$

其中

$$V(x) = \int_0^x g(u) du. \quad (5)$$

方程(4)中, $\dot{x}^2/2$ 和 $V(x)$ 分别表示振动系统的动能和势能, 积分常数 E 表示系统的总机械能. 不失一般性, 表示方程(3)同宿解的势能曲线和相图, 可以由图 1(a) 和图 1(b) 分别表示. 且假设函数 $g(x)$ 和 $V(x)$ 满足如下条件:

(i) 非线性多项式函数 $g(x)$ 满足

$$g(0) = 0; \quad (6)$$

(ii) 在势能曲线上存在极大值点 $B(b, V(b))$ 与相图中的鞍点对应, 即

$$g(b) = 0, g'(b) < 0; \quad (7a, b)$$

(iii) 在势能曲线上存在另外某一点 $A(a_0 + b, V(a_0 + b))$, 其势能与 B 点相等, 且 A 点与 B 点之间任一点的系统势能皆小于这 2 点, 即对于 $x \in (a_0 + b, b)$,

$$V(a_0 + b) = V(b), V(x) < V(b). \quad (8)$$

满足以上 3 个条件, 即可认为方程(3)相图中存在一同宿轨道, 其对应的解 (x_0, \dot{x}_0) 满足同宿条件, 即随着时间 $t \rightarrow \pm \infty$, (x_0, \dot{x}_0) 逼近鞍点 $(b, 0)$.

为了构造方程(3)的同宿解, 我们首先回顾 $g(x) = c_1 x + c_3 x^3$ 的特殊情形, 该情形对应的同宿解可以表示为

$$x_0 = a_0 \operatorname{sech} \omega_0 t, \quad (9)$$

其中, a_0 和 ω_0 为常数^[26]. 为了进一步说明问题, 方程(9)可以重新写为

$$x_0 = a_0 \operatorname{sech} \tau, \quad (10)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \omega_0. \quad (11)$$

由于有

$$\operatorname{sech}(\pm \infty) = \tanh(0) = 0, \operatorname{sech}(0) = 1, \tanh(\pm \infty) = \pm 1, \quad (12, a, b, c)$$

很容易证明式(10)满足以 $(0, 0)$ 为同宿点的同宿条件.

那么对于 $g(x) \neq c_1 x + c_3 x^3$, 即同宿点为 $(b, 0)$ 的一般情形, 我们可以假设同宿解仍能表示为

$$x_0 = a_0 \operatorname{sech} \tau + b, \quad (13)$$

其中, a_0 和 b 由式(7)和式(8)确定.

同时可以认为式(11)是表示时间从 t 到 τ 的线性变换式, 那么对于 $g(x) \neq c_1 x + c_3 x^3$ 的一般情形, 我们可以引进非线性的时间变换式, 即

$$\frac{d\tau}{dt} = \omega_0(\tau), \quad (14)$$

这里函数 $\omega_0(\tau)$ 为有界函数, 于是

$$\dot{x}_0 = -a_0 \omega_0(\tau) \operatorname{sech} \tau \tanh \tau. \quad (15)$$

注意到系统同宿运动的总机械能为

$$E_0 = V(a_0 + b) = V(b), \quad (16)$$

则根据能量关系

$$\frac{1}{2} \omega_0^2 x_0'^2 + V(x_0) = V(b), \quad (17)$$

其中, x_i' 表示 x_i 对 τ 求导一次, 上式得到 $\omega_0(\tau)$ 的表示式

$$\omega_0(\tau) = \frac{1}{|x_0'|} \sqrt{2[V(b) - V(x_0)]}. \quad (18)$$

于是, 方程(3)的同宿轨可以由式(13)和式(15)及式(18)表示, 函数 $\operatorname{sech} \tau(t)$ 和 $\tanh \tau(t)$

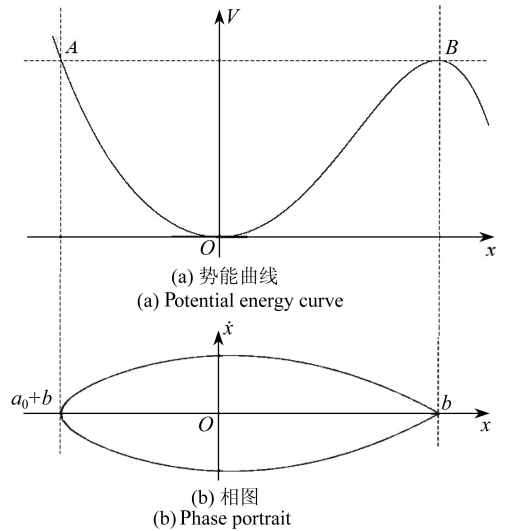


图 1 典型系统同宿解

Fig. 1 Typical of a homoclinic solution

可以称为广义的双曲函数,它们将作为接下来摄动步骤的基本函数.

2 广义双曲函数摄动法

作为方法的论述,我们具体考虑方程(2)表示的非线性振子的同宿解,其中, μ 表示同宿分岔控制参数,其分岔值 μ_c ,即系统存在同宿解的参数值,将由后面的摄动步骤确定.

当 $\varepsilon = 0$,方程(2)的同宿解可由式(13)表示.当 $\varepsilon \neq 0$,我们设方程(2)的同宿解仍可表示为

$$x = a \operatorname{sech} \tau(t) + b, \quad (19)$$

然而其中的 a 和 τ 将在摄动过程中确定.于是可以分别对 a 和 $\omega(\tau)$ 进行摄动展开,即

$$a = a_0 + \varepsilon a_1 + \cdots + \varepsilon^n a_n + \cdots \quad (20)$$

和

$$\frac{d\tau}{dt} = \omega(\tau) = \omega_0(\tau) + \varepsilon \omega_1(\tau) + \cdots + \varepsilon^n \omega_n(\tau) + \cdots, \quad (21)$$

其中, $n = 1, 2, \cdots$,且 $\omega_n(\tau)$ 是有界函数.则方程(19)可以重新写为

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots + \varepsilon^n x_n + \cdots, \quad (22)$$

其中

$$x_n = a_n \operatorname{sech} \tau. \quad (23)$$

则

$$x'_n = -a_n \operatorname{sech} \tau \tanh \tau. \quad (24)$$

将式(21)和式(22)代入方程(2)并令方程两边 ε 的同次幂系数相等,得到如下各阶摄动方程:

$$\varepsilon^0: \quad \omega_0 \frac{d}{d\tau} (\omega_0 x'_0) + g(x_0) = 0, \quad (25)$$

$$\varepsilon^1: \quad \omega_0 \frac{d}{d\tau} (\omega_1 x'_0) + \omega_1 \frac{d}{d\tau} (\omega_0 x'_0) + \omega_0 \frac{d}{d\tau} (\omega_0 x'_1) + g_{,x}(x_0) x_1 = f(\mu, x_0, \omega_0 x'_0), \quad (26)$$

$$\varepsilon^2: \quad \omega_0 \frac{d}{d\tau} (\omega_2 x'_0) + \omega_2 \frac{d}{d\tau} (\omega_0 x'_0) + \omega_0 \frac{d}{d\tau} (\omega_0 x'_2) + \omega_1 \frac{d}{d\tau} (\omega_0 x'_1) + \omega_0 \frac{d}{d\tau} (\omega_1 x'_1) + \omega_1 \frac{d}{d\tau} (\omega_1 x'_0) + g_{,x}(x_0) x_2 + \frac{1}{2} g_{,xx}(x_0) x_1^2 = f_{,x}(\mu, x_0, \omega_0 x'_0) x_1 + f_{,x'}(\mu, x_0, \omega_0 x'_0) (\omega_0 x'_1 + \omega_1 x'_0), \quad (27)$$

⋮

其中, $g_{,x} = \partial g / \partial x$, $g_{,xx} = \partial^2 g / \partial x^2$,以此类推.于是我们可以以此求解上述各阶线性方程(25)至方程(27), \cdots ,确定各阶摄动解 x_0, x_1, x_2, \cdots .

可以看到方程(25)相当于由方程(3)通过式(14)的变换得到.于是,方程(25)的同宿解即由式(10)表示.将方程(26)两边乘以 x'_0 ,并从 τ_0 到 τ 积分一次得到

$$\omega_0 \omega_1 x_0'^2 \Big|_{\tau_0}^{\tau} = \int_{\tau_0}^{\tau} x'_0 f(\mu, x_0, \omega_0 x'_0) d\tau - \omega_0^2 x'_0 x_1 \Big|_{\tau_0}^{\tau} - x_1 g(x_0) \Big|_{\tau_0}^{\tau}, \quad (28)$$

即

$$\omega_0 \omega_1 x_0'^2 \Big|_{\tau_0}^{\tau} = I(\tau) - I(\tau_0) - \omega_0^2 x'_0 x_1 \Big|_{\tau_0}^{\tau} - x_1 g(x_0) \Big|_{\tau_0}^{\tau}, \quad (29)$$

其中

$$I(\tau) = \int_0^\tau x'_0 f(\mu, x_0, \omega_0 x'_0) d\tau = \int_0^\tau x'_0 f(\mu, x_0, \sqrt{2[V(b) - V(x_0)]}) d\tau = \\ a_0 \int_0^\tau f(\mu, a_0 \operatorname{sech} \tau + b, \sqrt{2[V(b) - V(a_0 \operatorname{sech} \tau + b)]}) d \operatorname{sech} \tau. \quad (30)$$

注意到双曲函数可由下述函数另外表示,即

$$\operatorname{sech}(\tau) = \operatorname{cn}(1, \tau) = \cos(\operatorname{am}(1, \tau)), \quad (31)$$

其中, $\operatorname{cn}(1, \tau)$ 和 $\operatorname{am}(1, \tau)$ 分别是模 $k = 1$ 时的 Jacobi 椭圆余弦函数和 Jacobi 椭圆振幅函数^[25,29], 我们有如下前 N 项截断的 Fourier 展式

$$\sqrt{[V(b) - V(a_0 \operatorname{sech} \tau + b)]} = \sqrt{[V(b) - V(a_0 \cos(\operatorname{am}(1, \tau)) + b)]} = \\ P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \cos(i \operatorname{am}(1, \tau)) \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (32)$$

其中, 系数

$$P_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{[V(b) - V(a_0 \cos \varphi + b)]} d\varphi, \quad (33)$$

$$P_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{[V(b) - V(a_0 \cos \varphi + b)]} \cos(i\varphi) d\varphi. \quad (34)$$

而且, 注意到三角余弦函数的倍角公式

$$\cos(i\varphi) = \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \cos^{i-2k} \varphi, \quad (35)$$

其中

$$Q_k = (-1)^k 2^{i-2k-1} i(i-k-1)! / [k! (i-2k)!], \quad (36)$$

$\operatorname{int}(i/2)$ 表示 $i/2$ 的整数部分. 于是联合式(32)和式(35)有

$$\sqrt{[V(b) - V(x_0)]} = P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \operatorname{sech}^{i-2k} \tau, \quad (37)$$

且方程(30)可重新写为

$$I(\tau) = a_0 \int_0^\tau f\left(\mu, a_0 \operatorname{sech} \tau, \sqrt{2} \left(P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \operatorname{sech}^{i-2k} \tau\right)\right) d \operatorname{sech} \tau. \quad (38)$$

对于那些过于冗繁的情形, 方程(30)的解析积分计算是难以完成的, 则最后 $\omega_1(\tau)$ 将由积分方程表示. 然而, 对于许多典型系统, 我们可取定合适的项数 N 并完成式(38)的解析积分运算, 来作为式(30)的更为直接和简便的近似计算. 本文后面所有的算例都是取 $N = 20$, 并得到很好的精度和计算结果.

注意到式(12), 我们有

$$x_0(0) = a_0, \quad x_0(\pm\infty) = b, \quad x_n(0) = a_n, \quad (39a, b, c)$$

$$x_n(\pm\infty) = x'_0(0) = x'_0(\pm\infty) = x'_n(0) = x'_n(\pm\infty) = 0. \quad (39d)$$

于是在方程(29)中, 令 $\tau_0 = -\infty$ 和 $\tau = +\infty$ 可得到

$$I(+\infty) - I(-\infty) = 0, \quad (40)$$

令 $\tau_0 = 0$ 和 $\tau = +\infty$ 可得到

$$a_1 = \frac{-I(+\infty)}{g(a_0 + b_0)}. \quad (41)$$

令 $\tau_0 = 0$ 可得到

$$\omega_1 = \frac{I(\tau) - \omega_0^2 x_0' x_1' - x_1 g(x_0) + a_1 g(a_0 + b)}{\omega_0 x_0'^2}. \quad (42)$$

所以 μ_c, a_1 和 $\omega_1(\tau)$ 可分别由式(40)至式(42)确定. 而方程(2)存在同宿解的条件即 μ 存在满足方程(40) 的值. 换句话说, 如果对于所有的 μ , 方程(40) 无法满足, 则方程(2) 不存在同宿解. 该条件实际上与 Belhaq 等^[15] 应用椭圆函数 Lindstedt-Poincaré 法和 Melnikov 方法得到的结果一致.

与一般的摄动方法类似, 在上述推导的基础上可以进行下一阶的摄动步骤. 然而, 摄动步骤将随着阶数的增加而变得冗繁. 更重要的是, 本文若干算例表明, 即使对中等大小的摄动参数 ε , 精确至 εx_1 的双曲函数摄动解也已具备一定的精度.

3 分析一类同时含 2 次和 3 次强非线性项的非线性振子

3.1 摄动步骤

作为本文方法的直接应用, 我们研究如下同时含 2 次和 3 次强非线性项的振子:

$$\ddot{x} + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = \varepsilon(\mu x + \mu_4 x^4) \dot{x}. \quad (43)$$

即

$$g(x_0) = c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + c_3 x_0^3, \quad (44)$$

$$V(x_0) = \frac{1}{2} c_1 x_0^2 + \frac{1}{3} c_2 x_0^3 + \frac{1}{4} c_3 x_0^4, \quad (45)$$

$$f(\mu, x_0, \omega_0 x_0') = \omega_0 x_0 x_0' (\mu + \mu_4 x_0^3), \quad (46)$$

其中, μ_4 是常数, μ 是感兴趣的分岔控制参数. 分别将式(44)和式(45)代入方程(7)和方程(8), 得到

$$c_1 b + c_2 b^2 + c_3 b^3 = 0, \quad c_1 + 2c_2 x_0 + 3c_3 b^2 < 0, \quad (47a, b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} c_1 (a_0 + b)^2 + \frac{1}{3} c_2 (a_0 + b)^3 + \frac{1}{4} c_3 (a_0 + b)^4 = \\ & \frac{1}{2} c_1 b^2 + \frac{1}{3} c_2 b^3 + \frac{1}{4} c_3 b^4. \end{aligned} \quad (47c)$$

由上面式子可分别确定 a_0 和 b . 再将式(46)代入式(38)得到

$$\begin{aligned} I(\tau) &= a_0 \int_0^\tau f(\mu, a_0 \operatorname{sech} \tau + b, \sqrt{2} \left(P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \operatorname{sech}^{i-2k} \tau \right)) d \operatorname{sech} \tau = \\ & a_0 \int_0^\tau [\mu + \mu_4 (a_0 \operatorname{sech} \tau + b)^3] (a_0 \operatorname{sech} \tau + b) \times \\ & \sqrt{2} \left(P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \operatorname{sech}^{i-2k} \tau \right) d \operatorname{sech} \tau = \\ & \sqrt{2} a_0 \int_0^\tau [b(\mu + \mu_4 b^3) + a_0(\mu + 4\mu_4 b^3) \operatorname{sech} \tau + 6\mu_4 a_0^2 b^2 \operatorname{sech}^2 \tau + \\ & 4\mu_4 a_0^3 b \operatorname{sech}^3 \tau + \mu_4 a_0^4 \operatorname{sech}^4 \tau] \left(P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \operatorname{sech}^{i-2k} \tau \right) d \operatorname{sech} \tau = \\ & \sqrt{2} a_0 \left\{ b(\mu + \mu_4 b^3) \left[P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \frac{\operatorname{sech}^{i-2k} \tau}{(i-2k+1)} \right] + \right. \\ & \left. a_0(\mu + 4\mu_4 b^3) \left[\frac{P_0}{2} + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \frac{\operatorname{sech}^{i-2k} \tau}{(i-2k+2)} \right] \operatorname{sech} \tau + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 6\mu_4 a_0^2 b^2 \left[\frac{P_0}{3} + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\text{int}(i/2)} Q_k \frac{\text{sech}^{i-2k} \tau}{(i-2k+3)} \right] \text{sech}^2 \tau + \\
& 4\mu_4 a_0^3 b \left[\frac{P_0}{4} + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\text{int}(i/2)} Q_k \frac{\text{sech}^{i-2k} \tau}{(i-2k+4)} \right] \text{sech}^3 \tau + \\
& \mu_4 a_0^4 \left[\frac{P_0}{5} + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\text{int}(i/2)} Q_k \frac{\text{sech}^{i-2k} \tau}{(i-2k+5)} \right] \text{sech}^4 \tau \Big|_{\tau=0}^{\tau}.
\end{aligned} \quad (48)$$

注意到 x_0 是偶函数而 x_0' 是奇函数, 方程(40)可以写为

$$2I(+\infty) = 0. \quad (49)$$

即令方程(48)中 $\tau = +\infty$ 得到

$$\mu = W_1/W_2, \quad (50)$$

其中

$$\begin{aligned}
W_1 = & \mu_4 b^4 \left[P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\text{int}(i/2)} \frac{Q_k}{(i-2k+1)} \right] + \\
& 4\mu_4 a_0 b^3 \left[\frac{P_0}{2} + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\text{int}(i/2)} \frac{Q_k}{(i-2k+2)} \right] + \\
& 6\mu_4 a_0^2 b^2 \left[\frac{P_0}{3} + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\text{int}(i/2)} \frac{Q_k}{(i-2k+3)} \right] + \\
& 4\mu_4 a_0^3 b \left[\frac{P_0}{4} + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\text{int}(i/2)} \frac{Q_k}{(i-2k+4)} \right] + \\
& \mu_4 a_0^4 \left[\frac{P_0}{5} + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\text{int}(i/2)} Q_k \frac{\text{sech}^{i-2k} \tau}{(i-2k+5)} \right],
\end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
W_2 = & -b \left[P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\text{int}(i/2)} \frac{Q_k}{(i-2k+1)} \right] - \\
& a_0 \left[\frac{P_0}{2} + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\text{int}(i/2)} \frac{Q_k}{(i-2k+2)} \right].
\end{aligned} \quad (52)$$

于是系统存在同宿解的分岔值 μ_c 可以由式(50)确定.

将方程(44)和式(49)代入方程(41), 得到

$$a_1 = \frac{-I(+\infty)}{c_1(a_0+b) + c_2(a_0+b)^2 + c_3(a_0+b)^3} = 0. \quad (53)$$

则式(42)可以重新写为

$$\omega_1(\tau) = \frac{I(\tau)}{\omega_0 x_0'^2} = \frac{-I(\tau)}{\sqrt{2} a_0 \omega_0 \text{sech} \tau \tanh \tau}. \quad (54)$$

最后, 方程(43)的同宿解可以表示为

$$x = a_0 \text{sech} \tau + b + O(\varepsilon^2), \quad (55)$$

$$\dot{x} = -a_0 [\omega_0 + \varepsilon \omega_1(\tau)] \text{sech} \tau \tanh \tau + O(\varepsilon^2). \quad (56)$$

3.2 算例

本小节具体给出3个算例, 为了考察有效性和精度, 本方法的结果将与 Runge-Kutta 数值方法的相关结果进行比较.

算例1 本算例考察方程

$$\ddot{x} - x + 3x^2 - x^3 = \varepsilon(\mu x - 12x^4)\dot{x}, \quad (57)$$

即方程(43)中, $c_1 = -1$, $c_2 = 3$, $c_3 = -1$, $\mu_4 = -12$. 由方程(47)得 $a_0 = 2 - \sqrt{2}$ 和 $b = 0$. 方程(57)的同宿解表示为

$$x = (2 - \sqrt{2}) \operatorname{sech} \tau + O(\varepsilon^2), \quad (58)$$

$$\dot{x} = (\sqrt{2} - 2) [\omega_0 + \varepsilon \omega_1(\tau)] \operatorname{sech} \tau \tanh \tau + O(\varepsilon^2). \quad (59)$$

由方程(50)得到系统存在同宿解的同宿分岔值为 $\mu = 0.888\ 022$. 图2给出了 $\varepsilon = 0.7$ 情况下系统的同宿轨道. 同样, 图中也给出了数值轨道供比较, 这里用数值极限环逼近的方法得到的同宿分岔值为 $\mu_c = 0.884\ 716$, 与本文方法得到的结果比较接近.

本文用 Runge-Kutta 数值积分计算同宿分岔值 μ_c 和同宿轨道附近的极限环的方法步骤是引用自 Merkin 等^[30] 的经典方法, 该方法步骤也在以往论文^[25-28] 中给出了具体论述, 故这里不再赘述.

算例2 本算例考察方程

$$\ddot{x} - x - 1.5x^2 + 2x^3 = \varepsilon(\mu x - x^4)\dot{x}, \quad (60)$$

即方程(43)中, $c_1 = -1$, $c_2 = -1.5$, $c_3 = 2$, $\mu_4 = -1$. 由方程(47)得 $a_0 = (1 \pm \sqrt{5})/2$ 和 $b = 0$. 方程(57)的同宿解表示为

$$x = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{5}) \operatorname{sech} \tau + O(\varepsilon^2), \quad (61)$$

$$\dot{x} = -(1 \pm \sqrt{5}) [\omega_0 + \varepsilon \omega_1(\tau)] \operatorname{sech} \tau \tanh \tau + O(\varepsilon^2). \quad (62)$$

当 $a_0 = (1 + \sqrt{5})/2$, 由方程(50)得到系统存在同宿解的同宿分岔值为 $\mu = 1.682\ 448$. 当 $a_0 = (1 - \sqrt{5})/2$, 由方程(50)得到系统存在同宿解的另外一个同宿分岔值为 $\mu = -0.089\ 834$. 图3和图4分别给出了 $\varepsilon = 0.9$ 时两种情况下系统的同宿轨道. 同样, 图中也给出了数值轨道供比较, 这里用数值极限环逼近的方法得到的两个同宿分岔值分别为 $\mu_c = 1.675\ 720$, 以及 $\mu_c = -0.089\ 816$, 与本文方法得到的结果比较接近.

本小节具体给出3个算例, 为了考察有效性和精度, 本方法的结果将与 Runge-Kutta 数值方法的相关结果进行比较.

算例3 本算例考察方程

$$\ddot{x} + 3x - 0.2x^2 - 2x^3 = \varepsilon(\mu x - x^4)\dot{x}, \quad (63)$$

即方程(43)中, $c_1 = 3$, $c_2 = -0.2$, $c_3 = -2$, $\mu_4 = -1$. 由方程(47)得 $a_0 = (1 - 3\sqrt{601} + \sqrt{1 + 3\sqrt{601}})/30$ 和 $b = (\sqrt{601} - 1)/20$. 方程(63)的同宿解表示为

$$x = (1 - 3\sqrt{601} + \sqrt{1 + 3\sqrt{601}}) \operatorname{sech} \tau + \frac{1}{20} (\sqrt{601} - 1) + O(\varepsilon^2), \quad (64)$$

$$\dot{x} = -(1 - 3\sqrt{601} + \sqrt{1 + 3\sqrt{601}}) [\omega_0 + \varepsilon \omega_1(\tau)] \operatorname{sech} \tau \tanh \tau + O(\varepsilon^2). \quad (65)$$

由方程(50)得到系统存在同宿解的同宿分岔值为 $\mu = 3.023\ 787$. 图5给出了 $\varepsilon = 0.7$ 情况下系统的同宿轨道. 同样, 图5中也给出了数值轨道供比较, 这里用数值极限环逼近的方法得

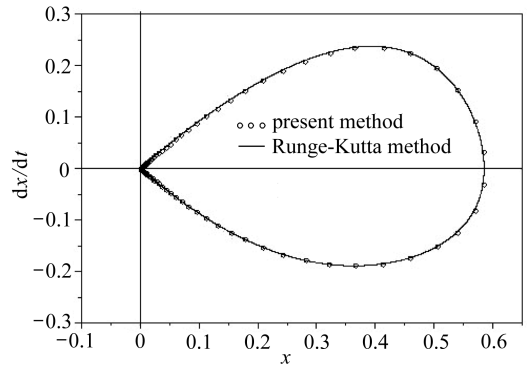


图2 当 $\varepsilon = 0.7$ 时, 方程(57)的同宿轨
Fig. 2 Homoclinic orbit of Eq. (57) with $\varepsilon = 0.7$

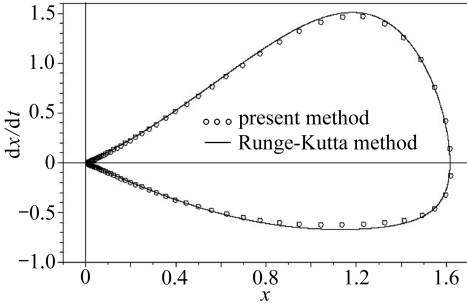


图3 当 $\varepsilon = 0.9$ 时, 方程(60)的同宿轨

Fig.3 Homoclinic orbit of Eq. (60) with $\varepsilon = 0.9$

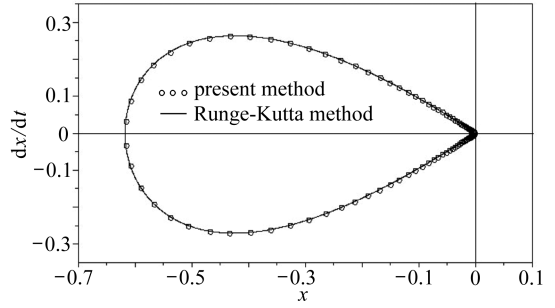


图4 当 $\varepsilon = 0.9$ 时, 方程(60)的同宿轨

Fig.4 Homoclinic orbit of Eq. (60) with $\varepsilon = 0.9$

到的同宿分岔值为 $\mu_c = 3.010\ 450$, 与本文方法得到的结果比较接近.

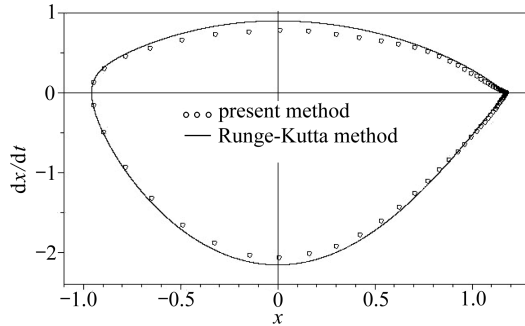


图5 当 $\varepsilon = 0.7$ 时, 方程(63)的同宿轨

Fig.5 Homoclinic orbit of Eq. (63) with $\varepsilon = 0.7$

4 分析一类含 4 次强非线性项的非线性振子

4.1 摄动步骤

作为本文方法的直接应用, 我们研究如下同时含 4 次强非线性项的振子:

$$\ddot{x} + c_1 x + c_4 x^4 = \varepsilon(\mu + \mu_1 x + \mu_2 x^2) \dot{x}. \tag{66}$$

即

$$g(x_0) = c_1 x_0 + c_4 x_0^4, \tag{67}$$

$$V(x_0) = \frac{1}{2} c_1 x_0^2 + \frac{1}{5} c_4 x_0^5, \tag{68}$$

$$f(\mu, x_0, \omega_0 x_0') = \omega_0 x_0' (\mu + \mu_1 x_0 + \mu_2 x_0^2), \tag{69}$$

其中, μ_1 和 μ_2 是常数, μ 是感兴趣的分岔控制参数. 分别将式(67)和式(68)代入方程(7)和方程(8), 得到

$$c_1 b + c_4 b^4 = 0, \quad c_1 + \frac{1}{4} c_4 b^3 < 0, \tag{70a, b}$$

$$\frac{1}{2} c_1 (a_0 + b)^2 + \frac{1}{5} c_4 (a_0 + b)^5 = \frac{1}{2} c_1 b^2 + \frac{1}{5} c_4 b^5, \tag{70c}$$

由上面式子可分别确定 a_0 和 b . 再将式(69)代入式(38)得到

$$I(\tau) = a_0 \int_0^\tau f\left(\mu, a_0 \operatorname{sech} \tau + b, \sqrt{2} \left(P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \operatorname{sech}^{i-2k} \tau \right) \right) d \operatorname{sech} \tau =$$

$$\begin{aligned}
& a_0 \int_0^\tau [\mu + \mu_1 (a_0 \operatorname{sech} \tau + b) + \mu_2 (a_0 \operatorname{sech} \tau + b)^2] \times \\
& \sqrt{2} \left(P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \operatorname{sech}^{i-2k} \tau \right) d \operatorname{sech} \tau = \\
& \sqrt{2} a_0 \int_0^\tau [(\mu + \mu_1 b + \mu_2 b^2) + a_0 (\mu_1 + 2\mu_2 b) \operatorname{sech} \tau + \\
& \mu_2 a_0^2 \operatorname{sech}^2 \tau] \left(P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \operatorname{sech}^{i-2k} \tau \right) d \operatorname{sech} \tau = \\
& \sqrt{2} a_0 \left\{ (\mu + \mu_1 b + \mu_2 b^2) \left[P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \frac{\operatorname{sech}^{i-2k} \tau}{(i-2k+1)} \right] + \right. \\
& a_0 (\mu_1 + 2\mu_2 b) \left[\frac{P_0}{2} + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \frac{\operatorname{sech}^{i-2k} \tau}{(i-2k+2)} \right] \operatorname{sech} \tau + \\
& \left. \mu_2 a_0^2 \left[\frac{P_0}{3} + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} Q_k \frac{\operatorname{sech}^{i-2k} \tau}{(i-2k+3)} \right] \operatorname{sech}^2 \tau \right\} \operatorname{sech} \tau. \quad (71)
\end{aligned}$$

注意到 x_0 是偶函数而 x_0' 是奇函数, 方程(40)可以写为

$$2I(+\infty) = 0. \quad (72)$$

即令方程(71)中 $\tau = +\infty$ 得到

$$\mu = Z_1/Z_2, \quad (73)$$

其中

$$\begin{aligned}
Z_1 = & (\mu_1 b + \mu_2 b^2) \left[P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} \frac{Q_k}{(i-2k+1)} \right] + \\
& a_0 (\mu_1 + 2\mu_2 b) \left[\frac{P_0}{2} + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} \frac{Q_k}{(i-2k+2)} \right] + \\
& \mu_2 a_0^2 \left[\frac{P_0}{3} + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} \frac{Q_k}{(i-2k+2)} \right], \quad (74)
\end{aligned}$$

$$Z_2 = -\mu \left[P_0 + \sum_{i=1}^N P_i \sum_{k=0}^{\operatorname{int}(i/2)} \frac{Q_k}{(i-2k+1)} \right]. \quad (75)$$

于是系统存在同宿解的分岔值 μ_c 可以由计算式(73)确定.

将方程(67)和方程(72)代入方程(41), 得到

$$a_1 = \frac{-I(+\infty)}{c_1(a_0 + b_0) + c_4(a_0 + b_0)^4} = 0. \quad (76)$$

则式(42)可以重新写为

$$\omega_1(\tau) = \frac{I(\tau)}{\omega_0 x_0^2} = \frac{-I(\tau)}{\sqrt{2} a_0 \omega_0 \operatorname{sech} \tau \tanh \tau}. \quad (77)$$

最后, 方程(66)的同宿解可以表示为

$$x = a_0 \operatorname{sech} \tau + b + O(\varepsilon^2), \quad (78)$$

$$\dot{x} = -a_0 [\omega_0 + \varepsilon \omega_1(\tau)] \operatorname{sech} \tau \tanh \tau + O(\varepsilon^2). \quad (79)$$

4.2 算例

本小节具体给出3个算例, 为了考察有效性和精度, 本方法的结果将与 Runge-Kutta 数值方法的相关结果进行比较.

算例4 本算例考察方程

$$\ddot{x} + x + x^4 = \varepsilon(\mu - 1.5x - x^2)\dot{x}, \quad (80)$$

即方程(66)中, $c_1 = c_4 = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$. 由方程(70)得 $a_0 = (10^{2/3} - 2 \cdot 10^{1/3} + 10)/6$ 和 $b = -1$. 方程(80)的同宿解表示为

$$x = \frac{1}{6} (10^{2/3} - 2 \cdot 3^{1/3} + 10) \operatorname{sech} \tau - 1 + O(\varepsilon^2), \quad (81)$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{6} (10^{2/3} - 2 \cdot 3^{1/3} + 10) [\omega_0 + \varepsilon\omega_1(\tau)] \operatorname{sech} \tau \tanh \tau + O(\varepsilon^2). \quad (82)$$

由方程(73)得到系统存在同宿解的同宿分岔值为 $\mu = 0.075\ 854$. 图6给出了 $\varepsilon = 1$ 情况下系统的同宿轨道. 同样, 图6中也给出了数值轨道供比较, 这里用数值极限环逼近的方法得到的同宿分岔值为 $\mu_c = 0.071\ 815$, 与本文方法得到的结果比较接近.

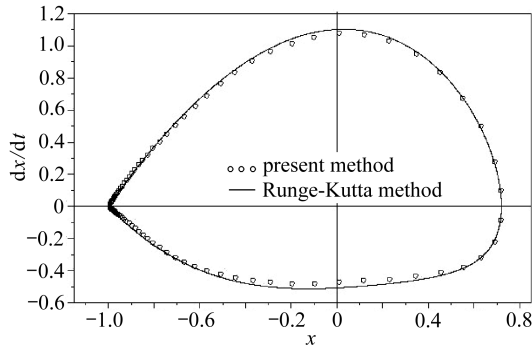


图6 当 $\varepsilon = 1$ 时, 方程(80)的同宿轨

Fig. 6 Homoclinic orbit of Eq. (80) with $\varepsilon = 1$

算例5 本算例考察方程

$$\ddot{x} - x + x^4 = \varepsilon(\mu - x - 1.5x^2)\dot{x}, \quad (83)$$

即方程(66)中, $c_1 = -1$, $c_4 = 1$, $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -1.5$. 由方程(70)得 $a_0 = \sqrt[3]{5/2}$ 和 $b = 0$. 方程(83)的同宿解表示为

$$x = \sqrt[3]{5/2} \operatorname{sech} \tau + O(\varepsilon^2), \quad (84)$$

$$\dot{x} = -\sqrt[3]{5/2} [\omega_0 + \varepsilon\omega_1(\tau)] \operatorname{sech} \tau \tanh \tau + O(\varepsilon^2). \quad (85)$$

由方程(73)得到系统存在同宿解的同宿分岔值为 $\mu = 1.959\ 107$. 图7给出了 $\varepsilon = 0.5$ 情况下系统的同宿轨道. 同样, 图7中也给出了数值轨道供比较, 这里用数值极限环逼近的方法得到的同宿分岔值为 $\mu_c = 1.978\ 244$, 与本文方法得到的结果比较接近.

算例6 本算例考察方程

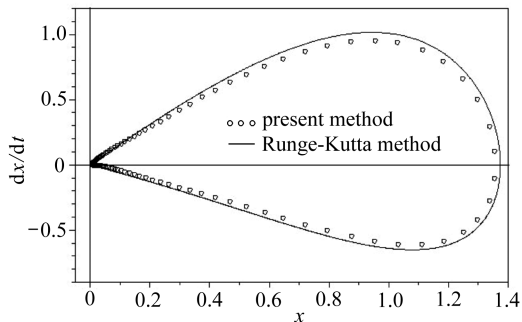
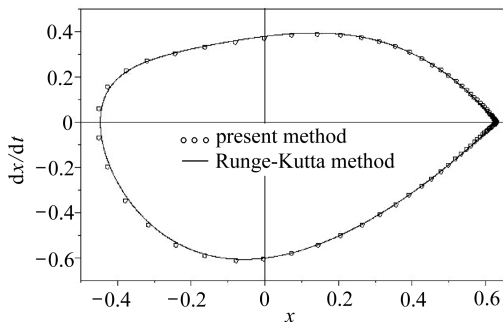
$$\ddot{x} + x - 4x^4 = \varepsilon(\mu + 2x - 5x^2)\dot{x}, \quad (86)$$

即方程(66)中, $c_1 = 1$, $c_4 = -4$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = -5$. 由方程(70)得 $a_0 = -\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} - 5\sqrt[3]{2}$ 和 $b = 1/\sqrt[3]{4}$. 方程(86)的同宿解表示为

$$x = (-\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} - 5\sqrt[3]{2}) \operatorname{sech} \tau + (1/\sqrt[3]{4}) + O(\varepsilon^2), \quad (87)$$

$$\dot{x} = (\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{20} + 5\sqrt[3]{2}) [\omega_0 + \varepsilon\omega_1(\tau)] \operatorname{sech} \tau \tanh \tau + O(\varepsilon^2). \quad (88)$$

由方程(73)得到系统存在同宿解的同宿分岔值为 $\mu = 0.261\ 301$. 图8给出了 $\varepsilon = 0.8$ 情况

图7 当 $\varepsilon = 0.5$ 时, 方程(83)的同宿轨Fig. 7 Homoclinic orbit of Eq. (83) with $\varepsilon = 0.5$ 图8 当 $\varepsilon = 0.8$ 时, 方程(86)的同宿轨Fig. 8 Homoclinic orbit of Eq. (86) with $\varepsilon = 0.8$

下系统的同宿轨道. 同样, 图8中也给出了数值轨道供比较, 这里用数值极限环逼近的方法得到的同宿分岔值为 $\mu_c = 0.248\ 530$, 与本文方法得到的结果比较接近.

5 结 论

(i) 本文提出的广义双曲函数摄动法突破一般系统很难获得精确的派生同宿解的困难, 是一种求解非线性振子 $\ddot{x} + g(x) = \varepsilon f(\mu, x, \dot{x})$ 同宿解的有效方法.

(ii) 在已有文献^[25-28]研究的基础上, 本方法定义广义双曲函数, 并引入非线性时间变换, 从而有效的拓展了双曲函数摄动方法的适用范围.

(iii) 对于某些中等大小的摄动参数 ε , 本文方法得到的所有算例的同宿轨道与 Runge-Kutta 方法在分岔参数 $\mu = \mu_c$ 时的数值逼近的结果能够较好的吻合.

(iv) 本文提出的方法将可以被推广用于研究相关非线性振动系统的异宿解问题.

参考文献 (References):

- [1] 陈树辉. 强非线性振动系统的定量分析方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007. (CHEN Shu-hui. *Quantitative Analysis Methods for Strongly Nonlinear Vibration* [M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese))
- [2] 刘曾荣. 混沌研究中的解析方法[M]. 上海: 科技教育出版社, 2002. (LIU Zeng-rong. *Analytical Methods for Study of Chaos* [M]. Shanghai: Science and Technology Education Press, 2002. (in Chinese))
- [3] Guckenheimer J, Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* [M]. New York: Springer, 1983.
- [4] Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* [M]. New York: Springer, 1990.
- [5] Nayfeh A H, Balachandran B. *Applied Nonlinear Dynamics, Analytical, Computational, and Experimental Methods* [M]. New York: Wiley, 1995.
- [6] Li J B, Dai H H. *On the Study of Singular Nonlinear Traveling Wave Equation: Dynamical System Approach* [M]. Beijing: Science Press, 2005.
- [7] 陈予恕, 丁千. C-L 方法及其在工程非线性动力学问题中的应用[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(2): 127-134. (CHEN Yu-shu, DING Qian. C-L method and its application to engineering nonlinear dynamical problems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2001, 22(2): 144-153.)

- [8] 陈立群. 带慢变角参数摄动平面非 Hamilton 可积系统的混沌[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(11): 1172-1176. (CHEN Li-qun. Chaos in perturbation planar non-hamiltonian integrable systems with slowly-varying angle parameters[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2001, **22**(11): 1301-1305.)
- [9] Vakakis A F. Exponentially small splittings of manifolds in a rapidly forced Duffing system, Letter to the editor[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, **170**(1): 119-129.
- [10] Vakakis A F, Azeez M F A. Analytic approximation of the homoclinic orbits of the Lorenz system at $\sigma = 10$, $b = 8/3$ and $\rho = 13.926\cdots$ [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1998, **15**(3): 245-257.
- [11] Xu Z, Chan H S Y, Chung K W. Separatrices and limit cycles of strongly nonlinear oscillators by the perturbation-incremental method[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1996, **11**(3): 213-233.
- [12] Chan H S Y, Chung K W, Xu Z. Stability and bifurcations of limit cycles by the perturbation-incremental method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, **206**(4): 589-604.
- [13] Belhaq M. Predicting homoclinic bifurcations in planar autonomous systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1999, **18**(4): 303-310.
- [14] Belhaq M, Lakrad F. Prediction of homoclinic bifurcation: the elliptic averaging method[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2000, **11**(14): 2251-2258.
- [15] Belhaq M, Fiedler B, Lakrad F. Homoclinic connections in strongly self-excited nonlinear oscillators; the Melnikov function and the elliptic Lindstedt-Poincaré method[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2000, **23**(1): 67-86.
- [16] Mikhlin Y V. Analytical construction of homoclinic orbits of two- and three-dimensional dynamical systems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **230**(5): 971-983.
- [17] Mikhlin Y V, Manucharyan G V. Construction of homoclinic and heteroclinic trajectories in mechanical systems with several equilibrium positions [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, **16**(2): 299-309.
- [18] Manucharyan G V, Mikhlin Y V. The construction of homo- and heteroclinic orbits in non-linear systems[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, **69**(1): 39-48.
- [19] Cao H J, Jiang Y Z, Shan Y L. Primary resonant optimal control for nested homoclinic and heteroclinic bifurcations in single-dof nonlinear oscillators[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, **289**(1/2): 229-244.
- [20] Zhang Q C, Wang W, Li W Y. Heteroclinic bifurcations of strongly nonlinear oscillator[J]. *Chinese Physics Letters*, 2008, **25**(5): 1905-1907.
- [21] Zhang Y M, Lu Q S. Homoclinic bifurcation of strongly nonlinear oscillators by frequency-incremental method[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2003, **8**(1): 1-7.
- [22] Izydorek M, Janczewska J. Homoclinic solutions for a class of the second order Hamiltonian systems[J]. *Journal of Differential Equations*, 2005, **219**(2): 375-389.
- [23] Izydorek M, Janczewska J. Heteroclinic solutions for a class of the second order Hamiltonian systems[J]. *Journal of Differential Equations*, 2007, **238**(2): 381-393.
- [24] Cao Y Y, Chung K W, Xu J. A novel construction of homoclinic and heteroclinic orbits in nonlinear oscillators by a perturbation-incremental method[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2011, **64**(3): 221-236.
- [25] Chen S H, Chen Y Y, Sze K Y. A hyperbolic perturbation method for determining homoclinic solution of certain strongly nonlinear autonomous oscillators[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **322**(1/2): 381-392.

- [26] Chen Y Y, Chen S H. Homoclinic and heteroclinic solutions of cubic strongly nonlinear autonomous oscillators by the hyperbolic perturbation method[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, **58** (1/2): 417-429.
- [27] Chen Y Y, Chen S H, Sze K Y. A hyperbolic Lindstedt-Poincaré method for homoclinic motion of a kind strongly nonlinear autonomous oscillators[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2009, **25**(5): 721-729.
- [28] Chen S H, Chen Y Y, Sze K Y. Homoclinic and heteroclinic solutions of cubic strongly nonlinear autonomous oscillators by hyperbolic Lindstedt-Poincaré method [J]. *Science China, Technological Science*, 2010, **53**(3): 1-11.
- [29] Abramowitz M, Stegun I A. *Handbook of Mathematical Functions*[M]. New York: Dover, 1972.
- [30] Merkin J H, Needham D J. On infinite period bifurcations with an application to roll waves [J]. *Acta Mechanica*, 1986, **60**(1/2): 1-16.

Generalized Hyperbolic Perturbation Method for Homoclinic Solutions of Strongly Nonlinear Autonomous Systems

CHEN Yang-yang¹, YAN Le-wei², SZE Kam-yim³, CHEN Shu-hui⁴

(1. *Key Laboratory of Vibration Control and Structural Safety, Ministry of Education of China, Guangzhou University, Guangzhou 510405, P. R. China;*

2. *Department of Engineering Mechanics, Guangzhou University, Guangzhou 510405, P. R. China;*

3. *Department of Mechanical Engineering, The University of Hong Kong, Pokfulam, Hong Kong SAR, P. R. China;*

4. *Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, P. R. China)*

Abstract: A generalized hyperbolic perturbation method was presented for homoclinic solutions of strongly nonlinear autonomous oscillators, in which the perturbation procedure was improved for those systems whose exact homoclinic generating solutions could not be explicitly derived. The generalized hyperbolic functions were employed as the basis functions in the present procedure to extend the validity of the hyperbolic perturbation method. Several strongly nonlinear oscillators with quadratic, cubic and quartic nonlinearity were studied in details to illustrate the efficiency and accuracy of the present method.

Key words: generalized hyperbolic perturbation method; nonlinear autonomous systems; homoclinic solution