

粘性耗散和热源对含尘流体在不稳定伸展面上流动及其传热的影响*

B·J·吉瑞斯哈, G·S·鲁帕, C·S·巴格瓦蒂

(库维浦大学 数学系, 希莫加, 卡纳塔克邦, 印度)

摘要: 研究含尘流体在不稳定伸展面上,作水动力学边界层流动及其热交换问题. 研究中计及摩擦生热(粘性耗散)和内部发热或吸热的影响. 应用适当的相似变换,将控制流动和热交换的基本方程组,变成一组非线性的常微分方程. 利用 Runge-Kutta-Fehlberg-45 格式对变换后的方程进行数值求解. 按发热进程分两种不同情况分析: VWT(变壁面温度)和 VHF(变热通量). 物理参数,如像磁场参数、流(体)-固(体微粒)的相互作用参数、不稳定参数、Prandtl 数、Eckert 数、含尘微粒的数量密度以及热源/汇参数,分别绘出这些物理参数变化时的速度和温度分布曲线;同时,列表和讨论了对壁面温度梯度函数和壁面温度函数的影响.

关键词: 热交换; 边界层流动; 伸缩界面; 含尘流体; 粘性耗散; 不均匀热源; 数值解

中图分类号: O359⁺.1; O414.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.08.004

引言

近年来,流体在伸展界面上边界层流动及其热交换领域,呈现出浓厚的研究兴趣. 由于研究数量众多,在不同领域得到了广泛应用,如聚合物的加工,特别是人工薄膜、人造纤维的制造,以及稀释聚合物溶液的一些应用. 还可以更具体地指出,冶金过程中牵引连续的条/丝,通过静止流体时的冷却,在牵引过程中这些连续的条有时会出现伸缩现象. 伸展面上的热交换很有实用价值,它广泛地应用于热加工,进料辊轴与出料辊轴之间材料挤出时的移动,玻璃纤维和纸张的生产,金属表面或者电脑晶片的冷却,以及塑料薄膜、液体薄膜在浓缩过程中的牵引等等. 由于这些工业现象的广泛应用,这个问题受到了许多研究人员的关注.

Sakiadis^[1-2]在边界壁面速度为常数的假设下研究了边界层问题. Crane^[3]在线性伸缩平面上讨论了不可压缩粘性流体二维的稳定流动. Grubka 等^[4]在均匀单位流量作用下的线性伸展界面上,研究了流体流动时的温度场. Chen^[5]对速度发育中浮力的作用,以及伸展界面上热量边界层流动进行了开创性的研究. Elbashbeshy 等^[6], Sharidan 等^[7]以及 Tsai 等^[8]得到了流体

* 收稿日期: 2011-04-02; 修订日期: 2012-03-28

基金项目: 新德里科技部主要研究课题资助项目(SR/S4/MS:470/07,25-08-2008)

作者简介: B. J. Gireesha, 副教授, 博士(联系人. Tel: +91-9741148002;

E-mail: bjgireesu@rediffmail.com).

本文原文为英文,张晓庆译,张禄坤校.

在不稳定伸展界面上流动和热交换的相似解。Ishak 等^[9]研究了变磁场作用下紧邻连续伸展界面的混合对流问题。Aziz^[10]利用符号代数软件 Maple, 在对流壁面边界条件下得到了平板上层状热边值问题的数值解。Vajravelu 等^[11]对二阶流体在伸展面上流动和热交换问题进行了研究。

粘性耗散效应改变了温度的分布, 温度分布扮演着能源的角色, 从而影响了热交换率。粘性耗散效应评定依赖于平板处于冷却状态还是处于加热状态。Chen^[12]就垂直面 Ohmic 加热和粘性耗散时, 检查了传热/质对 MHD 自由对流的组合影响。Dulal 等在文献[13]中确定了层状边界层流动的热交换特性, 流动沿着不稳定伸展面进行, 伸展面处于粘性耗散和内部吸/放热的多空介质中。Vajravelu 等^[14]完成了考虑粘性耗散和内部产热影响的解析结果。Veena 等^[15]在有粘性耗散和内部产热的伸展面上, 得到了粘弹性流体的热交换解。

根据以上所述发现, 他们仅限于流体的流动和热交换问题的研究。然而, 在不同的工程问题中, 如核反应堆的冷却、使用粉尘的技术、雨水的侵蚀以及油漆的喷雾等, 都会遇到含尘流体的流动问题。含尘边界层问题的重要应用包括自然风引起的土壤侵蚀和核爆炸期间天空中夹带的粉尘。这种现象还广泛出现在诸如流化工艺、火箭筒内的流动、燃烧以及原油的净化工艺等。鉴于这些应用, Saffman^[16]在含气体中含尘颗粒均匀分布下讨论了层流的稳定性。Datta 等^[17]在边界层方程中考虑了滑移引起的拖曳力和滑移-剪切引起的横向力, 对含尘流体在半无限平板上的边界层流动进行了研究。Agranat^[18]讨论了含尘量和压力梯度对摩擦力和传热系数的组合影响。上述理论被用于准平衡状态时, 含尘层状边界层中摩擦力和热交换的实际计算, 同时用来验算相应的实验数据。

Vajravelu 等^[19]在具有吸入影响的伸展面上, 讨论了含尘流体的磁流体分析。Xie 等^[20]利用 Saffmans 公式, 给出了(满载尘埃的)Blasius 流动的稳定性方程。Palani 等^[21]研究了含尘气体在半无限等温斜板上的流动。最近, Gireesha 等^[22]对含尘气体在考虑了不均匀热源/汇的伸展面上, 作稳定的边界层流动和热交换进行了研究。在他们的研究中, 分析了两类产热, 即 PST (指定的壁面温度) 和 PHF (指定的热通量), 但没有考虑磁场和粘性耗散的影响。他们还分析了流(体)-固(体颗粒)相互作用参数、Eckert 数、Prandtl 数、含尘颗粒数量密度以及不均匀产热/吸热参数对温度分布的影响。

本文将 Gireesha 等^[22]的成果推广到不稳定流动, 考虑了粘性耗散和磁场对热交换的影响, 文献[22]的成果希冀的重要性质都被考虑到了。我们讨论了两类边界产热情况: 1) 变壁面温度(VWT); 2) 变热通量(VHF)。本文借助于 Maple 软件, 应用 Runge-Kutta-Fehlberg-45 格式, 将高度非线性的动量和热交换方程进行数值求解。进一步地, 讨论了不同流动参数, 如磁场参数、流-固相互作用参数、不稳定参数、Eckert 数、Prandtl 数、含尘颗粒的数量密度和热源/汇参数, 对速度分布曲线和温度分布的影响。

1 问题的数学公式及其求解

考虑不可压缩、粘性、含尘的流体, 在一个伸展面上, 作不稳定的二维层状边界层流动及其热交换, 以槽口作为原点, 沿伸展壁面方向为 x 轴, 垂直伸展面并向外指向流体为 y 轴。假设流动被限制在 $y > 0$ 的范围内, 流动是由于伸展面以速度 $U_w(x, t)$ 在自身平面内的移动所引起。假设伸展面的壁面温度突然从 T_∞ 上升到 $T_w(x, t) (> T_\infty)$, 或者壁面上突然受到热流量为 $q_w(x, t)$ 的作用, 为了获得壁面与周围流体之间温度差的影响, 假设温度依赖于流动过程中的热源/汇。进而考虑由于粘性耗散引起的摩擦发热。在以上假设下, 二维边界层动力控制方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{KN}{\rho} (u_p - u) - \frac{\sigma \hat{B}_0^2}{\rho} u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial u_p}{\partial y} = \frac{K}{m} (u - u_p), \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial v_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial v_p}{\partial y} = \frac{K}{m} (v - v_p), \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho_p u_p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_p v_p)}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

其中, x 和 y 为坐标轴, 分别为沿着连续壁面的移动方向及其垂直方向; (u, v) 和 (u_p, v_p) 分别表示液相(或流相, 即流体)和固(微粒)相, 沿 x 和 y 方向的速度分量; t 为时间, μ 为流体的粘滞系数, ρ 和 ρ_p 分别为液相和固相的密度, \hat{B}_0 为横向磁场的强度, N 为固相(微粒)的数量密度, K 为 Stoke 阻力系数, m 为微尘的质量浓度. 在上述公式的推导中, 假设 Stoke 阻力是由液相和固相之间相互的拖拉作用产生的, 同时假设感应磁场可以忽略. 另外还假设外部电场为 0, 以及作为其结果的极化电荷忽略不计.

上述边界层方程的组合边界条件为

$$\begin{cases} u = U_w(x, t), v = V_w(x, t), & y = 0, \\ u \rightarrow 0, u_p \rightarrow 0, v_p \rightarrow 0, \rho_p \rightarrow E\rho, & y \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (6)$$

其中, $U_w(x, t) = bx/(1 - at)$ 为伸展面的速度, a 为伸缩率, b 是量纲为(时间) $^{-1}$ 的正数. 需要注意的是, 伸缩率 $b/(1 - at)$ 随时间而增加, 因为 $a > 0$. 在聚合物的挤制过程中, 材料的特性特别是挤出片材的弹性, 在恒力拉伸作用下会随着时间而变化. 对不稳定的伸缩(即, $a \neq 0$), a^{-1} 成为不稳定边界层问题结果有代表性的时间标度. $V_w(x, t) = -(v_0/\sqrt{1 - at})$ 为伸展面的吸入速度($V_w(x, t) > 0$), E 为密度比. 根据相似变量 η 和相似函数 f , 引入以下无量纲量, 使问题复杂的数学公式得到简化:

$$\begin{cases} u = \frac{bx}{1 - at} f'(\eta), v = -\sqrt{\frac{bv}{1 - at}} f(\eta), \eta = \sqrt{\frac{b}{v(1 - at)}} y, \\ u_p = \frac{bx}{1 - at} F(\eta), v_p = \sqrt{\frac{bv}{1 - at}} G(\eta), \rho_p = H(\eta), \hat{B}_0 = B_0(1 - at)^{-1/2}, \end{cases} \quad (7)$$

其中, “'”表示对 η 的导数.

将方程(7)代入控制方程(1)~(5), 得到

$$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) - f'(\eta)^2 - \alpha \left[f'(\eta) + \frac{\eta}{2} f''(\eta) \right] + l\beta H(\eta) [F(\eta) - f'(\eta)] - M f'(\eta) = 0, \quad (8)$$

$$G(\eta)F'(\eta) + F(\eta)^2 - \beta [f'(\eta) - F(\eta)] + \alpha \left[F(\eta) + \frac{\eta}{2} F'(\eta) \right] = 0, \quad (9)$$

$$G(\eta)G'(\eta) + \beta [f(\eta) + G(\eta)] + \frac{\alpha}{2} [G(\eta) + \eta G'(\eta)] = 0, \quad (10)$$

$$F(\eta)H(\eta) + G'(\eta)H(\eta) + H'(\eta)G(\eta) = 0, \quad (11)$$

此时, 边界条件变为

$$\begin{cases} f'(\eta) = 1, f(\eta) = f_0, & \eta = 0, \\ f'(\eta) = 0, F(\eta) = 0, G(\eta) = -f(\eta), H(\eta) = E, & \eta \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\alpha = a/b$ 是度量不稳定程度的一个参数, $\rho_r = \rho_p/\rho$ 是相对密度, $M = \sigma B_0^2/(\rho b)$ 为磁场参数, $l = mN/\rho_p$ 为质量浓度, $\beta = (1 - at)/(\tau_v b)$ 为局部流-固相互作用参数, $\tau_v = m/K$ 为固相的弛豫时间, $f_0 = -v_0/\sqrt{bv}$, ($f_0 > 0$) 为吸入参数.

2 热交换分析

含有热传导、粘性耗散和不均匀热源时, 不稳定含尘边界层热交换的控制方程为

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Nc_p}{\tau_T} (T_p - T) + \frac{N}{\tau_T} (u_p - u)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + Q[T - T_\infty], \quad (13)$$

$$Nc_m \left[\frac{\partial T_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial T_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial T_p}{\partial y} \right] = -\frac{Nc_p}{\tau_T} (T_p - T), \quad (14)$$

其中, T, T_p 分别为边界层内流体和所含微粒的温度, c_p, c_m 分别为流体和所含微粒的比热容, τ_T 为热平衡时间, 即尘雾温度调整至流体温度所需要的时间, k 为热传导系数, 当 $Q > 0$ 时表示热源, 当 $Q < 0$ 时表示热汇.

为了求解温度方程(13)和(14), 考虑两种常见的温度边界条件, 即

- 1) 变壁面温度(VWT)边界条件;
- 2) 变热通量(VHF)边界条件.

情况1 变壁面温度(VWT)

对于加热过程, 使用下面的变壁面温度边界条件:

$$\begin{cases} T = T_w(x, t), & y = 0, \\ T \rightarrow T_\infty, T_p \rightarrow T_\infty, & y \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (15)$$

其中, 伸展面的壁面温度 $T_w = T_\infty + T_0 [bx^2/(\nu(1 - at)^2)]$ 随离槽口距离 x 和时间 t 而变化, T_0 为参考温度, 使 $0 \leq T_0 \leq T_w, T_\infty$ 为远离伸展面时的温度, 且 $T_w > T_\infty$. 从 T_w 的表达式可以看出, 片材温度从槽口处温度 T_0 开始, 与 x^2 成比例减少, 温度随 $(1 - at)$ 的增长而下降. 但应注意整个分析, 方程 U_w 和 T_w 仅对 $t < 1/a$ 有效.

引入无量纲的温度变量 $\theta(\eta), \theta_p(\eta)$:

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \theta_p(\eta) = \frac{T_p - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad (16)$$

其中

$$T - T_\infty = T_0 \left[\frac{bx^2}{\nu(1 - at)^2} \right] \theta(\eta).$$

将无量纲变量 η 和方程(16)代入方程(13)和(14), 得到下面的无量纲方程组:

$$\begin{aligned} \theta''(\eta) + Pr [f(\eta)\theta'(\eta) - 2f'(\eta)\theta(\eta)] + \frac{N}{\rho} c_1 Pr [\theta_p(\eta) - \theta(\eta)] + \\ Pr\delta\theta(\eta) + \frac{N}{\rho} \beta Pr Ec [F(\eta) - f'(\eta)]^2 - \\ \frac{\alpha}{2} Pr [4\theta(\eta) + \eta\theta'(\eta)] + Pr Ec [f''(\eta)]^2 = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$G(\eta)\theta'_p(\eta) + 2F(\eta)\theta_p(\eta) + \frac{\alpha}{2}[4\theta_p(\eta) + \eta\theta'_p(\eta)] + c_1\gamma[\theta_p(\eta) - \theta(\eta)] = 0, \quad (18)$$

其中, $Pr = \mu c_p / k$ 为 Prandtl 数, $c_1 = (1 - at) / (\tau T b)$ 为局部流-固相互作用的温度参数, $\delta = (Q_k / \mu c_p) (Re_x / Re_k^2)$ 为热源 / 汇的参数, $\gamma = c_p / c_m$ 为 c_p 和 c_m 的比值, $Ec = U_w^2 / (c_p (T_w - T_\infty))$ 为局部 Eckert 数, $Re_x = U_w x / \nu$ 为局部的 Reynold 数, $Re_k = U_w \sqrt{k} / \nu$.

相应的热边界条件为

$$\begin{cases} \theta(\eta) = 1, & \eta = 0, \\ \theta(\eta) \rightarrow 0, \theta_p(\eta) \rightarrow 0, & \eta \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (19)$$

情况 2 变热通量 (VHF)

当热流量发生变化时,温度的边界条件将定义如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q_w(x, t)}{k}, & y = 0, \\ T \rightarrow T_\infty, T_p \rightarrow T_\infty, & y \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (20)$$

其中

$$q_w(x, t) = q_{w0} x^2 \left(\frac{b}{\nu}\right)^{3/2} (1 - at)^{-5/2}.$$

为了得到温度的相似解,在 VHF 时定义无量纲温度变量如下:

$$g(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad g_p(\eta) = \frac{T_p - T_\infty}{T_w - T_\infty},$$

其中

$$T = T_\infty + \frac{q_{w0}}{k} \left[\frac{bx^2}{\nu(1 - at)^2} \right] g(\eta).$$

将上述关系式代入方程(13)和(14),可以得到下面形式的无量纲方程组:

$$\begin{aligned} g''(\eta) + Pr[f(\eta)g'(\eta) - 2f'(\eta)g(\eta)] + \frac{N}{\rho} c_1 Pr[g_p(\eta) - g(\eta)] + \\ Pr\delta g(\eta) + \frac{N}{\rho} \beta Pr Ec [F(\eta) - f'(\eta)]^2 - \frac{\alpha}{2} Pr [4g(\eta) + \eta g'(\eta)] + \\ Pr Ec [f''(\eta)]^2 = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$G(\eta)g'_p(\eta) + 2F(\eta)g_p(\eta) + \frac{\alpha}{2}[4g_p(\eta) + \eta g'_p(\eta)] + c_1\gamma[g_p(\eta) - g(\eta)] = 0, \quad (22)$$

相应的边界条件变为

$$\begin{cases} g'(\eta) = -1, & \eta = 0, \\ g(\eta) = 0, g_p(\eta) = 0, & \eta \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (23)$$

与本问题有关的物理量有表面摩擦因数 C_f 和局部 Nusselt 数 Nu_x , 定义如下:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_w^2}, \quad Nu_x = \frac{xq_w}{k(T_w - T_\infty)}, \quad (24)$$

其中,表面摩擦力 τ_w 和流过伸展面的热流量 q_w 分别如下给出:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}, \quad q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}. \quad (25)$$

利用无量纲变量,得到

$$C_f Re_x^{1/2} = f''(0), \frac{Nu_x}{Re_x^{1/2}} = -\theta'(0) \text{ (VWT)}, \frac{Nu_x}{Re_x^{1/2}} = \frac{1}{g(0)} \text{ (VHF)}.$$

3 数值解

方程(8)、(11)连同边界条件(12),形成了高度非线性的常微分方程组.为了数值地求解这些方程,借助 Maple 软件,采用最有效的数值计算方法:Runge-Kutta-Fehlberg-45 格式进行求解.在这种方法中,最重要的是为 $\eta \rightarrow \infty$ 选择一个合适的有限值(本文选择 $\eta = 11$).耦合的边值问题(8)~(11),及 VWT 边界条件下的方程(17)、(18),或者 VHF 边界条件下的方程(21)、(22),均采用 RKF45 方法求解.在极端条件下 ($\alpha = \beta = M = N = Ec = 0.0$),将本数值方法所得到的局部 Nusselt 数,与 Chen^[5]和 Ishak 等^[9]得到的结果进行比较,来验证本数值方法的精度.因此,从表 1 可以看出,本文的数值解与早先的报道是完全一致.

表 1 当 $\beta = \alpha = M = Ec = f_0 = \delta = 0$, Pr 取不同值时,局部 Nusselt 数 $-\theta'(0)$ 的比较

Table 1 Comparison of local Nusselt number $-\theta'(0)$ for several values of Pr with $\beta = \alpha = M = Ec = f_0 = \delta = 0$

Pr	$-\theta'(0)$		
	Chen ^[5]	Ishak <i>et al.</i> ^[10]	present study
0.72	1.088 5	-	1.088 5
1.0	1.333 3	1.333 3	1.333 3
3.0	2.509 7	2.509 7	2.509 7
10.0	4.796 8	4.796 9	4.796 8

4 结果与讨论

研究粘性耗散和不均匀热源/汇的含尘流体,在伸展面上作磁流体边界层流动及其热交换.通过相似变换,将与时间有关的非线性边界层控制方程组,转变为非线性常微分方程组.利用数值解法对变换后的高度非线性常微分方程组进行求解.就内部有放热/吸热时,用图表表示出温度的分布,即 VWT 时的 $\theta(\eta)$, $\theta_p(\eta)$ 和 VHF 时的 $g(\eta)$, $g_p(\eta)$.为了从物理角度分析问题,对以下参数的不同数值:磁场参数 M 、固相(微粒)的数量密度 N 、局部流-固相互作用参数 β 、 Pr 、 Ec 、热源/汇参数 δ 以及不稳定参数 α 进行数值计算.就有内部产热/吸热时,将本文得到的热交换特性,与 Dulal 等^[13]和 Vajravelu 等^[12]得到的结果进行比较(见表 2).从表 1 和表 2 可以看出,近似结果完全一致,由此也证实了本方法的精度.

表 2 当 $\beta = \alpha = M = f_0 = 0$, $\delta = -1$ 时,壁面热交换特性 ($\theta'(0)$) 的比较

Table 2 Comparison of heat transfer characteristics at the wall $\theta'(0)$ for $\beta = \alpha = M = f_0 = 0$, $\delta = -1$

Pr	$\theta'(0)$					
	Dulal <i>et al.</i> ^[14]		Vajravelu <i>et al.</i> ^[12]		present result	
	$Ec = 0.0$	$Ec = 0.02$	$Ec = 0.0$	$Ec = 0.02$	$Ec = 0.0$	$Ec = 0.02$
1	-1.710 937	-1.705 156	-1.710 937	-1.705 156	-1.710 936	-1.705 154
2	-2.485 999	-2.476 278	-2.486 000	-2.476 280	-2.485 998	-2.476 278
3	-3.082 174	-3.069 188	-3.082 179	-3.069 193	-3.082 178	-3.069 192
4	-3.585 191	-3.569 339	-3.585 194	-3.569 342	-3.585 193	-3.569 341
5	-4.028 530	-4.010 089	-4.028 535	-4.010 094	-4.028 536	-4.010 095

图 1 就吸入参数不变时,对不同的磁场参数 M ,给出了液相和固相的速度分布曲线。由图 1 清楚地看出,液相和固相水平方向的速度都随着 η 和磁场参数 M 的增加而减小。进一步还可以看到,动量边界层厚度随着 M 的增加而减小,并导致壁面处速度梯度绝对值的增加。图 2 给出了不稳定参数 α 对液相和固相速度(作为 η 的函数)分布的影响,值得注意的是,随着不稳定参数的增加速度都在减小。

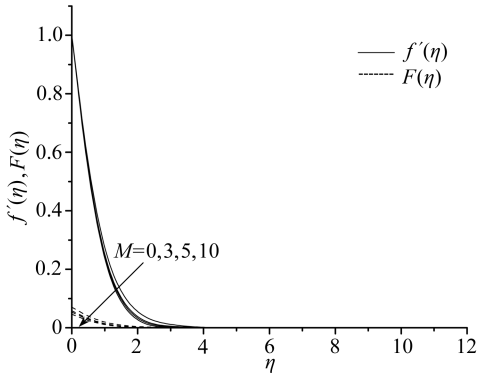


图 1 磁场参数 M 对速度分布的影响

Fig. 1 Effect of magnetic parameter M on velocity profiles

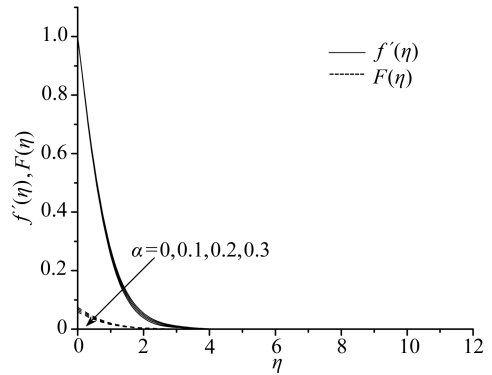


图 2 不稳定参数 α 对速度分布的影响

Fig. 2 Effect of variable unsteadiness parameter α on velocity profiles

图 3 绘出了局部的流-固相互作用参数 β 取不同数值时的速度分布曲线。可以发现,当 β 增加时,液相(流体)的速度 $f'(\eta)$ 在减小,而固相(微粒)的速度 $F(\eta)$ 反而在增加。当 β 取值更大时,固相(微粒)的弛豫时间在减少,而那时候液相和固相的速度将相同。

图 4(a)和图 4(b)分别就 VWT 和 VHF 时,绘出了不同不稳定参数 α 所对应的温度分布曲线。图 4 可以看出,随着不稳定参数 α 的增大,温度分布曲线平稳地减小。证明了这样一个重要事实:不稳定参数 α 值越大,致冷的速率越快,然而达到稳定流动的时间越长。

图 5(a)和图 5(b)分别就 VWT 和 VHF 时,画出了不同的流-固相互作用参数 β 所对应的温度分布曲线。从图 5 可以看出,随着流-固相互作用参数 β 的增大,液相-固相的温度分布都在减小。

图 6(a)和图 6(b)分别就 VWT 和 VHF 时,给出了 Pr 值对温度分布曲线的影响。由图 6 可见,对所有的 Pr 值,边界层内的温度分布都在不断地减小。与周知的事实是一致的,对大数值的 Pr 值,热量边界层厚度会大幅度地减小,也就是微弱的热扩散。进而表明,Prandtl 数越高,致冷的速率越快。

图 7(a)和图 7(b)分别就 VWT 和 VHF 时,绘出了不同的 Ec 值所对应的温度分布曲线。图 7 的分析显示,无论是 VWT 还是 VHF, Ec 值的增加使得流动区域中的温度分布在增加。这

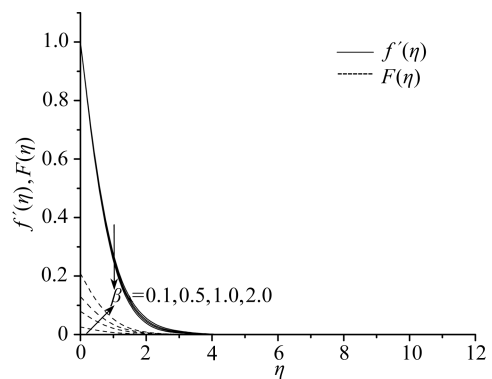


图 3 局部流-固相互作用参数 β 对速度分布的影响

Fig. 3 Effect of local fluid interaction parameter β on velocity profiles

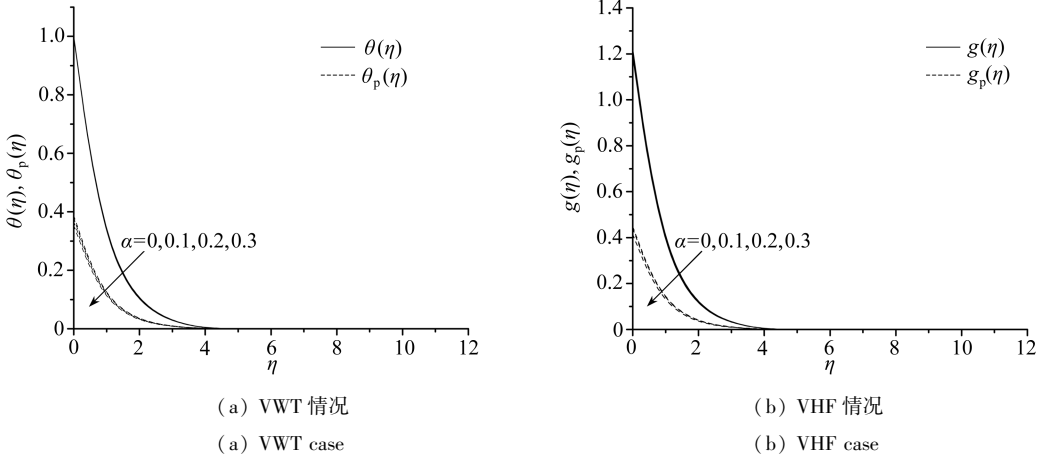


图 4 当 $Pr = 0.72$, $Ec = 2.0$, $N = 0.5$, $\delta = 0.1$, $f_0 = 2.0$, $\beta = 0.4$, $E = 2.0$ 时, 不稳定参数 α 对温度分布的影响

Fig. 4 Effect of unsteadiness parameter α on temperature distributions with $Pr = 0.72$, $Ec = 2.0$, $N = 0.5$, $\delta = 0.1$, $f_0 = 2.0$, $\beta = 0.4$, $E = 2.0$

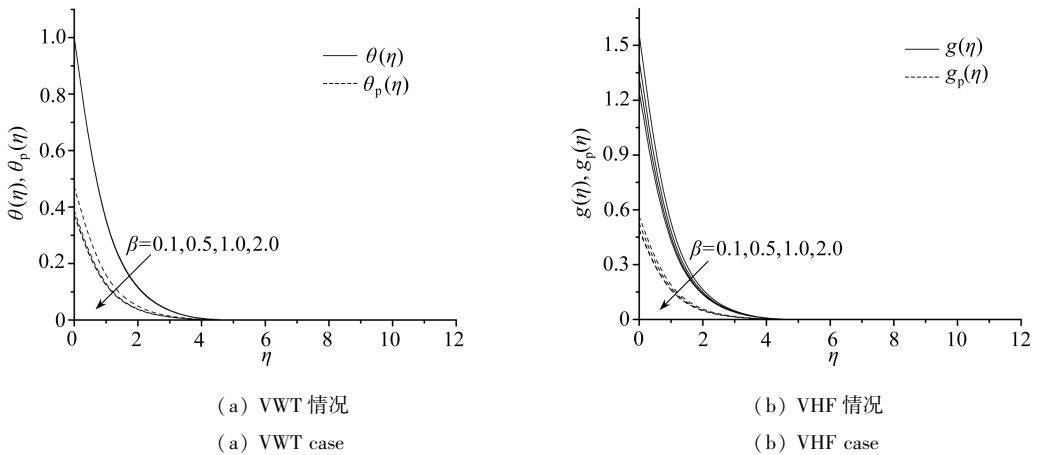


图 5 当 $Pr = 0.72$, $Ec = 2.0$, $N = 0.5$, $\delta = 0.1$, $f_0 = 2.0$, $\alpha = 0.2$, $E = 2.0$ 时, 局部流-固相互作用参数 β 对温度分布的影响

Fig. 5 Effect of local fluid interaction parameter β on temperature distributions with $Pr = 0.72$, $Ec = 2.0$, $N = 0.5$, $\delta = 0.1$, $f_0 = 2.0$, $\alpha = 0.2$, $E = 2.0$

是由于摩擦发热, 热能被储存到液体之中, 还清楚地表明, 吸入参数 V_w 和递增的 Ec 值的组合影响, 导致温度分布显著下降。

图 8(a) 和图 8(b) 分别在 VWT 和 VHF 边界条件下, 当固相(微粒)的数量密度 N 取不同数值时, 给出无量纲温度随 η 的变化曲线。图 8 表明, 液相和固相温度分布曲线随着数量密度的增大而减小。

图 9(a) 和图 9(b) 分别就 VWT 和 VHF 时, 给出了不同的热源/汇参数 δ 所对应的边界层内温度的分布。可以发现, 温度分布随着产热参数的增加而增加, 然而, 如果是吸热, 情况刚好相反。

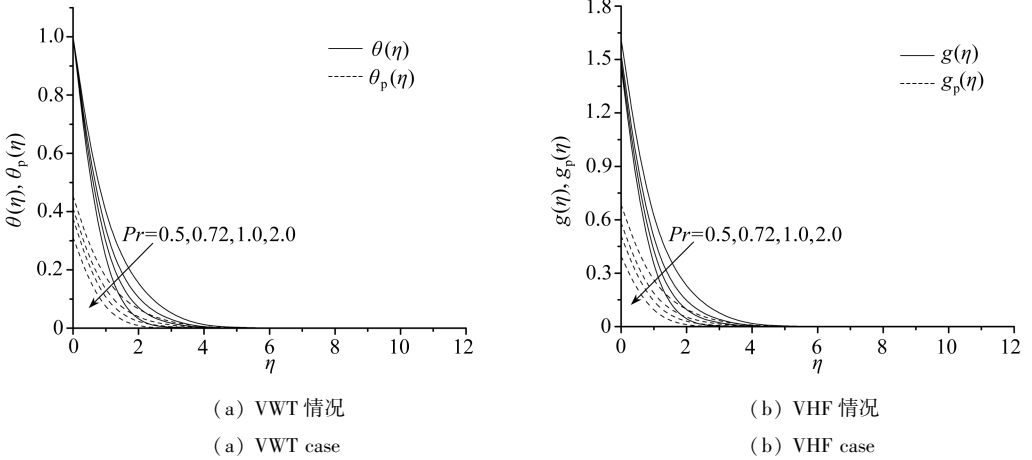


图6 当 $Ec = 2.0$, $N = 0.5$, $\alpha = 0.2$, $\delta = 0.1$, $f_0 = 2.0$, $\beta = 0.4$, $E = 2.0$ 时, Pr 值对温度分布的影响

Fig. 6 Effect of Prandtl number Pr on temperature distributions with $Ec = 2.0$, $N = 0.5$, $\alpha = 0.2$, $\delta = 0.1$, $f_0 = 2.0$, $\beta = 0.4$, $E = 2.0$

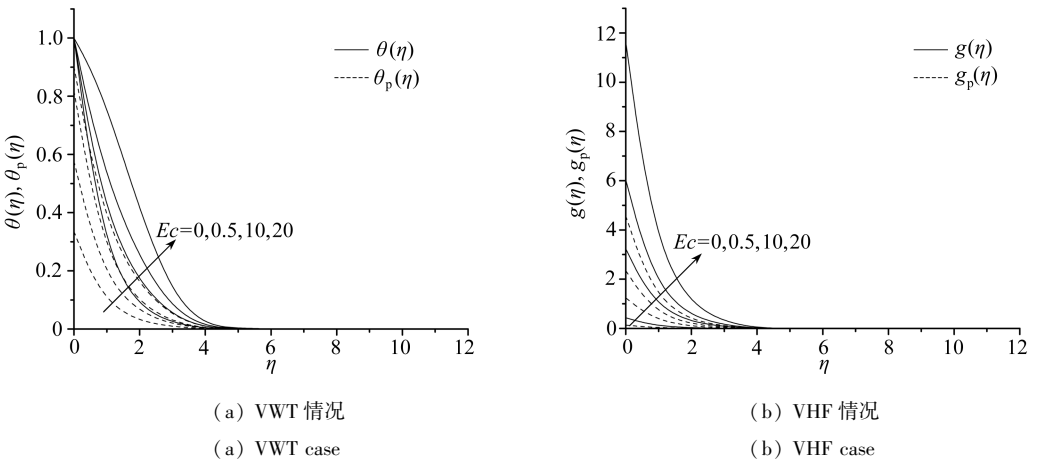


图7 当 $Pr = 0.72$, $N = 0.5$, $\alpha = 0.2$, $\delta = 0.1$, $f_0 = 2.0$, $\beta = 0.4$, $E = 2.0$ 时, Ec 值对温度分布的影响

Fig. 7 Effect of Eckert number Ec on temperature distributions with $Pr = 0.72$, $N = 0.5$, $\alpha = 0.2$, $\delta = 0.1$, $f_0 = 2.0$, $\beta = 0.4$, $E = 2.0$

表3 当 $Pr = 1.0$, $Ec = 0.1$, $\delta = -1$, $\beta = 0.4$, $f_0 = 2$ 时, 壁面处的表面摩擦因数和热交换系数

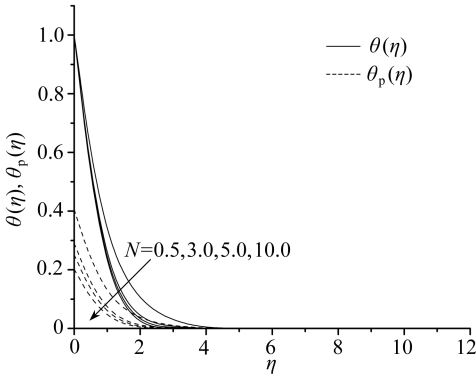
Table 3 Results of skin friction coefficient and heat transfer characteristics at the wall for

$Pr = 1.0$, $Ec = 0.1$, $\delta = -1$, $\beta = 0.4$, $f_0 = 2$

M	α	$f''(0)$	$-\theta'(0)$	$1/g(0)$
0.0	0.1	-2.700 252	2.891 061	2.510 319
	0.2	-2.743 656	2.927 758	2.543 303
	0.3	-2.786 456	2.964 381	2.576 135
0.5	0.1	-2.842 553	2.879 824	2.498 960
	0.2	-2.883 168	2.916 705	2.531 699
	0.3	-2.923 237	2.953 541	2.564 333

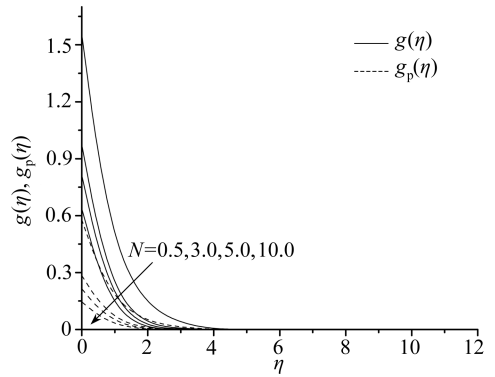
续表 3

M	α	$f''(0)$	$-\theta'(0)$	$1/g(0)$
1.0	0.1	-2.974 439	2.869 388	2.488 059
	0.2	-3.012 761	2.906 439	2.520 608
	0.3	-3.050 583	2.943 466	2.553 086
2.0	0.1	-3.214 448	2.850 395	2.467 484
	0.2	-3.249 187	2.887 750	2.499 753
	0.3	-3.283 494	2.925 110	2.531 999



(a) VWT 情况

(a) VWT case

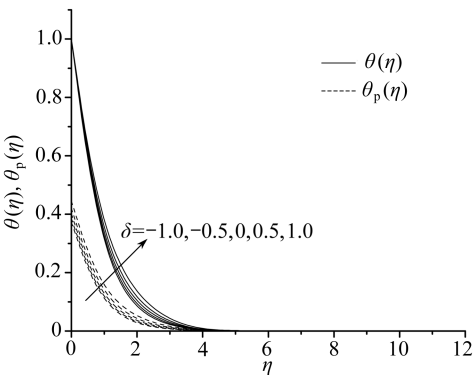


(b) VHF 情况

(b) VHF case

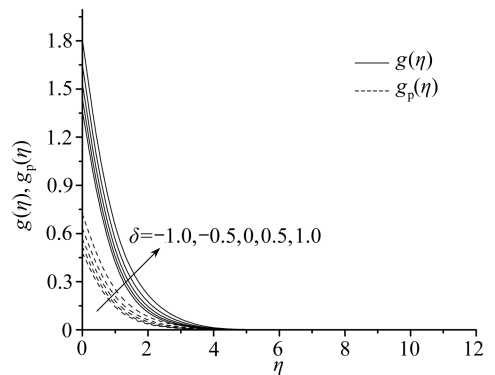
图 8 当 $Pr = 0.72$, $Ec = 2.0$, $\alpha = 0.2$, $\delta = 0.1$, $f_0 = 2.0$, $\beta = 0.4$, $E = 2.0$ 时, 数量密度 N 对温度分布曲线的影响

Fig. 8 Effect of number density N on temperature distributions with $Pr = 0.72$, $Ec = 2.0$, $\alpha = 0.2$, $\delta = 0.1$, $f_0 = 2.0$, $\beta = 0.4$, $E = 2.0$



(a) VWT 情况

(a) VWT case



(b) VHF 情况

(b) VHF case

图 9 当 $Pr = 0.72$, $Ec = 2.0$, $\alpha = 0.2$, $N = 0.5$, $f_0 = 2.0$, $\beta = 0.4$, $E = 2.0$ 时, 热源/汇参数 δ 对温度分布曲线的影响

Fig. 9 Effect of source sink parameter δ on temperature distributions with $Pr = 0.72$, $Ec = 2.0$, $\alpha = 0.2$, $N = 0.5$, $f_0 = 2.0$, $\beta = 0.4$, $E = 2.0$

表 3 给出了所有物理参数对表面摩擦因数 $f''(0)$, 壁面温度梯度 $\theta'(0)$ 以及温度函数 $1/g(0)$ 影响的分析. 值得注意的是, 由于是内部吸热 ($\delta = -1 < 0$), 磁场参数的影响使得表面摩擦因数下降. 表 3 还可以看出, 当热交换率随不稳定参数 α 增大时, 壁面梯度 $f''(0)$ 随着不稳定参数 α 的增大而减小. 进一步可以看到, 壁面梯度随着磁场参数的增大而减小, 热交换系数比亦如此.

图 10 和图 11 分别就 β 和 α 取不同数值时, 画出表面摩擦因数 $f''(0)$ 随着 M 的变化曲线. 图 10 和图 11 显示, 随着磁场参数的增大, 表面摩擦因数在减小. 进一步观察到, 局部流-固相互作用参数 β 和不稳定参数 α 增大时, 表面摩擦因数 $f''(0)$ 都在减小.

图 12 就不同的 Pr 值, 绘出了局部 Nusslet 数随磁场参数 M 的变化. 从图 12 可以看出, 热交换率随磁场参数的增大而增大. 图 12 还显示, 对于所有的磁场参数和 Pr 值, $\theta'(0)$ 始终是负的, $g(0)$ 始终是正的. 进一步可以发现, 热交换率随着 Pr 值的增大而增大, 也可以在表 3 中清楚地看到.

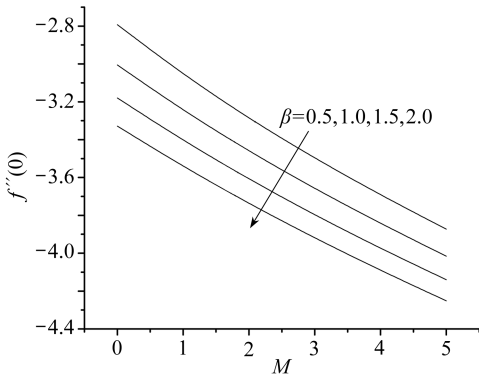


图 10 β 值的变化对表面摩擦因数的影响

Fig. 10 Skin friction coefficient for various values of β

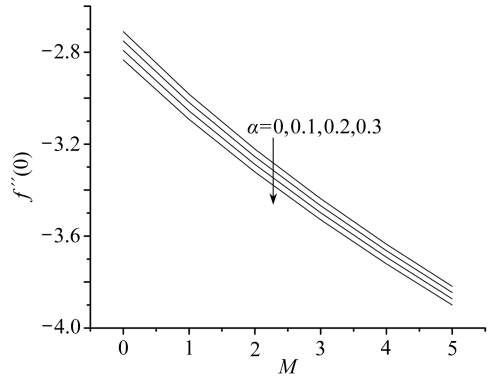
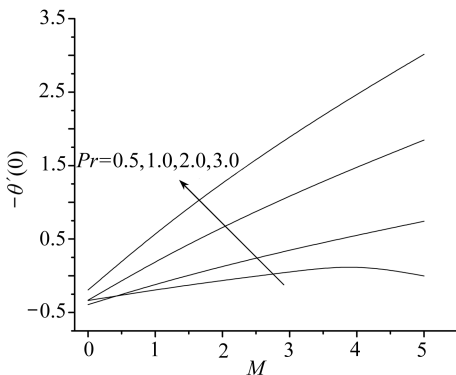


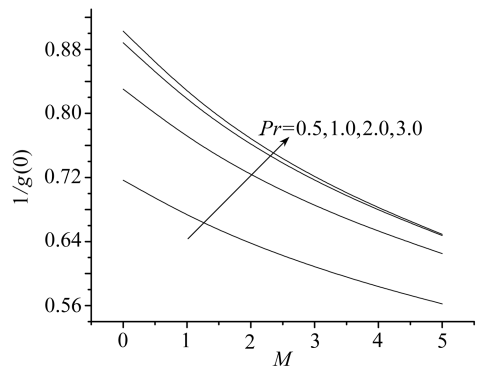
图 11 α 值的变化对表面摩擦因数的影响

Fig. 11 Skin friction coefficient for various values of α



(a) VWT 情况

(a) VWT case



(b) VHF 情况

(b) VHF case

图 12 Prandtl 数 Pr 的变化对局部 Nusslet 数的影响

Fig. 12 Local Nusselt number for different values of Prandtl number Pr

表4 VWT时的壁面温度梯度 $\theta'(0)$ 值和 VHF时的壁面温度 $g(0)$ 值Table 4 Values of wall temperature gradient $\theta'(0)$ (for VWT case) and wall temperature $g(0)$ (for VHF case)

α	β	N	Pr	Ec	δ	VWT case		VHF case	
						$\theta'(0)$	$\theta_p(0)$	$g(0)$	$g_p(0)$
0.0	0.1	0.2	0.72	2.0	0.5	-0.364 904	0.357 540	1.276 119	0.433 473
						-0.386 949	0.366 779	1.262 878	0.441 483
						-0.408 099	0.374 163	1.250 384	0.447 310
	0.0	0.2	0.72	2.0	0.5	-0.600 051	0.614 374	1.175 804	0.704 931
		0.2				-0.549 913	0.414 201	1.191 115	0.476 944
		0.4				-0.454 623	0.381 732	1.230 778	0.450 770
	0.1	0.5	0.72	2.0	0.5	-0.408 099	0.374 163	1.250 384	0.447 310
		1.0				-0.724 629	0.341 228	1.102 440	0.368 515
		2.0				-1.221 764	0.299 354	0.931 253	0.283 348
	0.1	0.2	0.50	2.0	0.5	-0.384 453	0.420 851	1.348 171	0.543 155
			0.72			-0.408 099	0.374 163	1.250 384	0.447 310
			1.00			-0.408 180	0.335 845	1.192 329	0.382 522
	0.1	0.2	0.72	0.0	0.5	-2.363 966	0.292 138	0.423 017	0.123 579
				1.0		-1.386 033	0.333 150	0.836 701	0.285 444
				2.0		-0.408 099	0.374 163	1.250 384	0.447 310
	0.1	0.2	0.72	2.0	-0.5	-0.595 325	0.356 728	1.161 414	0.401 928
					0.0	-0.440 969	0.370 988	1.234 006	0.438 835
					0.5	-0.268 249	0.388 261	1.324 027	0.486 078

5 结 论

在有不均匀热源/汇时,完成了含尘流体在不稳定伸展面上,作边界层流动及其热交换问题的分析研究.在能量方程中考虑了粘性耗散项,流动的基本控制方程为高度非线性的偏微分方程组,通过相似变换将这组方程变换为一组非线性的常微分方程组.应用 Maple 软件的 RKF-45 格式,对耦合的常微分方程组进行数值求解.图 1~图 12 表示了磁场参数、局部流-固相互作用参数、含尘微粒的数量密度、 Pr 值、 Ec 值、热源/汇参数以及不稳定参数对边界层流动动力学的影响.表 4 给出了热交换的特性值,即 VWT 时的壁面温度梯度函数 $\theta'(0)$, $\theta_p(0)$, 以及 VHF 时的壁面温度函数 $g(0)$, $g_p(0)$. 本研究的重要结论汇总如下:

- 1) 无论是流体速度还是微粒速度,当磁场参数和不稳定参数增大时,动量边界层厚度在减小;
- 2) 液相速度随着流-固相互作用参数的增加而减小;固相速度随着 β 值的增加而增加;
- 3) 不论是 VWT 或是 VHF,温度随着不稳定参数和流-固相互作用参数的增大而减小;
- 4) Pr 数的增大使温度分布和热交换率减小;
- 5) 温度分布随着数量密度的增加而减小,然而,它随着 Ec 值和热源/汇参数的增大而增大;提高 Ec 值,热流速度更快;
- 6) 壁面梯度为负值,且随着不稳定参数和磁场参数的增加而减小;
- 7) 不论是 VWT 还是 VHF,局部 Nusselt 数随着不稳定参数的增大而增大,但是当磁场参数增加时,情况刚好相反.

致谢 感谢新德里 DST(科技部)主要研究课题(SR/S4/MS:470/07,25-08-2008)对该项目的财政支持.同时也衷心感谢审稿人对本文所提出的宝贵意见.

参考文献(References):

- [1] Sakiadis B C. Boundary layer behavior on continuous solid surface— I : boundary layer equations for two dimensional and axisymmetric flow[J]. *AIChE Journal*, 1961, **7**(1): 26-28.
- [2] Sakiadis B C. Boundary layer behavior on continuous solid surfaces— II : boundary layer behavior on continuous flat surface[J]. *AIChE Journal*, 1961, **7**(1): 221-225.
- [3] Crane L J. Flow past a stretching plate[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1970, **21**(4): 645-647.
- [4] Grubka L J, Bobba K M. Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface with variable temperature[J]. *Journal of Heat Transfer*, 1985, **107**(1): 248-250.
- [5] Chen C H. Laminar mixed convection adjacent to vertical, continuously stretching sheets[J]. *Heat and Mass Transfer*, 1998, **33**(5/6): 471-476.
- [6] Elbashaeshy E M A, Bazid M A A. Heat transfer over an unsteady stretching surface [J]. *Heat and Mass Transfer*, 2004, **41**(1): 1-4.
- [7] Sharidan S, Mahmood T, Pop I. Similarity solutions for the unsteady boundary layer flow and heat transfer due to a stretching sheet[J]. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2006, **11**(3): 647-654.
- [8] Tsai R, Huang K H, Huang J S. Flow and heat transfer over an unsteady stretching surface with a non-uniform heat source [J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2008, **35**(10): 1340-1343.
- [9] Ishak A, Nazar R, Pop I. Hydromagnetic flow and heat transfer adjacent to a stretching vertical sheet[J]. *Heat and Mass Transfer*, 2008, **44**(8): 921-927.
- [10] Aziz A. A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, **14**(4): 1064-1068.
- [11] Vajravelu K, Roper T. Flow and heat transfer in a second grade fluid over a stretching sheet [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1999, **34**(6): 1031-1036.
- [12] Chen C H. Combined heat and mass transfer in MHD free convection from a vertical surface with ohmic heating and viscous dissipation[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2004, **42**(7): 699-713.
- [13] Dulal Pal, Hiremath P S. Computational modelling of heat transfer over an unsteady stretching surface embedded in a porous medium[J]. *Meccanica*, 2010, **45**(3): 415-424.
- [14] Vajravelu K, Hadjinicolaou A. Heat transfer in a viscous fluid over a stretching sheet with viscous dissipation and internal heat generation [J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 1993, **20**(3): 417-430.
- [15] Veena P H, Subhash Abel M, Rajagopal K, Pravin V K. Heat transfer in a visco-elastic fluid past a stretching sheet with viscous dissipation and internal heat generation[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 2006, **57**(3): 447-463.
- [16] Saffman P G. On the stability of laminar flow of a dusty gas[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1962, **13**(1): 120-128.
- [17] Datta N, Mishra S K. Boundary layer flow of a dusty fluid over a semi-infinite flat plate[J].

- Acta Mechanica*, 1982, **42**(1/2): 71-83.
- [18] Agranat V M. Effect of pressure gradient of friction and heat transfer in a dusty boundary layer[J]. *Fluid Dynamics*, 1988, **23**(5): 729-732.
- [19] Vajravelu K, Nayfeh J. Hydromagnetic flow of a dusty fluid over a stretching sheet[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1992, **27**(6): 937-945.
- [20] XIE Ming-liang, LIN Jian-zhong, XING Fu-tang. On the hydrodynamic stability of a particle-laden flow in growing flat plate boundary layer[J]. *Journal of Zhejiang University, Science A*, 2007, **8**(2): 275-284.
- [21] Palani G, Ganesan P. Heat transfer effects on dusty gas flow past a semi-infinite inclined plate[J]. *Forsch Ingenieurwes*, 2007, **71**(3/4): 223-230.
- [22] Gireesha B J, Ramesh G K, Subhas Abel M, Bagewadi C S. Boundary layer flow and heat transfer of a dusty fluid flow over a stretching sheet with non-uniform heat source/sink[J]. *International Journal of Multiphase Flow*, 2011, **37**(8): 977-982.
- [23] Schlichting H. *Boundary Layer Theory*[M]. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [24] Shercliff J A. *A Text Book of Magneto-Hydromagnetics*[M]. London: Pergamon Press, 1965.

Effect of Viscous Dissipation and Heat Source on Flow and Heat Transfer of a Dusty Fluid Over an Unsteady Stretching Sheet

B. J. Gireesha, G. S. Roopa, C. S. Bagewadi

(Department of Studies and Research in Mathematics, Kuvempu University, Shankaraghatta-577 451, Shimoga, Karnataka, India)

Abstract: The problem of hydrodynamic boundary layer flow and heat transfer of a dusty fluid over an unsteady stretching surface was investigated. The study considered the effects of frictional heating (viscous dissipation) and internal heat generation or absorption. The basic equations governing the flow and heat transfer were reduced to a set of non-linear ordinary differential equations by applying suitable similarity transformations. The transformed equations were solved numerically by Runge-Kutta-Fehlberg-45 order method. An analysis was carried out for two different cases of heating processes, namely Variable Wall Temperature (VWT) and Variable Heat Flux (VHF). The effects of various physical parameters such as magnetic parameter, fluid-particle interaction parameter, unsteady parameter, Prandtl number, Eckert number, number density of dust particles and heat source/sink parameter on velocity and temperature profiles were shown in several plots and the effect of wall temperature gradient function and wall temperature function were tabulated and discussed.

Key words: heat transfer; boundary layer flow; stretching surface; dusty fluid; viscous dissipation; non-uniform heat source; numerical solution