文章编号:1000-0887(2012)07-0896-11

关于约束极小化问题的一个新的简单精确罚函数*

郑芳英[1,2], 张连生[2]

(1. 浙江理工大学 数学科学系,杭州 310018;
2. 上海大学 数学系, 上海 200444)

摘要: 针对等式及不等式约束极小化问题,通过对原问题添加一个变量,给出一个新的简单精确罚函数,即在该精确罚函数表达式中,不含有目标函数及约束函数的梯度. 在满足某些约束品性的条件下,可以证明:当罚参数充分大时,所给出的罚问题的局部极小点是原问题的局部极小点.

关 键 词: 非线性规划; 约束极小化问题; 局部解; 精确罚函数

中图分类号: O221.2 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.07.009

引 言

我们知道,在求解约束极小化问题的诸多方法中,罚函数方法是一种重要的且有效的工具. 但是,对于传统的罚函数方法存在一些不足. 在传统的罚函数中,若所给的罚函数是光滑精确的,则它一定不是简单的(见文献[1-4]);若罚函数是简单光滑的,则一定是非精确的(见文献[5-11]);若所给的罚函数是简单光滑的,则一定是非精确的(见文献[12-13]). 这里“简单”是指罚函数中只包含原问题的目标函数和约束函数,而不包含其梯度的信息.

最近,在文献[14]中,针对如下带箱子的等式约束极小化问题给出一个新的精确罚函数:

$$(\mathrm{P})\ L\text{-}\min_{x\in S} f(x),\ S=\{x\in[u,v]:\ F_j(x)=0,\ j\in E\},$$

其中, $[u,v]$ 为 R^n 上的具有非空内部的箱子集,即 $[u,v]=\{x\in R^n:\ u\leqslant x\leqslant v\}$,且 $(\{-\infty\}\cup\mathbf{R})^n\leqslant u<v\leqslant(\{+\infty\}\cup\mathbf{R})^n$. $f:\ D\to\mathbf{R}$ 及 $F_j:\ D\to\mathbf{R}$, $j\in E$ 在含 $[u,v]$ 的开集 D 上都是连续可微的, E 表示等式约束指标集,“L-min” 表示局部极小化过程,“$L(P)$” 表示点 x 是问题(P)的局部极小点. 固定 $w_j\in\mathbf{R}$, $j\in E$, 我们考虑以下等价问题:

$$L\text{-}\min_{(x,\varepsilon)\in S_{\varepsilon_0}} f(x),\ S_{\varepsilon_0}=\{(x,\varepsilon)\in[u,v]\times[0,\bar{\varepsilon}]:\ F_j(x)=\varepsilon w_j,\ j\in E,\varepsilon=0\},$$

其中 $\bar{\varepsilon}>0$ 为固定常数.

令

* **收稿日期:** 2011-04-18; **修订日期:** 2012-03-22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571116;51075421)
作者简介: 郑芳英(1979—),女,浙江衢州人,博士生(联系人. E-mail:fangyingzh@163.com;fangyingzh@shu.edu.cn);
张连生(1937—),男,浙江舟山人,教授,博士生导师(E-mail:zhangls@staff.shu.edu.cn).

$$f_\sigma(x,\varepsilon)=\begin{cases} f(x), & \text{若 } \varepsilon=0,\ x\in S, \\ f(x)+\dfrac{1}{2\varepsilon}\dfrac{\Delta(x,\varepsilon)}{1-q\Delta(x,\varepsilon)}+\sigma\beta(\varepsilon), & \\ & \text{若 } 0<\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon},\ \Delta(x,\varepsilon)<q^{-1}, \\ +\infty, & \text{其他}(\varepsilon=0,\ x\notin S \text{ 或 } \varepsilon>0,\ \Delta(x,\varepsilon)\geqslant q^{-1}), \end{cases}$$

其中

$$\Delta(x,\varepsilon)=\|F(x)-\varepsilon w\|^2=\sum_{j\in E}(F_j(x)-\varepsilon w_j)^2$$

为约束违反度函数. $q>0$ 为固定数, $\sigma>0$ 为罚参数, $\beta:[0,\bar{\varepsilon}]\to[0,+\infty)$ 是在$(0,\bar{\varepsilon}]$ 上连续可微函数, 且满足: 对任意的 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$, 都有 $\beta(0)=0$, $\beta'(\varepsilon)\geqslant\beta_1>0$,例如 $\beta(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}$. 相应的罚问题($\mathrm{P}_\sigma$) 为

$$L\text{-}\min_{(x,\varepsilon)\in[u,v]\times[0,\bar{\varepsilon}]} f_\sigma(x,\varepsilon). \tag{1}$$

除了以上的假设外,并假设:

$$D'=\{x\in[u,v]:\ \|F(x)\|\leqslant q^{-1/2}+\bar{\varepsilon}\|w\|\}$$

为有界集以及在任意 $x\in D'$ 处,M-F 约束品性成立. 文献[14]给出了如下结论:当 $\sigma>0$ 充分大及 $\varepsilon>0$ 时,罚问题(P_σ) 不存在 K-K-T 点. 特别地,对于充分大的 $\sigma>0$,具有有限目标函数值的罚问题(P_σ) 的每个局部极小点$(x_\sigma,\varepsilon_\sigma)$ 具有$(x_\sigma,0)$ 形式,且 x_σ 为原问题(P)的一个局部极小点.

显然,$f_\sigma(x,\varepsilon)$ 是问题(P)的一个简单精确罚函数,并且除了$(x,0)$ 处不可微外,其他点处均可微. 此外,由于 $\sigma>0$ 充分大时,罚问题(1) 不存在 $\varepsilon>0$ 的 K-K-T 点,故此罚函数无法利用可微的算法实现计算. 本文将给出一个简单精确罚函数,此函数可以在 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$ 中进行计算.

另一方面,在文献[14]的研究基础上,文献[15]中提出了关于等式约束优化问题的另一个简单精确罚函数.

在文献[14-15]的研究基础上,本文旨在将文献[14-15]中的研究结果推广到一般约束优化问题中.

考虑如下一般约束极小化问题:

$$L\text{-}\min_{x\in S} f(x),\ S=\{x\in R^n:\ F_j(x)=0,\ j\in E,\ g_l(x)\leqslant 0,\ l\in I\}\neq\varnothing, \tag{2}$$

其中,f, F_j, $g_l\in C^1$, $j\in E$, $l\in I$,C^1 为可微连续函数集. E, I 分别为约束函数指标集和不等式约束函数指标集,令 $E=\{1,\cdots,m\}$, $I=\{1,\cdots,k\}$.

对于问题(2),我们定义以下指标集,参见文献[1]:

$$I_0(x)=\{l\in I:\ g_l(x)=0\},$$

$$I_+(x)=\{l\in I:\ g_l(x)\geqslant 0\},$$

$$I_-(x)=\{l\in I:\ g_l(x)<0\}.$$

称 M-F 约束品性在 $x\in R^n$ 处成立, 如果$\nabla F_j(x)$, $j\in E$ 线性无关, 而且存在向量 $\boldsymbol{p}\in R^n$ 满足:

$$\nabla g_l(x)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}<0,\qquad l\in I_0(x),$$

$$\nabla F_j(x)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}=0,\qquad j\in E.$$

称扩展的 M-F 约束品性在 $x\in R^n$ 处成立, 如果 $\nabla F_j(x)$, $j\in E$ 线性无关, 而且存在向量

$\boldsymbol{p} \in R^n$ 满足：

$$\nabla g_l(x)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p} < 0, \qquad l \in I_+(x),$$
$$\nabla F_j(x)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p} = 0, \qquad j \in E.$$

本文其他部分安排如下：第 1 节到第 3 节，针对等式约束优化问题、不等式约束优化问题以及一般约束优化问题，分别给出了一个新的简单精确罚函数。并且在一定的假设下，证明了罚问题的所有局部极小点具有 $(x,0)$ 的形式，其中 x 为原问题的一个局部极小点。第 4 节，针对本文给出了罚函数，我们做了两个数值算例，数值结果表明，我们所构造的罚函数是合理和可行的。最后，第 5 节，我们做了一些结论。

1 等式约束极小化问题的一个新的简单精确罚函数

考虑如下等式约束极小化问题：

$$L\text{-}\min_{x \in S} f(x),\ S = \{x \in R^n:\ F_j(x) = 0,\ j \in E\} \neq \varnothing. \tag{3}$$

其等价的问题为

$$L\text{-}\min_{(x,\varepsilon) \in S_{\varepsilon_0}} f(x),\ S_{\varepsilon_0} = \{(x,\varepsilon) \in R^n \times [0,\bar{\varepsilon}]:\ F_j(x) = \varepsilon^{\gamma} w_j,\ j \in E, \varepsilon = 0\},$$

其中 $\bar{\varepsilon} > 0$.

相应的罚函数 $f_\sigma(x,\varepsilon)$ 及罚问题 (P_σ) 如下：

$$f_\sigma(x,\varepsilon) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } \varepsilon = 0,\ x \in S, \\ f(x) + \varepsilon^{-\alpha}\Delta(x,\varepsilon) + \sigma\varepsilon^{\beta}, & \text{若 } 0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}, \\ +\infty, & \text{其他}(\varepsilon = 0, x \notin S). \end{cases}$$

令 $S_\varepsilon = \{(x,\varepsilon) \in R^n \times [0,\bar{\varepsilon}]:\ F_j(x) = \varepsilon^{\gamma} w_j,\ j \in E\}$，及约束违反度函数为

$$\Delta(x,\varepsilon) = \sum_{j \in E} (F_j(x) - \varepsilon^{\gamma} w_j)^2,$$

其中，$w_j \in \mathbf{R}_+$，$j \in E$，$\gamma > \alpha > 1$，$\gamma > \beta > 1$ 为固定数，$\sigma > 0$ 为罚参数。

$$(\mathrm{P}_\sigma)\ L\text{-}\min_{(x,\varepsilon) \in R^n \times [0,\bar{\varepsilon}]} f_\sigma(x,\varepsilon).$$

引理 1.1 如果 $(x^{(k)},\varepsilon_k) \in L(\mathrm{P}_{\sigma_k})$，并且其函数值 $f_{\sigma_k}(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 为有限值，$\bar{\varepsilon} \geqslant \varepsilon_k > 0$，则 $(x^{(k)},\varepsilon_k) \notin S_{\varepsilon_k}$.

证明 由函数值 $f_{\sigma_k}(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 为有限值，$\varepsilon_k > 0$，及 $f_{\sigma_k}(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 和约束函数 $-\varepsilon, \varepsilon - \bar{\varepsilon}$ 为连续函数则罚问题 (P_{σ_k}) 的内部非空，即 slater 约束品性在 $(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 处成立。因此，罚问题 (P_{σ_k}) 的局部极小点 $(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 也是罚问题 (P_{σ_k}) 的 K-K-T 点。所以有

$$\frac{\partial f_{\sigma_k}(x^{(k)},\varepsilon_k)}{\partial \varepsilon} = -\alpha\varepsilon_k^{-\alpha-1}\sum_{j \in E}(F_j(x^{(k)}) - \varepsilon_k^{\gamma} w_j)^2 -$$
$$2\gamma\varepsilon_k^{\gamma-\alpha-1}\sum_{j \in E}(F_j(x^{(k)}) - \varepsilon_k^{\gamma} w_j)w_j + \beta\sigma_k\varepsilon_k^{\beta-1} \leqslant 0,$$

假设 $(x^{(k)},\varepsilon_k) \in S_{\varepsilon_k}$，由上式有 $0 \geqslant \beta\sigma_k\varepsilon_k^{\beta-1} > 0$ 成立，显然是矛盾的。因此，$(x^{(k)},\varepsilon_k) \notin S_{\varepsilon_k}$.

定理 1.1 如果引理 1.1 的条件成立，并且 $\sigma_k \to +\infty$，$(x^{(k)},\varepsilon_k) \xrightarrow{k} (x^*,\varepsilon_*)$，M-F 约束品性在 x^* 处成立，则 $\varepsilon^* = 0$，$F_j(x^*) = 0$，$j \in E$. 即 $x^* \in S$.

证明 由引理 1.1，我们有 $(x^{(k)},\varepsilon_k) \notin S_{\varepsilon_k}$，并且 $(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 为罚问题 (P_{σ_k}) 的一个 K-K-T 点。罚问题 (P_{σ_k}) 的 Lagrange 函数为

$$L(x^{(k)},\varepsilon_k,y_k,z_k) = f_{\sigma_k}(x^{(k)},\varepsilon_k) + y_k(-\varepsilon_k) + z_k(\varepsilon_k - \bar{\varepsilon}).$$

我们有

$$\nabla_{(x,\varepsilon)} L(x^{(k)},\varepsilon_k,y_k,z_k)=0,$$
$$y_k \geqslant 0,\ z_k \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varepsilon_k \leqslant \bar{\varepsilon},$$
$$y_k(-\varepsilon_k)=0,\ z_k(\varepsilon_k-\bar{\varepsilon})=0.$$

上式蕴含着当 $\varepsilon_k>0$ 时,$y_k=0$, 且

$$\frac{\partial f_{\sigma_k}(x^{(k)},\varepsilon_k)}{\partial x_i}=\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}+2\varepsilon_k^{-\alpha}\sum_{j\in E}(F_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)\frac{\partial F_j(x^{(k)})}{\partial x_i}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial f_{\sigma_k}(x^{(k)},\varepsilon_k)}{\partial \varepsilon}=-2\gamma\varepsilon_k^{\gamma-\alpha-1}\sum_{j\in E}(F_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)w_j-$$
$$\alpha\varepsilon_k^{-\alpha-1}\sum_{j\in E}(F_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)^2+\beta\sigma_k\varepsilon_k^{\beta-1}\leqslant 0.$$

上式两边同乘以 $\varepsilon_k^{1-\beta}$, 可化为

$$-2\gamma\varepsilon_k^{\gamma-\alpha-\beta}\sum_{j\in E}(F_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)w_j-$$
$$\alpha\varepsilon_k^{-\alpha-\beta}\sum_{j\in E}(F_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)^2+\beta\sigma_k\leqslant 0. \tag{5}$$

令 $k\to+\infty$,若 $x^{(k)}\to x^*$, $\varepsilon_k\to\varepsilon_*>0$,则式(5)左边第1项和第2项都是有限值,而第3项 $\to+\infty$,显然矛盾.所以 $\varepsilon^*=0$.

另一方面,由 $\partial f_{\sigma_k}(x^{(k)},\varepsilon_k)/\partial x_i=0$, 可以得到:

$$\varepsilon_k^{\alpha}\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}+2\sum_{j\in E}(F_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)\frac{\partial F_j(x^{(k)})}{\partial x_i}=0. \tag{6}$$

在式(6)中,令 $k\to+\infty$,$x^{(k)}\to x^*$, $\varepsilon_k\to\varepsilon_*=0$, 有

$$\nabla\boldsymbol{F}(x^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(x^*)=0, \tag{7}$$

其中

$$\nabla\boldsymbol{F}(x^*)=\begin{pmatrix}\nabla F_1(x^*)^{\mathrm{T}}\\ \nabla F_2(x^*)^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \nabla F_m(x^*)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}.$$

由 M-F 约束品性在 x^* 处成立,知道 $\nabla\boldsymbol{F}(x^*)$ 为满秩矩阵,所以有 $\boldsymbol{F}(x^*)=\boldsymbol{0}$,即 $x^*\in S$.所以定理 1.1 成立.

定理 1.2　如果 $(x^{(k)},\varepsilon_k)\in L(\mathrm{P}_{\sigma_k})$,且函数值 $f_{\sigma_k}(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 为有限值,假设当 $\sigma_k\to+\infty$ 时,$(x^{(k)},\varepsilon_k)\to(x^*,\varepsilon_*)$, M-F 约束规范在 x^* 处成立,且 $\gamma>\alpha=\beta>1$,则存在某个数 $k_0>0$,当 $k\geqslant k_0$ 时,我们有 $\varepsilon_k=0$,$x^{(k)}$ 为问题(3)的局部极小点.

证明　假设定理 1.2 不成立,即存在 $\{(x^{(k)},\varepsilon_k)\}$ 的某个子列 $\{(x^{(n_k)},\varepsilon_{n_k})\}$ 使得 $(x^{(n_k)},\varepsilon_{n_k})\in L(\mathrm{P}_{\sigma_{n_k}})$,且函数值 $f_{\sigma_{n_k}}(x^{(n_k)},\varepsilon_{n_k})$ 为有限值及 $\varepsilon_{n_k}>0$.根据引理 1.1,我们有 $(x^{(n_k)},\varepsilon_{n_k})\notin S_{\varepsilon_{n_k}}$.为了书写方便,不失一般性,我们记 $(x^{(n_k)},\varepsilon_{n_k})$ 为 $(x^{(k)},\varepsilon_k)$.由 $f_{\sigma_k}(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 为有限值,点 $(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 的第 $n+1$ 个分量 $\varepsilon_k>0$,以及 $(x^{(k)},\varepsilon_k)\notin S_{\varepsilon_k}$, 我们有

$$\frac{\partial f_{\sigma_k}(x^{(k)},\varepsilon_k)}{\partial \varepsilon}=-2\gamma\varepsilon_k^{\gamma-\alpha-1}\sum_{j\in E}(F_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)w_j-$$

$$\alpha\varepsilon_k^{-\alpha-1}\Delta(x^{(k)},\varepsilon_k)+\beta\sigma_k\varepsilon_k^{\beta-1}\leqslant 0.$$

整理得：

$$\gamma\varepsilon_k^{-\alpha-1}\sum_{j\in E}[(F_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)^2-F_j^2(x^{(k)})+\varepsilon_k^{2\gamma}w_j^2]-\alpha\varepsilon_k^{-\alpha-1}\Delta(x^{(k)},\varepsilon_k)+\beta\sigma_k\varepsilon_k^{\beta-1}\leqslant 0.$$

因此

$$(\gamma-\alpha)\Delta(x^{(k)},\varepsilon_k)+\gamma\varepsilon_k^{2\gamma}\|w\|^2+\beta\varepsilon_k^{\beta+\alpha}\sigma_k\leqslant\gamma\sum_{j\in E}F_j^2(x^{(k)}).\tag{8}$$

令 $\alpha=\beta$，且式(8)两端同时除以 $\varepsilon_k^{2\alpha}$，可得

$$(\gamma-\alpha)\varepsilon_k^{-2\alpha}\Delta(x^{(k)},\varepsilon_k)+\gamma\varepsilon_k^{2(\gamma-\alpha)}\|w\|^2+\beta\sigma_k\leqslant\gamma\varepsilon_k^{-2\alpha}\sum_{j\in E}F_j^2(x^{(k)}).\tag{9}$$

由定理1.1，当 $k\to+\infty$，成立

$$\varepsilon_k\to\varepsilon^*=0,\ \Delta(x^{(k)},\varepsilon_k)\to\Delta(x^*,\varepsilon_*)=\Delta(x^*,0)=0.$$

由于 $\gamma>\alpha=\beta>1$，式(9)左端的第1项及第2项都是大于0的，而其第3项 $\to+\infty$，所以有 $\varepsilon_k^{-2\alpha}\sum_{j\in E}F_j^2(x^{(k)})\to+\infty$.

令 $y^{(k)}=\varepsilon_k^{-\alpha}\boldsymbol{F}(x^{(k)})$，$\boldsymbol{F}(x^{(k)})=(F_j(x^{(k)}),j\in E)$，且 $z^{(k)}=y^{(k)}/\|y^{(k)}\|$. 显然，$\|y^{(k)}\|\to+\infty$，$\|z^{(k)}\|=1$ 且 $\|z^{(k)}\|\to\|z^*\|=1$.

进一步，令

$$\mu_i^{(k)}=\frac{1}{\|y^{(k)}\|}\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}+\frac{2}{\|y^{(k)}\|}\varepsilon_k^{-\alpha}\sum_{j\in E}(F_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{r}w_j)\frac{\partial F_j(x^{(k)})}{\partial x_i},\qquad i=1,\cdots,n.\tag{10}$$

由式(4)，我们有 $\mu_i^{(k)}=0$，$i=1,2,\cdots,n$. 因此，当 $k\to+\infty$，由式(10)，我们得到

$$\nabla\boldsymbol{F}(x^*)^{\mathrm T}z^*=0.\tag{11}$$

根据定理1.2的假设，M-F约束品性在 x^* 处成立，因此，矩阵 $\nabla\boldsymbol{F}(x^*)$ 为满秩阵，由式(11)，有 $z^*=0$ 成立，这显然与 $\|z^*\|=1$ 矛盾. 这说明不存在这样的子列 $\{(x^{(n_k)},\varepsilon_{n_k})\}$. 故存在某个数 $k_0>0$，当 $k\geqslant k_0$ 时，$\varepsilon_k=0$. 另一方面，由于函数值 $f_{\sigma_k}(x^{(k)},\varepsilon_k)=f_{\sigma_k}(x^{(k)},0)$ 是有限值，根据罚函数 $f_{\sigma_k}(x,\varepsilon)$ 的定义，我们有 $x^{(k)}\in S$. 又由 $(x^{(k)},0)\in L(\mathrm P_{\sigma_k})$，则在 $R^n\times[0.\bar\varepsilon]$ 上，存在 $(x^{(k)},0)$ 的一个邻域 N_k，使得所有的点 $(x,0)\in N_k$ 及 $x\in S$，都有

$$f_{\sigma_k}(x^{(k)},0)=f(x^{(k)})\leqslant f_{\sigma_k}(x,0)=f(x),$$

即 $x^{(k)}$ 为问题(3)的一个局部极小点.

2 不等式约束优化问题的简单精确罚函数

现在，我们考虑以下不等式约束优化问题：

$$L\text{-}\min_{x\in S}f(x),\ S=\{x\in R^n:\ g_j(x)\leqslant 0,\ j\in I\}\neq\varnothing.\tag{12}$$

与其的等价的优化问题为

$$L\text{-}\min_{(x,\varepsilon)\in S_{\varepsilon_0}}f(x),\ S_{\varepsilon_0}=\{(x,\varepsilon)\in R^n\times[0,\bar\varepsilon]:\ g_j(x)\leqslant\varepsilon^{\gamma}w_j,\ j\in I,\ \varepsilon=0\}.$$

令 $S_\varepsilon=\{(x,\varepsilon)\in R^n\times[0,\bar\varepsilon]:\ g_j(x)\leqslant\varepsilon^{\gamma}w_j,\ j\in I\}$，

$$f_{\sigma}^{\dagger}(x,\varepsilon)=\begin{cases} f(x), & \text{若 } \varepsilon=0,\ x\in S, \\ f(x)+\varepsilon^{-\alpha}\sum_{j\in I}(\max(0,g_j(x)-\varepsilon^{\gamma}w_j))^2+\sigma\varepsilon^{\beta}, & \text{若 } \bar{\varepsilon}\geqslant\varepsilon>0, \\ +\infty, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中, $\gamma>\alpha>1,\gamma>\beta>1,w_j\in\mathbf{R}_+$, $j\in I$ 为固定数,$\sigma>0$ 为罚参数.

相应的罚问题 (P_{σ}) 为:

$$(\mathrm{P}_{\sigma}^{\dagger})\quad L\text{-}\min_{(x,\varepsilon)\in R^n\times[0,\bar{\varepsilon}]} f_{\sigma}(x,\varepsilon).$$

引理 2.1 如果 $(x^{(k)},\varepsilon_k)\in L(\mathrm{P}_{\sigma_k}^{\dagger})$,且 $f_{\sigma_k}^{\dagger}(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 为有限值,$\bar{\varepsilon}\geqslant\varepsilon_k>0$,则 $(x^{(k)},\varepsilon_k)\notin S_{\varepsilon_k}$.

证明 与引理 1.1 的证明类似.

定理 2.1 如果引理 2.1 的条件成立, $(x^{(k)},\varepsilon_k)\xrightarrow{k}(x^*,\varepsilon_*)$, 且增广 M-F 约束品性在 x^* 处成立,则 $\varepsilon_*=0$, $x^*\in S$.

证明 由引理 2.1, 我们有 $(x^{(k)},\varepsilon_k)\notin S_{\varepsilon_k}$, 且 $(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 为罚问题的 K-K-T 点. 罚问题 $(\mathrm{P}_{\sigma_k}^{\dagger})$ 的 Lagrange 函数 $L(x^{(k)},\varepsilon_k,y_k,z_k)$ 为

$$L(x^{(k)},\varepsilon_k,y_k,z_k)=f_{\sigma_k}^{\dagger}(x^{(k)},\varepsilon_k)+y_k(-\varepsilon_k)+z_k(\varepsilon_k-\bar{\varepsilon})$$

且

$$\nabla_{(x,\varepsilon)}L(x^{(k)},\varepsilon_k,y_k,z_k)=0,$$

$$y_k(-\varepsilon_k)=0,\ z_k(\varepsilon_k-\bar{\varepsilon})=0,$$

$$y_k\geqslant 0,\ z_k\geqslant 0.$$

由 $\varepsilon_k>0$, 有 $y_k=0$.

另一方面

$$\nabla_x f_{\sigma_k}^{\dagger}(x^{(k)},\varepsilon_k)= \nabla f(x^{(k)})+2\varepsilon_k^{-\alpha}\sum_{j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)}(g_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)\nabla g_j(x^{(k)})=0, \tag{13}$$

其中

$$I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)=\{j\in I:\ g_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j\geqslant 0\}.$$

$$\frac{\partial f_{\sigma_k}^{\dagger}(x^{(k)},\varepsilon_k)}{\partial\varepsilon}=-\alpha\varepsilon_k^{-\alpha-1}\sum_{j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)}(g_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)^2- 2\gamma\varepsilon_k^{\gamma-\alpha-1}\sum_{j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)}(g_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)w_j+\beta\sigma_k\varepsilon_k^{\beta-1}\leqslant 0. \tag{14}$$

由式(14),我们有

$$-\alpha\varepsilon_k^{-\alpha-\beta}\sum_{j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)}(g_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)^2- 2\gamma\varepsilon_k^{\gamma-\alpha-\beta}\sum_{j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)}(g_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)w_j+\beta\sigma_k\leqslant 0.$$

所以

$$\alpha\varepsilon_k^{-\alpha-\beta}\sum_{j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)}(g_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)^2+ 2\gamma\varepsilon_k^{\gamma-\alpha-\beta}\sum_{j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)}(g_j(x^{(k)})-\varepsilon_k^{\gamma}w_j)w_j\geqslant\beta\sigma_k. \tag{15}$$

如果令 $\sigma_k\to+\infty$,而且假设 $\varepsilon_k\to\varepsilon_*>0$ 为有限值,则由式(15)知,其左端为有限值,右端趋

于无穷,这是不可能的,所以 $\varepsilon_* = 0$.

另一方面,由式(13),我们有

$$\varepsilon_k^\alpha \nabla f(x^{(k)}) + 2\sum_{j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)} (g_j(x^{(k)}) - \varepsilon_k^\gamma w_j)\nabla g_j(x^{(k)}) = 0.$$

令 $k \to +\infty$, 得到

$$\sum_{j\in I_+(x^*,0)} g_j(x^*)\nabla g_j(x^*) = 0. \tag{16}$$

进一步地,由题设增广的 M-F 约束品性在 x^* 处成立,我们假设 $I_+(x^*,0)\setminus I_0(x^*,0)\neq\emptyset$,其中 $I_0(x^*,\varepsilon_*) = \{j\in I: g_j(x^*) - \varepsilon_*^\gamma w_j = 0\}$,则至少存在一个指标 $j\in I_+(x^*,0)\setminus I_0(x^*,0)$ 及向量 $\boldsymbol{p}\in R^n$,使得 $\nabla g_{j_0}(x^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p} < 0$. 由式(16),我们有

$$0 = \sum_{j\in I_+(x^*,0)} g_j(x^*)\nabla g_j(x^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p} = \sum_{j\in I_+(x^*,0)\setminus I_0(x^*,0)} g_j(x^*)\nabla g_j(x^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p} < 0,$$

显然,这是矛盾的,所以 $I_+(x^*,0)\setminus I_0(x^*,0)=\emptyset$,即 $I_+(x^*,0) = I_0(x^*,0)$. 这表明

$$g_j(x^*) = 0,\qquad \forall j\in I_+(x^*,0).$$

所以有 $g_j(x^*)\leqslant 0,\ \forall j\in I$,即 $x^*\in S$. 所以定理成立.

定理 2.2 如果 $(x^{(k)},\varepsilon_k)\in L(\mathrm{P}_{\sigma_k}^\dagger)$,且函数值 $f_{\sigma_k}^\dagger(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 为有限值,假设当 $\sigma_k\to+\infty$ 时,$(x^{(k)},\varepsilon_k)\xrightarrow{k}(x^*,\varepsilon_*)$,扩展的 M-F 约束规范在 x^* 处成立,则存在 $k_0>0$,当 $k\geqslant k_0$ 时,我们有 $\varepsilon_k = 0$ 及 $x^{(k)}$ 为问题(12)的局部极小点,其中 $\gamma>\alpha=\beta>1$.

证明 假设定理不成立,则存在 $\{(x^{(k)},\varepsilon_k)\}$ 的某个子列 $\{(x^{(n_k)},\varepsilon_{n_k})\}$ 使得 $(x^{(n_k)},\varepsilon_{n_k})$ 满足定理 2.2 的条件,但是 $\varepsilon_{n_k}>0$. 不失一般性,记 $(x^{(n_k)},\varepsilon_{n_k})$ 为 $(x^{(k)},\varepsilon_k)$. 根据引理 2.1,我们有 $(x^{(k)},\varepsilon_k)\notin S_{\varepsilon_k}$. 根据定理 2.1,我们有 $(x^{(k)},\varepsilon_k)\xrightarrow{k}(x^*,\varepsilon_*)$ 及 $\varepsilon_*=0$, $x^*\in S$.

重新整理不等式(15)且令 $\alpha=\beta$, 我们有

$$(\gamma-\alpha)\varepsilon_k^{-2\alpha}\sum_{j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)}(g_j(x^{(k)}) - \varepsilon_k^\gamma w_j)^2 + \gamma\varepsilon_k^{2(\gamma-\alpha)}\sum_{j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)}\omega_j^2 + \beta\sigma_k \leqslant$$
$$\gamma\varepsilon_k^{-2\alpha}\sum_{j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)} g_j^2(x^{(k)}). \tag{17}$$

令

$$y_j^{(k)} = \frac{g_j(x^{(k)})}{\varepsilon_k^\alpha},\qquad j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k),$$

$$y^{(k)} = (y_j^{(k)},\ j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)),\ z^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\|y^{(k)}\|},$$

则我们有 $\|z^{(k)}\| = 1$.

由式(17),当 $k\to+\infty$, $\sigma_k\to+\infty$ 时, $\|y^{(k)}\|\xrightarrow{k}+\infty$.

进一步地,由式(13),我们有

$$\frac{\nabla f(x^{(k)})}{\|y^{(k)}\|}\frac{2}{\|y^{(k)}\|}\sum_{j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)}\left(\frac{g_j(x^{(k)})}{\varepsilon_k^\alpha} - \varepsilon_k^{\gamma-\alpha}\omega_j\right)\nabla g_j(x^{(k)}) = 0.$$

也就是

$$\frac{\nabla f(x^{(k)})}{\|y^{(k)}\|} + 2\sum_{j\in I_+(x^{(k)},\varepsilon_k)}\left(z_j^{(k)} - \frac{\varepsilon_k^{\gamma-\alpha}}{\|y^{(k)}\|}\omega_j\right)\nabla g_j(x^{(k)}) = 0. \tag{18}$$

令 $k\to+\infty$, 由式(18)我们得到以下关系

$$\sum_{j\in I_+(x^*,0)} z_j \nabla g_j(x^*) = 0, \tag{19}$$

其中 $z_j^* \geqslant 0$ 且 $\sum_{j\in I_+(x^*,0)} z_j^* = 1$.

根据题设,增广的 M-F 约束品性在 x^* 处成立,即存在向量 $\boldsymbol{p} \in R^n$ 使得

$$\nabla g_j(x^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p} < 0, \qquad j \in I_+(x^*, 0).$$

在式(19)两端同乘以上述的向量 $\boldsymbol{p}$, 得到

$$0 = \sum_{j\in I_+(x^*,0)} z_j^* \nabla g_j(x^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p} < 0.$$

这是矛盾的,这表明假设的子列是不存在的. 所以,存在 $k_0 > 0$,当 $k \geqslant k_0$ 时,$\varepsilon_k = 0$. 此时,序列 $\{(x^{(k)},\varepsilon_k)\}$ 有以下两种可能情形:

(i) $\varepsilon_k = 0, \qquad x^{(k)} \in S$,

(ii) $\varepsilon_k = 0, \qquad x^{(k)} \notin S$,

情形(ii)不可能发生,由罚函数 $f_\sigma^\dagger(x,\varepsilon)$ 的定义,当 $\varepsilon_k = 0$, $x^{(k)} \notin S$ 时, $f_{\sigma_k}^\dagger(x^{(k)},0)$ 的函数值为无穷大,显然,这与题设矛盾. 所以情形(ii)不会发生.

对情形(i),由 $(x^{(k)},0) \in L(\mathrm{P}_{\sigma_k}^\dagger)$, 则存在点 $(x^{(k)},0)$ 的一个邻域 N_k, 对任意 $(x,0) \in N_k$, $x \in S$ 成立

$$f(x^{(k)}) = f_{\sigma_k}^\dagger(x^{(k)},0) \leqslant f_{\sigma_k}^\dagger(x,0) = f(x),$$

即 $x^{(k)} \in L(P)$. 所以定理成立.

3 一般约束优化问题的简单精确罚函数

考虑下面一般约束优化问题:

$$L\text{-}\min_{x\in S} f(x),\ S = \{x \in R^n : F_j(x) = 0,\ j \in E,\ g_l(x) \leqslant 0, l \in I\} \neq \varnothing, \tag{20}$$

其中, f, F_j, g_l, $j \in E$, $l \in I$ 为连续可微函数.

其等价的优化问题为

$$L\text{-}\min_{(x,\varepsilon)\in S_{\varepsilon_0}} f(x),$$

其中, $S_{\varepsilon_0} = \{(x,\varepsilon) \in R^n \times [0,\bar{\varepsilon}] : F_j(x) = \varepsilon^\gamma w_j, g_l(x) \leqslant \varepsilon^\gamma w_l,\ j \in E, l \in I,\ \varepsilon = 0\}$.

令

$$S_\varepsilon = \{(x,\varepsilon) \in R^n \times [0,\bar{\varepsilon}] : F_j(x) = \varepsilon^\gamma w_j, g_l(x) \leqslant \varepsilon^\gamma w_l,\ j \in E,\ l \in I\},$$

$$w_j,\ w_l \in \mathbf{R}_+,\ j \in E, l \in I.$$

下面为其相应的罚函数 $f_\sigma^\ddagger(x,\varepsilon)$ 与罚问题$(\mathrm{P}_\sigma^\ddagger)$:

$$f_\sigma^\ddagger(x,\varepsilon) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } \varepsilon = 0,\ x \in S, \\ f(x) + \varepsilon^{-\alpha}\Big(\sum\limits_{j\in E}(F_j(x) - \varepsilon^\gamma w_j)^2 + \\ \qquad \sum\limits_{l\in I}\max(0, g_l(x) - \varepsilon^\gamma w_l))^2\Big) + \sigma\varepsilon^\beta, & \\ & \text{若 } 0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}, \\ +\infty, & \text{若 } \varepsilon = 0,\ x \notin S, \end{cases}$$

其中

$$\gamma > \alpha = \beta > 1.$$

$$(\mathrm{P}_{\sigma}^{\ddagger})\quad L\text{-}\min_{(x,\varepsilon)\in R^n\times[0,\bar{\varepsilon}]} f_{\sigma}^{\ddagger}(x,\varepsilon).$$

对于一般约束优化问题(20)及相应的罚问题 $(\mathrm{P}_{\sigma}^{\ddagger})$，我们有与第1节和第2节类似的结论：

引理3.1 如果 $(x^{(k)},\varepsilon_k)\in L(\mathrm{P}_{\sigma_k}^{\ddagger})$，且其函数值 $f_{\sigma_k}^{\ddagger}(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 为有限值，$0<\varepsilon_k\le\bar{\varepsilon}$，则 $(x^{(k)},\varepsilon_k)\notin S_{\varepsilon_k}$.

定理3.1 如果引理3.1成立，$\varepsilon_k>0$，$\sigma_k\uparrow+\infty$，$(x^{(k)},\varepsilon_k)\xrightarrow{k}(x^*,\varepsilon_*)$，扩展的M-F约束品性在点 x^* 成立，则 $\varepsilon_*=0$，$x^*\in S$.

定理3.2 如果 $(x^{(k)},\varepsilon_k)\in L(\mathrm{P}_{\sigma_k}^{\ddagger})$，且其函数值 $f_{\sigma_k}^{\ddagger}(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 为有限值，当 $\sigma_k\uparrow+\infty$ 时，$(x^{(k)},\varepsilon_k)\xrightarrow{k}(x^*,\varepsilon_*)$，扩展的M-F约束品性在点 x^* 成立，且 $\gamma>\alpha=\beta>1$，则存在 $k_0>0$，当 $k\ge k_0$ 时，有 $\varepsilon_k=0$，$x^{(k)}$ 为问题(20)的局部极小点.

注1 引理3.1，定理3.1及定理3.2的证明与第1节、第2节中相应结论的证明类似，这里不一一列出.

注2 事实上，我们在文中所定义的罚函数分别在集合

$$\{(x,\varepsilon)\in R^n\times[0,\bar{\varepsilon}]:\varepsilon=0,x\in S\}\ \text{和}\ \{(x,\varepsilon)\in R^n\times[0,\bar{\varepsilon}]:\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]\}$$

上都是可微的，而在集合

$$\{(x,\varepsilon)\in R^n\times[0,\bar{\varepsilon}]:\varepsilon=0,x\in S\ \text{或}\ \varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]\}$$

上不能保证其可微性.

4 数值算例

在这部分，我们给出两个数值算例来验证本文所给出的罚函数的有效性. 所得的数值结果是通过Matlab 7.8在个人计算机上运行得到的. 表1和表2列出了罚参数 σ_k，最后迭代所得到的结果 $(x^{(k)},\varepsilon_k)$ 以及函数 f,g 在点 $x^{(k)}$ 处的函数值 $f(x^{(k)})$，$g(x^{(k)})$ 或 $\max(g_j(x^{(k)}))$.

例1[16]

$$\begin{cases}\min & -x_1x_2x_3,\\ \text{s.t.} & g(x)=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2-48\le 0.\end{cases}\tag{21}$$

在文献[16]中，问题(21)的最优解为 $(x_1,x_2,x_3)=(4,2.8284,2)$，最优函数值为 -22.6274. 在算法中，令 $x^{(0)}=(3,3,3)$，$\varepsilon_0=1.0$，$\gamma=4$，$\alpha=\beta=2$，$w=0.005$，具体数值结果见表1.

表1 例1的数值结果

Table 1 Numerical results of example 1

σ_k	$(x^{(k)},\varepsilon_k)$	$f(x^{(k)})$	$g(x^{(k)})$
10	(4.193 9, −2.723 5, −1.973 1, 0.032 1)	−22.536 9	−0.003 8
15	(4.011, −2.823 9, −2.002 7, 0.000 6)	−22.627 9	−0.008 2

例2[17]

$$\begin{cases}\min & 1\,000-x_1^2-2x_2^2-x_3^2-x_1x_2-x_1x_3,\\ \text{s.t.} & g_1(x)=x_1^2+x_2^2-x_3^2-25=0,\\ & g_2(x)=(x_1-5)^2+x_2^2+x_3^2-25=0,\\ & g_3(x)=(x_1-5)^2+(x_2-5)^2+(x_3-5)^2-25\le 0.\end{cases}\tag{22}$$

在文献[17]中，作者给出了问题(22)的一个近似解 $(x_1,x_2,x_3)=(2.5,4.221361,0.964420)$.

令 $x^{(0)}=(2,2,2)$，$\varepsilon_0=1.0$，$\gamma=4$，$\alpha=\beta=2$，$w=0.005$，具体数值结果见表2.

表2　例2的数值结果

Table 2　Numerical results of example 2

σ_k	$(x^{(k)},\ \varepsilon_k)$	$f(x^{(k)})$	$\max(g_j(x^{(k)}))$
10	(2.500 0, 4.194 7, 1.074 4, 0.002 1)	944.231 6	−1.565 5E−004
20	(2.500 0, 4.170 4, 1.165 2, 0.001 7)	944.269 0	−7.280 0E−005
30	(2.500 0, 4.218 7, 0.976 2, 0.002 8)	944.214 9	3.961 3E−004
100	(2.500 0, 4.205 3, 1.032 2, 0.001 7)	944.222 0	−1.507 0E−005

上述数值结果表明，通过选取合适的参数，通过本文给出的罚函数，罚参数不需要取得很大就可以得到约束优化问题的最优解，从而说明我们给出的罚函数是合理和可行的.

5　结　论

通过上面的讨论，我们得到求解约束优化问题的一个新的方法：简单精确罚函数法. 另一方面，我们考虑对于约束优化问题是否存在简单精确光滑罚函数？这将需要我们进一步的研究.

参考文献(References)：

[1] Di Pillo G. *Exact Penalty Methods*[M]. Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 1994: 209-253.

[2] Di Pillo G, Grippo L. Exact penalty functions in constrained optimization[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1989, **27**(6): 1333-1360.

[3] Di Pillo G, Grippo L. An exact penalty function method with global convergence properties for nonlinear programming problems[J]. *Mathematical Programming*, 1986, **36**(1): 1-18.

[4] Di Pillo G, Lucidi S. An augmented lagrangian function with improved exactness properties [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2002, **12**(2): 376-406.

[5] Fletcher R. An exact penalty function for nonlinear programming with inequalities[J]. *Mathematical Programming*, 1973, **5**(1): 129-150.

[6] Fletcher R. *Practical Methods of Optimization*(2): *Constrained Optimization*[M]. Wiley: John Wiley & Sons, 1981.

[7] Han S P, Magasarian O L. Exact penalty functions in nonlinear programming[J]. *Mathematical Programming*, 1979, **17**(1): 251-269.

[8] Bazaraa M, Goode J. Sufficient conditions for a globally exact penalty function without convexity[J]. *Mathematical Programming Studies*, 1982, **18**(1): 1-15.

[9] Bertsekas D P. Necessary and sufficient conditions for a penalty method to be exact[J]. *Mathematical Programming*, 1975, **9**(1): 87-99.

[10] Coleman T, Conn A. Nonlinear programming via an exact penalty method: asymptotic analysis[J]. *Mathematical Programming*, 1982, **24**(1): 123-136.

[11] Evans J P, Gould F J, Tolle J W. Exact penalty functions in nonlinear programming[J]. *Mathematical Programming*, 1973, **4**(1): 72-97.

[12] Fiacco A V, McCormick P. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*[M]. Wiley: John Wiley & Sons, 1968.

[13] Nocedal J, Wright S J. *Numerical Optimization*[M]. New York: Springer, 1999.

[14] Huyer W, Neumaier A. A new exact penalty function[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2003, **3**(4): 1141-1158.

[15] 刘丙状. 约束最优化问题中的光滑精确罚函数[D]. 博士论文. 上海: 上海大学, 2008. (LIU Bing-zhuang. Smooth exact penalty functions for constrained optimization[D]. Ph. D. Thesis. Shanghai: Shanghai University, 2008. (in Chinese))

[16] Hock W, Schittkowski K. *Test Examples for Nonlinear Programming Codes*[C]//Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. New York: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1981.

[17] Lasserre J B. A globally convergent algorithm for exact penalty functions[J]. *European Journal of Operational Research*, 1981, **7**(4): 389-395.

A New Simple Exact Penalty Function for Constrained Minimization

ZHENG Fang-ying[1,2], ZHANG Lian-sheng[1]

1. *Department of Mathematical Sciences*, *Zhejiang Sci-Tech University*, *Hangzhou* 310018, *P. R. China*;

2. *Department of Mathematics*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200444, *P. R. China*)

Abstract: By adding one variable for equality or inequality constrained minimization problems, a new simple exact penalty function was proposed, namely, the new exact penalty function did not contain the gradients of the objective function and constraint functions. Under mild assumptions, the local minimizer of the penalty function is the local minimizer of primal problem, when the penalty parameter is sufficiently large.

Key words: nonlinear programming; constrained minimization problems; local solution; exact penalty function