

# 两种互不相溶流体在竖直的波状壁面 和平行的平面壁面间作不 稳定的混合对流传热\*

J·C·宇马法士<sup>1</sup>, 劉一中<sup>2</sup>, M·舍卡<sup>1</sup>

- (1. 古尔伯加大学 数学系,古尔伯加,卡纳塔克邦 585 106,印度;
- 2. 国立暨南国际大学 土木工程系,南投 54561,中国 台湾)

**摘要:** 分析粘性、不可压缩、互不相溶流体,在竖直的波状壁面和光滑的平面壁间,传热传质混合对流的组合效应。得到无量纲控制方程的摄动解:0阶的均值部分和1阶的摄动部分。将所得到的1阶量,用小波长摄动级数展开,出现按指数阶分类的方程组,得到了0阶和1阶的解析表达式及其整体解,通过数值计算,用图形表明流体流动的显著特征以及传热特性。界面上应用适当的匹配条件,使分离的解相匹配。还针对控制参数的不同变化,分析了剪应力和 Nusselt 数的变化,发现 Grashof 数、粘性比、宽度比和导电率,对平行于流动方向的速度是有利的,对垂直于流动方向速度的影响正相反。

**关键词:** 混合对流; 波状壁面; 互不相溶流体; 摄动法

**中图分类号:** O368;O357.1      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.07.008

## 符 号 说 明

$a$	振幅(m)	$C_p^{(j)}$	定压比热比(J/(kg·K))
$C_p$	定压比热率 ( $C_p^{(1)}/C_p^{(2)}$ )	$g$	重力加速度(m/s <sup>2</sup> )
$Gr$	Grashof 数 ( $(h^{(1)})^3 g \beta^{(1)} \Delta T / (\nu^{(1)})^2$ )	$h$	宽度比 ( $h^{(2)}/h^{(1)}$ )
$K$	导热系数(W/(m·K))	$k$	导热比 ( $K^{(2)}/K^{(1)}$ )
$m$	粘度比 ( $\mu^{(1)}/\mu^{(2)}$ )	$Nu$	Nusselt 数
$P$	压力(N/m <sup>2</sup> )	$p_s$	静压力(N/m <sup>2</sup> )
$p$	无量纲压力	$Pr$	Prandtl 数 ( $C_p^{(1)} \mu^{(1)}/K^{(1)}$ )
$r$	密度比 ( $\rho^{(2)}/\rho^{(1)}$ )	$T$	温度(K)
$T^*$	无量纲温度	$T_s$	静温度(K)

\* 收稿日期: 2011-05-18; 修订日期: 2011-12-28

**基金项目:** 印度大学资源委员会资助项目(大学教育资助委员会的主要研究项目)(No F No 37-178, 2009)

**作者简介:** J. C. Umavathi,教授,博士(联系人. E-mail: jc\_umall@yahoo.com).

本文原文为英文,吴承平译,张禄坤校。

$t$	时间(s)	$U, V$	$X, Y$ 方向的速度(m/s)
$u, v$	无量纲速度	$X, Y$	空间坐标(m)
$x, y$	无量纲空间坐标	$\beta^{(j)}$	热膨胀系数
$\beta$	热膨胀系数比 ( $\beta^{(2)}/\beta^{(1)}$ )	$\varepsilon$	无量纲振幅参数 ( $a/h^{(1)}$ )
$\lambda$	波长(m)	$\lambda^*$	无量纲波数 ( $\lambda/h^{(1)}$ )
$\mu$	粘度 ( $\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}$ )	$\nu^{(j)}$	动粘度 ( $\mu^{(j)}/\rho^{(j)}$ )
$\rho$	密度 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	$\rho_0$	静密度 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
$\tau$	表面摩擦力	$\omega$	频率参数
$\omega t$	周期频率参数	$\psi$	流函数
上标			
1,2	分别表示流体在区域 I 和区域 II 中的量		

## 引 言

竖直加热管道中自由和强迫对流的组合受到了广泛重视,因为它们在实际的工业和工程中有着广泛的应用,例如,电子设备、太阳能发电系统、核反应堆、热交换器和化学反应过程。波纹曲面特别是波状的墙面,是工业生产必须解决的设备条件。这类壁面被用于紧凑的热交换设备,以利于热交换率的提高。另一个使用波纹面传热是热的散失,电子电路的性能和可靠性,高度地依赖于其内部的工作温度。波状壁还被用于医疗手术,以提高质量的传输(如血液充氧机)。

采用波纹面的理由之一是更有效地传热,促进流体在表面附近的运动;这样复杂的波纹面,由两个或多个正弦曲面构成,比单个正弦曲面,能产生更高的传热率。不同种类的流体在不同的加热条件下,有大量关于沿正弦波纹面对流的可用文献[1-5]。Yao 等<sup>[6-8]</sup>应用广义的 Prandtl 变换定理和有限差分格式,首次研究了等温竖直波纹面上的自然对流传热,他采用一个简单变换,将等温竖直波纹面变换为正弦波面,来研究自然对流的传热。Vajravelu 和 Sastri<sup>[9]</sup>研究了竖直波状壁面和平行平面壁面间的自由对流。Chen 和 Wang<sup>[10-11]</sup>分析了微极流体中沿波状面的瞬时强迫和自由对流。Cheng<sup>[12-13]</sup>在多孔介质中,研究了沿波状锥面和竖直波形面的传热传质与自然对流的耦合问题。Malashetty 等<sup>[14]</sup>在竖直波状壁面和平行平面壁面间,分析磁对流及其传热。最近, Fasogbon<sup>[15]</sup>在二维不规则通道中,分析研究自由对流的传热和传质。

双流体流动及其传热得到了广泛研究,是因为它们在化学和核工业中有着重要作用。为空间应用设计的双流体传热系统,需要传热和传质过程和折合重力条件下的流体力学知识。两种流体互不相溶是它们分子间强大内聚力作用的结果,与流体的种类有关。由实验确定的系数,就是大家知道的表面张力,可以用来表示两种流体是否可以轻易混合。该系数值越大,阻碍混合越强。该系数为负值,象征着无阻碍混合<sup>[16]</sup>。

互不相溶流体的流动,可以根据界面的结构和相位图形的分布,划分为 3 种类型:分离型流动、过渡型或混合型流动、散布型流动<sup>[17]</sup>。这样的 3 类流动可以解释为,在一个密闭的容器中,部分为液体所充填,其他部分为气体所占有。第一类分离型流动出现在这样一种情况:容器以低幅和低频作非常轻微地震荡,同时,两种流体的相位以定义完整的界面各自分开保持。混合型或过渡型流动出现在这样一种情况:当频率和振幅的范围增强,波浪不再稳定而破裂,部分界面出现破碎,在液体中冒出气泡。在容器剧烈地摇动,气体以小气泡的形式悬浮在液体之中,出现散布型流动。

Meye 和 Garder<sup>[18]</sup>是首位发表关于多孔介质中两种互不相溶流体的力学论文的作者。Lo-

harsabi 和 Sahai<sup>[19]</sup> 假设界面上速度和热平衡的连续性,对平板通道中两种互不相溶流体的流动进行了分析.一些研究者假设:分开的两相流动,可以由所许可界面分开的两个单相流动的叠加来表示.一般来说,多相流动是由重力和粘性流动所驱动.已有一些关系两种互不相溶流体,在水平管道内层流的理论和实验工作<sup>[20-21]</sup>. Loharsbi 和 Sahai<sup>[19]</sup> 研究了平行板通道中两相 MHD 流动和传热,其中一种流体是可导电的.近来, Malashetty 等<sup>[22-23]</sup> 和 Umavathi 等<sup>[24-26]</sup> 在不同几何条件下,研究了的二种流体的流动和传热.最近, Kumar 等<sup>[27]</sup> 在竖直管道内,研究了互不相溶粘性流体的混合对流.

一些作者通过对流场强加各种限制,研究不稳定的自然对流.最简单的不稳定的自然对流是沿竖直板不稳定的—维层状自然对流,采用 Boussinesq 近似的动量方程和能量方程,简化为线性的偏微分方程组,能够以此为基准,发展计算流体动力学的结果. Soundalgekar 等<sup>[28]</sup> 分别就临时性周期的表面温度和表面热通量,求得了自然对流的一维解.

上面完成的研究是针对稳定流动情况.然而,大量的实际问题要处理的互不相溶流体是不稳定的.着眼于应用范围的扩大,尝试两种互不相溶流体,在竖直波状壁面和平行平面壁面间,作不稳定流动和传热的分析.

### 1 问题的数学表示

考虑两种互不相溶流体,在一个竖直通道中:一边为波状壁面、另一边为平行的平面壁面,作二维的、不定常的、层状的混合对流(见图 1).取  $X$  轴平行于通道,  $Y$  轴垂直于  $X$  轴,用  $Y = -h^{(1)} + a \cos(\lambda X)$  表示波状壁面,用  $Y = h^{(2)}$  表示平面壁面.波状壁面和平面壁面分别保持常温  $\hat{T}_1$  和  $\hat{T}_2$ .区域  $-h^{(1)} \leq Y \leq 0$  (区域 I) 中,流体密度为  $\rho^{(1)}$ ,粘度为  $\mu^{(1)}$ ,导热系数为  $K^{(1)}$ ,热膨胀系数为  $\beta^{(1)}$ ,常温时的比热比为  $C_p^{(1)}$ ;区域  $0 \leq Y \leq h^{(2)}$  (区域 II) 中,流体密度为  $\rho^{(2)}$ ,粘度为  $\mu^{(2)}$ ,导热系数为  $K^{(2)}$ ,热膨胀系数为  $\beta^{(2)}$ ,常温时的比热比为  $C_p^{(2)}$ .

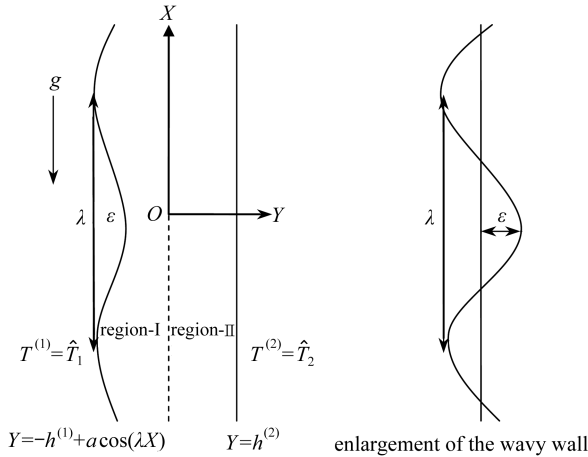


图 1 物理模型和坐标系

Fig. 1 Physical model and coordinate system

假设除了动量方程中浮力项的密度以外,流体的性质保持为常数.通道中的流体由于浮力的作用而上升.又假设两种流体的传输性质保持不变.波状壁面的波长非常大与  $a^{-1}$  成正比,其中  $a$  为波幅.采用 Boussinesq 近似,即除了出现在交乘项中,如重力项,密度处处为常数.在上述假设下,其连续性方程、动量方程和能量方程<sup>[9]</sup>为

$$\frac{\partial U^{(j)}}{\partial X^{(j)}} + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial Y^{(j)}} = 0, \quad (1)$$

$$\rho^{(j)} \left( \frac{\partial U^{(j)}}{\partial t^{(j)}} + U^{(j)} \frac{\partial U^{(j)}}{\partial X^{(j)}} + V^{(j)} \frac{\partial U^{(j)}}{\partial Y^{(j)}} \right) = - \frac{\partial P^{(j)}}{\partial X^{(j)}} + \mu^{(j)} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)^{(j)} - \rho^{(j)} g, \quad (2)$$

$$\rho^{(j)} \left( \frac{\partial V^{(j)}}{\partial t^{(j)}} + U^{(j)} \frac{\partial V^{(j)}}{\partial X^{(j)}} + V^{(j)} \frac{\partial V^{(j)}}{\partial Y^{(j)}} \right) = - \frac{\partial P^{(j)}}{\partial Y^{(j)}} + \mu^{(j)} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right)^{(j)}, \quad (3)$$

$$\rho^{(j)} C_p^{(j)} \left( \frac{\partial T^{(j)}}{\partial t^{(j)}} + U^{(j)} \frac{\partial T^{(j)}}{\partial X^{(j)}} + V^{(j)} \frac{\partial T^{(j)}}{\partial Y^{(j)}} \right) = K^{(j)} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right)^{(j)}, \quad (4)$$

其中  $j = \begin{cases} 1, & \text{区域 I 中的流体,} \\ 2, & \text{区域 II 中的流体.} \end{cases}$

关系  $U^{(j)}$  和  $V^{(j)}$  的边界条件:两壁面都不出现相对滑动;关系  $T$  的边界条件:波状壁面为  $\hat{T}_1$ , 平面壁面为  $\hat{T}_2$ , 本问题的流体界面已在图 1 中给出. 假设沿流动方向的速度、剪切应力和压力梯度均连续, 温度和热通量亦均连续, 正如下面所给出的.

与速度相关的边界条件和界面连续条件为

$$\begin{cases} U^{(1)} = V^{(1)} = 0, & \text{当 } Y = -h^{(1)} + a \cos(\lambda X) \text{ 时,} \\ U^{(2)} = V^{(2)} = 0, & \text{当 } Y = h^{(2)} \text{ 时,} \\ U^{(1)} = U^{(2)}, V^{(1)} = V^{(2)}, & \text{当 } Y = 0 \text{ 时,} \\ \mu^{(1)} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^{(1)} = \mu^{(2)} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^{(2)}, & \text{当 } Y = 0 \text{ 时,} \\ \frac{\partial P^{(1)}}{\partial X^{(1)}} = \frac{\partial P^{(2)}}{\partial X^{(2)}}, & \text{当 } Y = 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (5)$$

与温度相关的边界条件和界面连续条件为

$$\begin{cases} T^{(1)} = \hat{T}_1, & \text{当 } Y = -h^{(1)} + a \cos(\lambda X) \text{ 时,} \\ T^{(2)} = \hat{T}_2, & \text{当 } Y = h^{(2)} \text{ 时,} \\ T^{(1)} = T^{(2)}, & \text{当 } Y = 0 \text{ 时,} \\ K^{(1)} \left( \frac{\partial T}{\partial Y} + \frac{\partial T}{\partial X} \right)^{(1)} = K^{(2)} \left( \frac{\partial T}{\partial Y} + \frac{\partial T}{\partial X} \right)^{(2)}, & \text{当 } Y = 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (6)$$

下面引入无量纲流动变量:

$$\begin{cases} x^{(j)} = \frac{X^{(j)}}{h^{(j)}}, y^{(j)} = \frac{Y^{(j)}}{h^{(j)}}, u^{(j)} = \frac{h^{(j)}}{\nu^{(j)}} U^{(j)}, v^{(j)} = \frac{h^{(j)}}{\nu^{(j)}} V^{(j)}, \\ p^{(j)} = \frac{P^{(j)}}{\rho^{(j)} (\nu^{(j)} / h^{(j)})^2}, T^{*(j)} = \frac{T^{(j)} - \hat{T}_1}{\hat{T}_2 - \hat{T}_1}, \beta = \frac{\beta^{(2)}}{\beta^{(1)}}, \\ h = \frac{h^{(2)}}{h^{(1)}}, m = \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}}, r = \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}}, t^{*(j)} = \frac{t^{(j)} \nu^{(j)}}{h^{(j)2}}, \\ k = \frac{K^{(2)}}{K^{(1)}}, C_p = \frac{C_p^{(1)}}{C_p^{(2)}}, Pr = \frac{C_p^{(1)} \mu^{(1)}}{K^{(1)}}, Gr = \frac{h^{(1)3} g \beta^{(1)} \Delta T}{\nu^{(1)2}}, \\ \Delta T = \hat{T}_2 - \hat{T}_1, \varepsilon = \frac{a}{h^{(1)}}, \lambda^* = \frac{\lambda}{h^{(1)}}. \end{cases} \quad (7)$$

利用上述无量纲变量, 基本方程(1)至(4)就可以变换为如下无量纲形式(为简单计, 两个区域都可以用  $x^{(j)} = x; y^{(j)} = y; t^{*(j)} = t^*$  表示):

$$\frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u^{(j)}}{\partial t^*} + u^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + v^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} = -\frac{\partial p^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial y^2} + AT^{*(j)}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial v^{(j)}}{\partial t^*} + u^{(j)} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x} + v^{(j)} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} = -\frac{\partial p^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial y^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial T^{*(j)}}{\partial t^*} + u^{(j)} \frac{\partial T^{*(j)}}{\partial x} + v^{(j)} \frac{\partial T^{*(j)}}{\partial y} = B \left( \frac{\partial^2 T^{*(j)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{*(j)}}{\partial y^2} \right), \quad (11)$$

其中 
$$A = \begin{cases} Gr, & \text{区域 I 中,} \\ Gr\beta h^3 m^2 r^2, & \text{区域 II 中.} \end{cases} \quad B = \begin{cases} 1/Pr, & \text{区域 I 中,} \\ kmC_p/Pr, & \text{区域 II 中.} \end{cases}$$

利用方程(7),速度场和温度场的边界条件和界面连续条件(5)和(6)改写为

$$\begin{cases} u^{(1)} = v^{(1)} = 0, & \text{当 } y = -1 + \varepsilon \cos(\lambda^* x) \text{ 时,} \\ u^{(2)} = v^{(2)} = 0, & \text{当 } y = 1 \text{ 时,} \\ u^{(1)} = \frac{u^{(2)}}{mhr}, v^{(1)} = \frac{v^{(2)}}{mhr}, & \text{当 } Y = 0 \text{ 时,} \\ \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} = \frac{1}{m^2 h^2 r} \left( \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} \right), & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \\ \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} = \frac{1}{rm^2 h^3} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x}, & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} T^{*(1)} = 0, & \text{当 } y = -1 + \varepsilon \cos(\lambda^* x) \text{ 时,} \\ T^{*(2)} = 1, & \text{当 } y = 1 \text{ 时,} \\ T^{*(1)} = T^{*(2)}, & \text{当 } Y = 0 \text{ 时,} \\ \frac{\partial T^{*(1)}}{\partial y} + \frac{\partial T^{*(1)}}{\partial x} = \frac{k}{h} \left( \frac{\partial T^{*(2)}}{\partial y} + \frac{\partial T^{*(2)}}{\partial x} \right), & \text{当 } y = 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (13)$$

流体静态时,有<sup>[9]</sup>

$$0 = -\frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\rho_0 g (h^{(1)})^3}{\rho^{(1)} (v^{(1)})^2} = -\frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\rho_0 g (h^{(2)})^3}{\rho^{(2)} (v^{(2)})^2}. \quad (14)$$

根据方程(14),方程(9)变为

$$\frac{\partial u^{(j)}}{\partial t^*} + u^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + v^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} = -\frac{\partial (p^{(j)} - p_s)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial y^2} + AT^{*(j)}. \quad (15)$$

## 2 问题的解

式(8)、(10)、(11)和式(15)是耦合的非线性方程组,必须联合求解.由于是非线性的方程组,难以获得解析解,因此采用摄动法求得近似解.假设解是由均值部分和摄动部分组成,则速度、压力和温度可以表示为

$$u^{(j)}(x, y, t^*) = u_0^{(j)}(y) + u_1^{(j)}(x, y, t^*), \quad (16)$$

$$v^{(j)}(x, y, t^*) = v_1^{(j)}(x, y, t^*), \quad (17)$$

$$p^{(j)}(x, y, t^*) = p_0^{(j)}(x, y) + p_1^{(j)}(x, y, t^*), \quad (18)$$

$$T^{(j)*}(x, y, t^*) = T_0^{(j)*}(y) + T_1^{(j)*}(x, y, t^*), \quad (19)$$

其中,摄动量  $u_1, v_1, p_1$  和  $T_1^*$ ,与均值或者0阶量相比较而言,系一个小量.为简单起见,将  $T, t$

上角的星号略去。

将式(16)到(19)代入式(8)、(10)、(11)和式(15),并且分离成均值部分和摄动部分,得到下列方程组:

0 阶方程

$$\frac{d^2 T_0^{(j)}}{dy^2} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{d^2 u_0^{(j)}}{dy^2} + AT_0^{(j)} = 0, \quad (21)$$

其中  $\frac{\partial}{\partial x}(p_0^{(j)} - p_s)$  取为  $0^{[29]}$ 。

1 阶方程

$$\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial v_1^{(j)}}{\partial y} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial t} + u_0^{(j)} \frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x} + v_1^{(j)} \frac{du_0^{(j)}}{dy} = -\frac{\partial p_1^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1^{(j)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(j)}}{\partial y^2} + AT_1^{(j)}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial v_1^{(j)}}{\partial t} + u_0^{(j)} \frac{\partial v_1^{(j)}}{\partial x} = -\frac{\partial p_1^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial^2 v_1^{(j)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1^{(j)}}{\partial y^2}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial T_1^{(j)}}{\partial t} + u_0^{(j)} \frac{\partial T_1^{(j)}}{\partial x} + v_1^{(j)} \frac{dT_0^{(j)}}{dy} = B \left( \frac{\partial^2 T_1^{(j)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1^{(j)}}{\partial y^2} \right). \quad (25)$$

根据方程(16)~(19),边界条件和界面连续条件(12)和(13)变成:

0 阶的边界条件和界面连续条件

$$\begin{cases} u_0^{(1)} = 0, & \text{当 } y = -1 \text{ 时,} \\ u_0^{(2)} = 0, & \text{当 } y = 1 \text{ 时,} \\ u_0^{(1)} = \frac{1}{mhr} u_0^{(2)}, \frac{du_0^{(1)}}{dy} = \frac{1}{m^2 h^2 r} \frac{du_0^{(2)}}{dy}, & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} T_0^{(1)} = 0, & \text{当 } y = -1 \text{ 时,} \\ T_0^{(2)} = 1, & \text{当 } y = 1 \text{ 时,} \\ T_0^{(1)} = T_0^{(2)}, \frac{dT_0^{(1)}}{dy} = \frac{k}{h} \frac{dT_0^{(2)}}{dy}, & \text{当 } y = 0 \text{ 时;} \end{cases} \quad (27)$$

1 阶的边界条件和界面连续条件

$$\begin{cases} u_1^{(1)} = -\cos(\lambda x) \frac{du_0^{(1)}}{dy}, v_1^{(1)} = 0, & \text{当 } y = -1 \text{ 时,} \\ u_1^{(2)} = 0, v_1^{(2)} = 0, & \text{当 } y = 1 \text{ 时,} \\ u_1^{(1)} = \frac{1}{mhr} u_1^{(2)}, v_1^{(1)} = \frac{1}{mhr} v_1^{(2)}, & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \\ \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial x} = \frac{1}{m^2 h^2 r} \left( \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial x} \right), & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \\ \frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial x} = \frac{1}{rm^2 h^3} \frac{\partial p_1^{(2)}}{\partial x}, & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} T_1^{(1)} = -\cos(\lambda x) \frac{dT_0^{(1)}}{dy}, & \text{当 } y = -1 \text{ 时,} \\ T_1^{(2)} = 0, & \text{当 } y = 1 \text{ 时,} \\ T_1^{(1)} = T_1^{(2)}, \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial x} = \frac{k}{h} \left( \frac{\partial T_1^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial T_1^{(2)}}{\partial x} \right), & \text{当 } y = 0. \end{cases} \quad (29)$$

对方程(23)和(24)进行交叉微分,可以消去压力  $p_1^j$ . 同时,可以引入如下形式的流函数

$\bar{\psi}$ :

$$u_1^{(j)} = -\frac{\partial \bar{\psi}^{(j)}}{\partial y}, \quad v_1^{(j)} = \frac{\partial \bar{\psi}^{(j)}}{\partial x}, \quad (30)$$

于是方程(22)自动满足.

假设流函数和温度取如下形式:

$$\bar{\psi}^{(j)} = \varepsilon e^{i(\lambda x + \omega t)} \psi^{(j)}(y), \quad T_1^{(j)} = \varepsilon e^{i(\lambda x + \omega t)} t^{(j)}(y), \quad (31)$$

由此可以推断

$$u_1^{(j)}(x, y, t) = \varepsilon e^{i(\lambda x + \omega t)} u_1^{(j)}(y), \quad v_1^{(j)}(x, y, t) = \varepsilon e^{i(\lambda x + \omega t)} v_1^{(j)}(y), \quad (32)$$

其中  $i$  为虚数单位.

利用式(30)和(31),将式(23)和(25)改写为

$$\begin{aligned} \psi_{yyy}^{(j)} - (i\omega + i\lambda u_0^{(j)} + 2\lambda^2) \psi_{yy}^{(j)} + \\ (i\omega \lambda^2 + i\lambda u_{0yy}^{(j)} + iu_0^{(j)} \lambda^3 + \lambda^4) \psi^{(j)} - At_y^{(j)} = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$i(\omega t^{(j)} + \lambda u_0^{(j)} t^{(j)} + \lambda T_{0y}^{(j)} \psi^{(j)}) = B(-\lambda^2 t^{(j)} + t_{yy}^{(j)}). \quad (34)$$

根据  $\psi^{(j)}$  和  $t^{(j)}$ , 将边界条件和界面连续条件(28)和(29)改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial y} = \cos(\omega t) \frac{du_0^{(1)}}{dy}, \quad \psi^{(1)} = 0, & \text{当 } y = -1 \text{ 时,} \\ \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad \psi^{(2)} = 0, & \text{当 } y = 1 \text{ 时,} \\ \psi^{(1)} = \frac{\psi^{(2)}}{mhr}, \quad \psi_y^{(2)} = \frac{\psi_y^{(1)}}{mhr}, \quad \psi_{yy}^{(1)} + \lambda^2 \psi^{(1)} = \frac{\psi_{yy}^{(2)} + \lambda^2 \psi^{(2)}}{m^2 h^2 r}, & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \\ (i\lambda u_0^{(1)} + i\omega + \lambda^2) \psi_y^{(1)} - i\lambda \psi^{(1)} u_{0y}^{(1)} - \psi_{yyy}^{(1)} + Grt^{(1)} = \\ \frac{1}{rm^2 h^3} ((i\lambda u_0^{(2)} + i\omega + \lambda^2) \psi_y^{(2)} - \psi_{yyy}^{(2)} - \\ i\lambda \psi^{(2)} u_{0y}^{(2)} + Gr\beta m^2 r^2 h^3 t^{(2)}), & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \\ t^{(1)} = -\cos(\omega t) \frac{dT_0^{(1)}}{dy}, & \text{当 } y = -1 \text{ 时,} \\ t^{(2)} = 0, & \text{当 } y = 1 \text{ 时,} \\ t^{(1)} = t^{(2)}, \quad t_y^{(1)} + i\lambda t^{(1)} = \frac{k}{h} (t_y^{(2)} + i\lambda t^{(2)}), & \text{当 } y = 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (35)$$

我们将摄动解  $\psi, t, u_1, v_1$  仅限于实部.

仅考虑小数值  $\lambda$ . 将

$$\psi(\lambda, y) = \sum_{z=0}^{\infty} \lambda^z \psi_z, \quad t(\lambda, y) = \sum_{z=0}^{\infty} \lambda^z t_z \quad (37)$$

代入式(33)~(36),按  $\lambda$  的阶次得到如下的常微分方程组:

## 0 阶方程

$$\begin{cases} \frac{d^2 t_{10}}{dy^2} - iPr\omega t_{10} = 0, \\ \frac{d^4 \psi_{10}}{dy^4} - i\omega \frac{d^2 \psi_{10}}{dy^2} - Gr \frac{dt_{10}}{dy} = 0, \\ \frac{d^2 t_{20}}{dy^2} - \frac{i\omega Pr}{kmC_p} t_{20} = 0, \\ \frac{d^4 \psi_{20}}{dy^4} - i\omega \frac{d^2 \psi_{20}}{dy^2} - Gr\beta h^3 m^2 r^2 \frac{dt_{20}}{dy} = 0; \end{cases} \quad (38)$$

## 1 阶方程

$$\begin{cases} \frac{d^2 t_{11}}{dy^2} - i\omega Pr t_{11} = iPr \left( u_0^{(1)} t_{10} + \frac{dT_0^{(1)}}{dy} \psi_{10} \right), \\ \frac{d^2 t_{21}}{dy^2} - \frac{i\omega Pr}{kmC_p} t_{21} = i \frac{Pr}{kmC_p} \left( u_0^{(2)} t_{20} + \frac{dT_0^{(2)}}{dy} \psi_{20} \right), \\ \frac{d^4 \psi_{11}}{dy^4} - i\omega \frac{d^2 \psi_{11}}{dy^2} = i \left( u_0^{(1)} \frac{d^2 \psi_{10}}{dy^2} - \frac{d^2 u_0^{(1)}}{dy^2} \psi_{10} \right) + Gr \frac{dt_{11}}{dy}, \\ \frac{d^4 \psi_{21}}{dy^4} - i\omega \frac{d^2 \psi_{21}}{dy^2} = i \left( u_0^{(2)} \frac{d^2 \psi_{20}}{dy^2} - \frac{d^2 u_0^{(2)}}{dy^2} \psi_{20} \right) + Gr\beta h^3 m^2 r^2 \frac{dt_{21}}{dy}. \end{cases} \quad (39)$$

## 0 阶边界条件和界面连续条件

$$\begin{cases} \frac{d\psi_{10}}{dy} = \cos(\omega t) \frac{du_0^{(1)}}{dy}, \psi_{10} = 0, & \text{当 } y = -1 \text{ 时,} \\ \frac{d\psi_{20}}{dy} = 0, \psi_{20} = 0, & \text{当 } y = 1 \text{ 时,} \\ \frac{d\psi_{10}}{dy} = \frac{1}{mhr} \frac{d\psi_{20}}{dy}, \psi_{10} = \frac{1}{mhr} \psi_{20}, & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \\ \frac{d^2 \psi_{10}}{dy^2} = \frac{1}{m^2 h^2 r} \frac{d^2 \psi_{20}}{dy^2}, & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \\ \left. \begin{aligned} \frac{d^3 \psi_{10}}{dy^3} - i\omega \frac{d\psi_{10}}{dy} - Gr t_{10} = \\ \frac{1}{rm^2 h^3} \left( \frac{d^3 \psi_{20}}{dy^3} - i\omega \frac{d\psi_{20}}{dy} - Gr\beta h^3 m^2 r^2 t_{20} \right), \end{aligned} \right\} & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \\ t_{10} = -\cos(\omega t) \frac{dT_0^{(1)}}{dy}, & \text{当 } y = -1 \text{ 时,} \\ t_{20} = 0, & \text{当 } y = 1 \text{ 时,} \\ t_{10} = t_{20}, \frac{dt_{10}}{dy} = \frac{k}{h} \frac{dt_{20}}{dy}, & \text{当 } y = 0 \text{ 时;} \end{cases} \quad (40)$$

## 1 阶边界条件和界面连续条件



$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\psi_{11}}{dy} = 0, \psi_{11} = 0, & \text{当 } y = -1 \text{ 时,} \\ \frac{d\psi_{21}}{dy} = 0, \psi_{21} = 0, & \text{当 } y = 1 \text{ 时,} \\ \psi_{11} = \frac{\psi_{21}}{mhr}, \frac{d\psi_{11}}{dy} = \frac{1}{mhr} \frac{d\psi_{21}}{dy}, \frac{d^2\psi_{11}}{dy^2} = \frac{1}{m^2h^2r} \frac{d^2\psi_{21}}{dy^2}, & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \\ i \frac{du_0^{(1)}}{dy} \psi_{10} - iu_0^{(1)} \frac{d\psi_{10}}{dy} + \frac{d^3\psi_{11}}{dy^3} - i\omega \frac{d\psi_{11}}{dy} - Grt_{11} = \\ \frac{1}{rm^2h^3} \left( i \frac{du_0^{(2)}}{dy} \psi_{20} - iu_0^{(2)} \frac{d\psi_{20}}{dy} + \frac{d^3\psi_{21}}{dy^3} - i\omega \frac{d\psi_{21}}{dy} - \right. \\ \left. Gr\beta h^3 m^2 r^2 t_{21} \right), & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \\ t_{11} = 0, & \text{当 } y = -1 \text{ 时,} \\ t_{21} = 0, & \text{当 } y = 1, \\ t_{11} = t_{21}, \frac{dt_{11}}{dy} + it_{10} = \frac{k}{h} \left( \frac{dt_{21}}{dy} + it_{20} \right), & \text{当 } y = 0 \text{ 时.} \end{array} \right. \quad (41)$$

于是0阶方程组(20)和(21),相应的边界条件和界面连续条件为(26)和(27);1阶方程组(38)和(39),相应的边界条件和界面连续条件为(40)和(41),从而分别精确地解出  $u_0^{(j)}$ ,  $T_0^{(j)}$  和  $\psi^{(j)}$ ,  $t^{(j)}$ . 为简洁起见,没有具体给出这些解. 从这些解,就可以得到如下形式的1阶量:

$$\psi^{(j)} = (\psi_r + i\psi_i)^{(j)} = \psi_0^{(j)} + \lambda\psi_1^{(j)}, \quad t^{(j)} = (t_r + it_i)^{(j)} = t_0^{(j)} + \lambda t_1^{(j)}, \quad (42)$$

其中,下标 r 表示实部,下标 i 表示虚部.

仅考虑实部,一阶的速度和温度表达式为

$$u_1^{(j)}(x, y, t) = \varepsilon \left( -\cos(\lambda x + \omega t) \frac{d\psi_r^{(j)}}{dy} + \lambda \sin(\lambda x + \omega t) \frac{d\psi_i^{(j)}}{dy} \right), \quad (43)$$

$$v_1^{(j)}(x, y, t) = \varepsilon \left( -\lambda \psi_r^{(j)} \sin(\lambda x + \omega t) - \lambda^2 \psi_i^{(j)} \cos(\lambda x + \omega t) \right), \quad (44)$$

$$T_1^{(j)}(x, y, t) = \varepsilon \left( \cos(\lambda x + \omega t) t_r^{(j)} - \lambda \sin(\lambda x + \omega t) t_i^{(j)} \right). \quad (45)$$

速度和温度的全部解为由均值部分和摄动部分之和求得.

## 2.1 表面摩擦和 Nusselt 数

流体中任意一点的无量纲剪应力  $\tau_{xy}$  为

$$\tau_{xy} = \left( \frac{h^2}{\rho\nu^2} \right) \bar{\tau}_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (46)$$

从而,分别得到波状壁面  $y = -1 + \varepsilon \cos(\lambda x)$  的表面摩擦力

$$\tau_w = \tau_w^0 + \varepsilon \operatorname{Re} \left( e^{i\lambda x} \left( \frac{d^2 u_0^{(1)}}{dy^2} (-1) + \frac{d^2 \psi^{(1)}}{dy^2} (-1) \right) \right) \quad (47)$$

和平面壁面  $y = 1$  的表面摩擦力

$$\tau_f = \tau_f^0 + \varepsilon \operatorname{Re} \left( e^{i\lambda x} \frac{d^2 \psi^{(2)}}{dy^2} (1) \right), \quad (48)$$

其中  $\tau_w^0 = \frac{du_0^{(1)}}{dy} \Big|_{y=-1}$ ,  $\tau_f^0 = \frac{du_0^{(2)}}{dy} \Big|_{y=1}$ .

无量纲 Nusselt 数为

$$Nu = \frac{\partial T}{\partial y} = T_0'(y) + \varepsilon \operatorname{Re} \left( e^{i\lambda x} T_1'(y) \right), \quad (49)$$

从而,分别得到波状壁面  $y = -1 + \varepsilon \cos(\lambda x)$  的 Nusselt 数

$$Nu_w = Nu_w^0 + \varepsilon \text{Re} \left( e^{i\lambda x} \left( \frac{dT_0^{(1)}}{dy^2} (-1) + \frac{dT_0^{(1)}}{dy} (-1) \right) \right) \tag{50}$$

和平面壁面  $y = 1$  的 Nusselt 数

$$Nu_f = Nu_f^0 + \varepsilon \text{Re} \left( e^{i\lambda x} \frac{dT_0^{(2)}}{dy} (1) \right); \tag{51}$$

这里,  $\text{Re}$  表示实部,

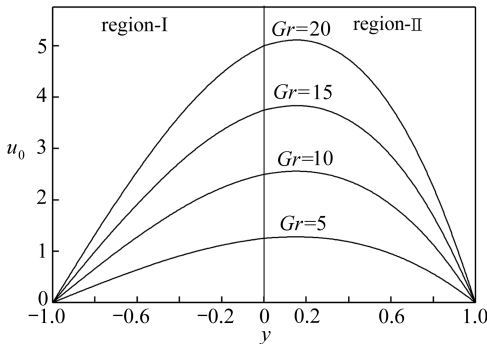
$$Nu_w^0 = \left. \frac{dT_0^{(1)}}{dy} \right|_{y=-1}, \quad Nu_f^0 = \left. \frac{dT_0^{(2)}}{dy} \right|_{y=1}.$$

选取若干组参数值,如 Grashof 数  $Gr$ ,粘度比  $m$ ,宽度比  $h$ ,导电率  $k$  和频率参数  $\omega$ ,就可以数值地求得速度和温度解,还可以数值地计算壁面和界面的摩擦因数  $\tau_w$  和  $\tau_f$ ,以及壁面和界面的 Nusselt 数  $Nu_w$  和  $Nu_f$ ,同时,用图形定性地显示出某些感兴趣的特性.

### 3 结果和讨论

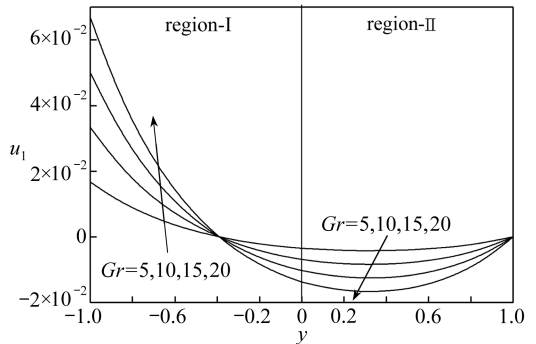
在左壁为波状壁面,右壁为平面壁面的竖直通道内,分析了两种互不相溶流体非定常混合对流的解析解.假设通道中的流动由两部分组成:均值部分和摄动部分,使上述非线性方程组得以线性化求解.得到均值部分和摄动部分的精确解,能够用于长波近似求解.0 阶速度解  $u_0$  和 0 阶温度解  $T_0$  可用于通道两边都是平面的情况.在不同的控制参数下,数值地求得均值部分和摄动部分的解,并用图形在图 2 到图 12 中绘出.在所有的图形中,将所有计算的密度比、热膨胀系数比、常压下的比热比、Prandtl 数、波数、振幅参数、周期频率参数以及无量纲波数和空间坐标的乘积,分别固定为 1, 1, 1, 0.7, 0.02, 0.02, 0.785 398, 1.570 796 33;所有图形中的 Grashof 数、粘度比、宽度比、导电率和频率参数,分别取固定值 5, 1, 1, 1, 10,当该参数是该图形的变量时除外.

图 2 显示 Grashof 数  $Gr$  取不同数值时,无量纲 0 阶、1 阶和总速度的变化.由图 2(a)可以看出,随 Grashof 数  $Gr$  的增大,0 阶速度  $u_0$  也增大.由图 2(b)可看出,随 Grashof 数  $Gr$  的增大,1 阶速度  $u_1$  在区间 I (约在  $y = -1$  到  $y = -0.4$ ) 中也增大,而在区间 II (约在  $-0.4 \leq y \leq 1$ ) 中反而在减小.Grashof 数  $Gr$  对波状壁面上一阶速度  $u_1$  的影响,大于平面壁面.图 2(c) 示出, Grashof 数  $Gr$  对总速度  $u$  的影响,类似于 0 阶速度  $u_0$ . Grashof 数值的增大,在物理上意味着支撑运动的浮力增大.从图 2(d) 观察到,随着 Grashof 数的增大,垂直于通道长度方向流体速度



(a) 0 阶速度

(a) Zeroth order velocity



(b) 1 阶速度

(b) First order velocity

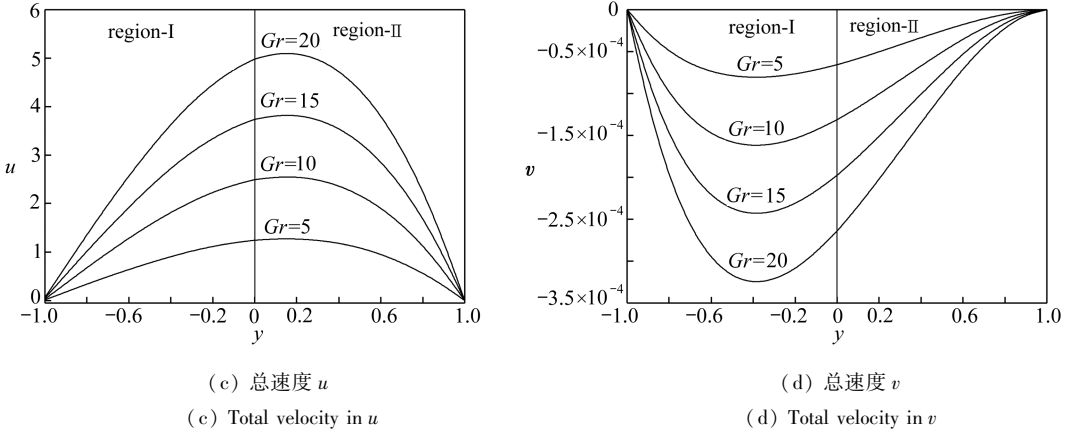


图2 物理模型和坐标系

Fig. 2 Velocity profiles for different values of Grashof numbers

$v$  的变化. 通道下游方向速度  $v$  随着 Grashof 数的增大而急剧减小.

图3示出了粘度比  $m (= \mu^{(1)} / \mu^{(2)})$  对速度  $u, v$  的影响. 图3(a)显示出两个区域内的0阶速度, 随着粘度比  $m$  的增大都增大, 并且, 粘度比对区域II的影响比对区域I的影响更明显. 图3(b)显示出粘度比  $m$  对1阶速度  $u_1$  的影响; 在区域I(约在  $-1 \leq y \leq -0.25$ ) 中速度得增强,

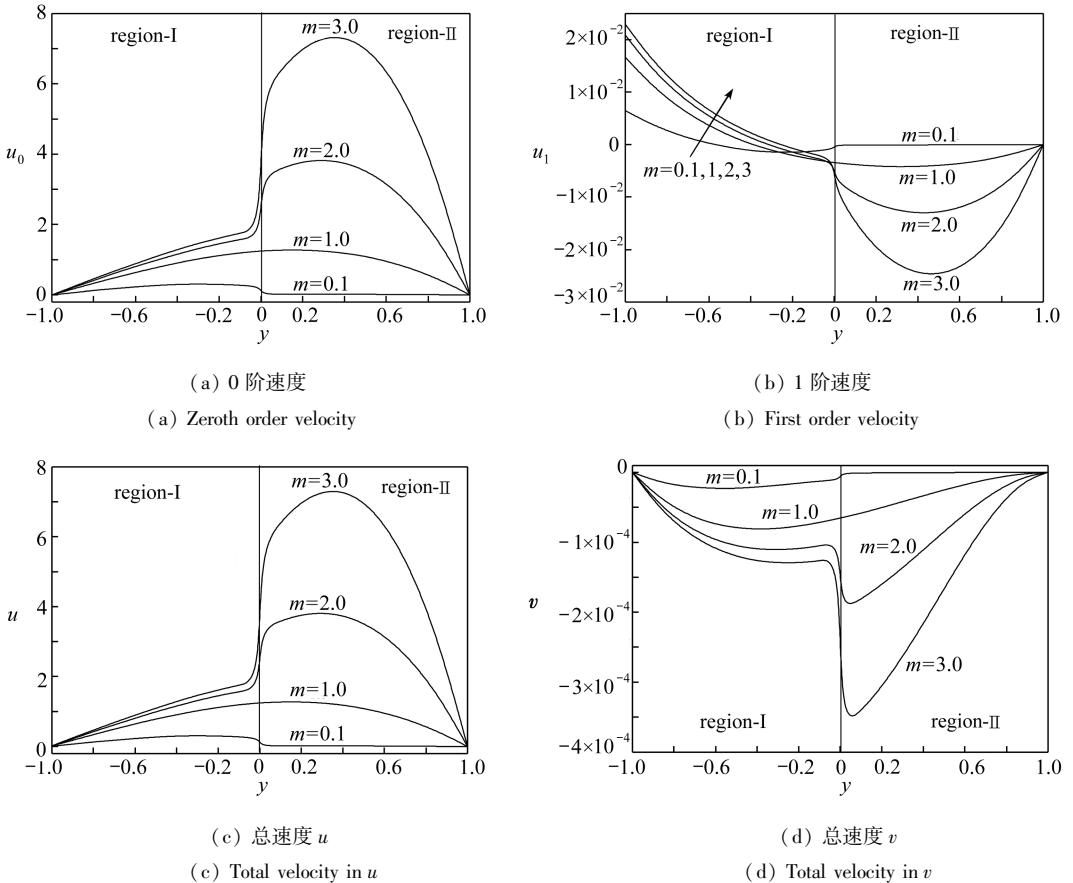
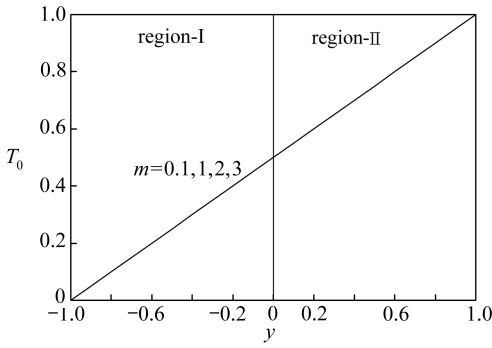


图3 不同粘度比时的速度分布

Fig. 3 Velocity profiles for different values of viscosity ratios

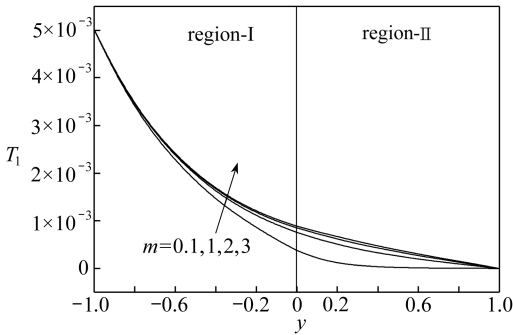


(a) 0 阶温度

(a) Zeroth order temperature

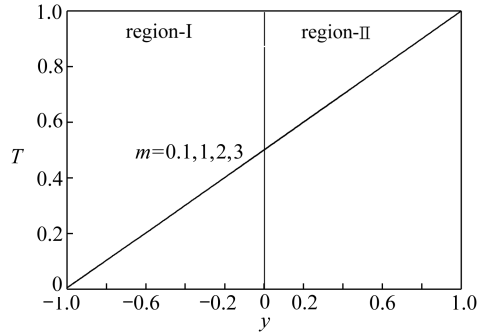
而在区域II中速度反而受到抑制. 图 3(c) 示出粘度比  $m$  对总速度  $u$  影响, 它类似于 0 阶速度  $u_0$ . 从物理角度来说, 粘度比的增大, 与区域 II 相比较, 区域 I 中的流体变得更粘稠, 速度随之减小. 图 3(d) 示出, 粘度比削弱了垂直于通道长度方向的流体速度  $v$ , 在区域 II 比区域 I 的影响更甚.

图 4(a) 示出, 粘度比  $m (= \mu^{(1)}/\mu^{(2)})$  对 0 阶温度  $T_0$  分布没有影响. 由图 4(b) 可以看到, 随着粘度比的增大, 1 阶温度  $T_1$  以  $10^{-3}$  数量级增大. 图 4(c) 示出, 粘度比对总温度  $T$  的影响, 类似于 0 阶温度  $T_0$ .



(b) 1 阶温度

(b) First order temperature



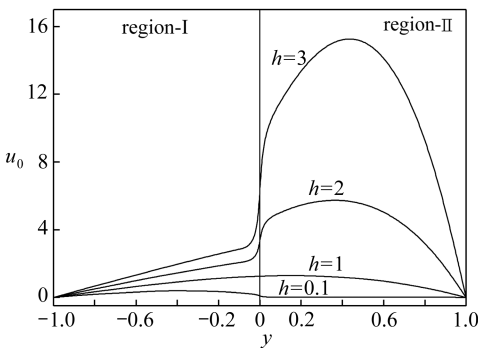
(c) 总温度

(c) Total temperature

图 4 不同粘度比时的温度分布

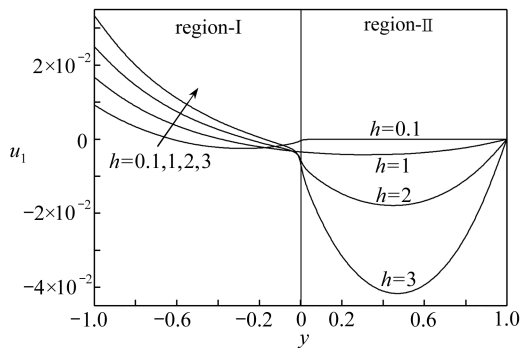
Fig. 4 Temperature profiles for different values of viscosity ratios

图 5 表明, 宽度比  $h (= h^{(2)}/h^{(1)})$  对速度分布的影响, 类似于粘度比对速度分布的影响. 从图 5(a) 可以看出, 宽度比  $h$  对 0 阶速度  $u_0$  的影响: 两个区域的速度都得到了提升, 对区域 II 的影响更明显. 图 5(b) 示出, 随着宽度比的增大, 1 阶速度  $u_1$  在区域 I 中是增大的, 而在区域 II 中是减小的. 图 5(c) 可看出, 宽度比  $h$  对总速度  $u$  的影响, 类似于对 0 阶速度  $u_0$  的影响. 图 5(d) 示出, 随着宽度比  $h$  的增大, 两个区域中垂直于通道长度的流体速度  $v$  都在减小, 区域 II 更甚.



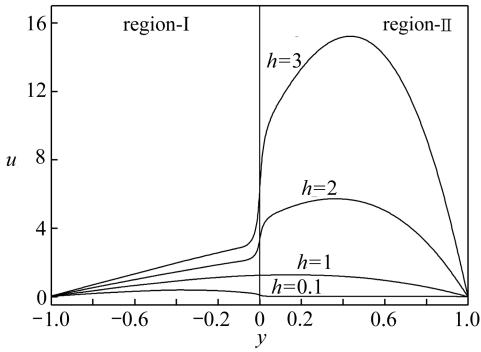
(a) 0 阶速度

(a) Zeroth order velocity

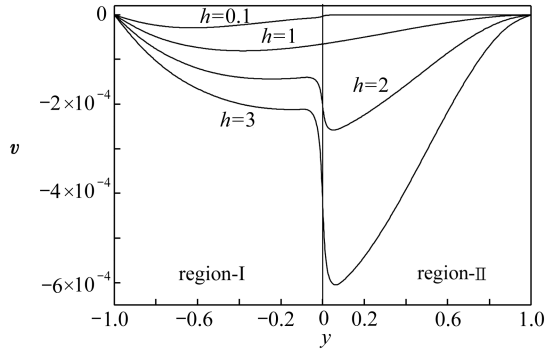


(b) 1 阶速度

(b) First order velocity



(c) 总速度  $u$   
(c) Total velocity in  $u$



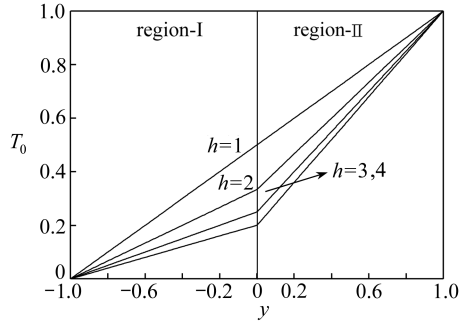
(d) 总速度  $v$   
(d) Total velocity in  $v$

图5 不同宽度比时的速度分布

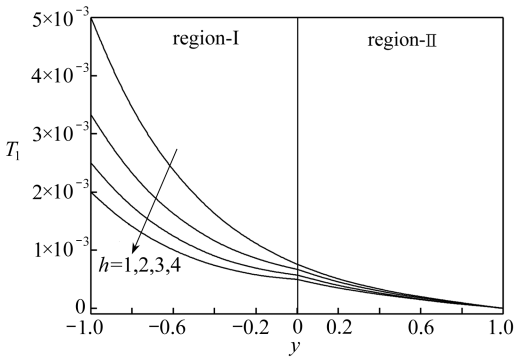
Fig. 5 Velocity profiles for different values of width ratios

图6(a)给出了宽度比  $h$  对0阶温度场  $T_0$  的影响:0阶温度场  $T_0$  随着  $h$  的增大而减小.图6(b)示出,随着宽度比  $h$  的增大,两个区域中的1阶温度  $T_1$  都以  $10^{-3}$  数量级在减小,且对波状壁面的影响更大.图6(c)示出了宽度比  $h$  对总温度  $T$  的影响,类似于对0阶温度  $T_0$  的影响.

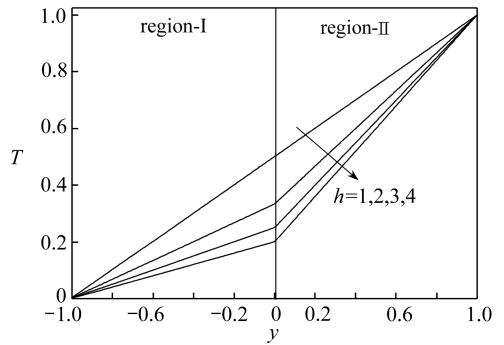
图7(a)表明流体的0阶速度  $u_0$ ,随着导电率  $k(=k^{(2)}/k^{(1)})$  的增大而增大.从图7(b)可以看出导电率对1阶速度  $u_1$  的影响:区域I(约在  $y=-1$  到  $y=-0.4$ ) 中的速度在增大,区域II中的速度在减小;



(a) 0阶温度  
(a) Zeroth order temperature



(b) 1阶温度  
(b) First order temperature



(c) 总温度  
(c) Total temperature

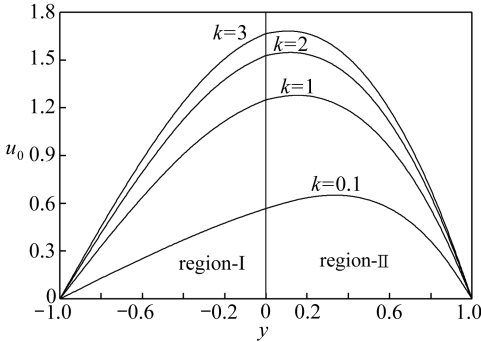
图6 不同宽度比时的温度分布

Fig. 6 Temperature profiles for different values of width ratios

对波状壁面的影响甚于对平面壁面的影响.图7(c)显示了导电率对总速度  $u$  的影响,类似于对0阶速度  $u_0$  的影响.由图7(d)可以看出,导电率  $k$  对流体垂直于通道长度方向总速度  $v$  的影响:速度  $v$  随着导电率的增大都在减小,区域I中的变化优势越发明显.

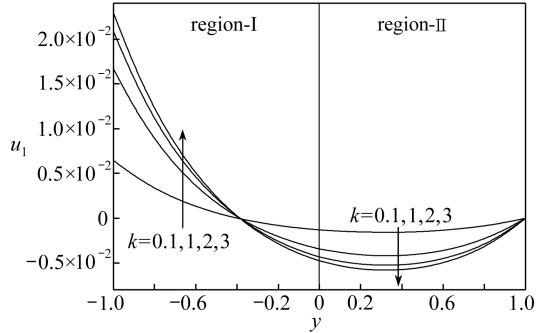
图8示出了导电率  $k$  对0阶、1阶和总温度  $T$  的影响.随着导电率  $k$  的增大,0阶温度和总温

度都在上升(见图 8(a)至图 8(c)).图 8(b)示出了导电率  $k$  对 1 阶温度  $T_1$  的影响:当导电率  $k$  增大时,1 阶温度  $T_1$  在区域 I 中是增大的,在区域 II 中没有变化;波状壁面附近变化优势越发明显.



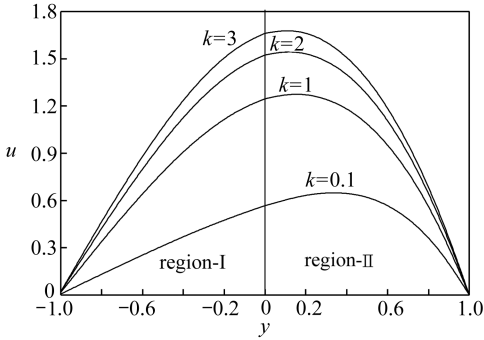
(a) 0 阶速度

(a) Zeroth order velocity



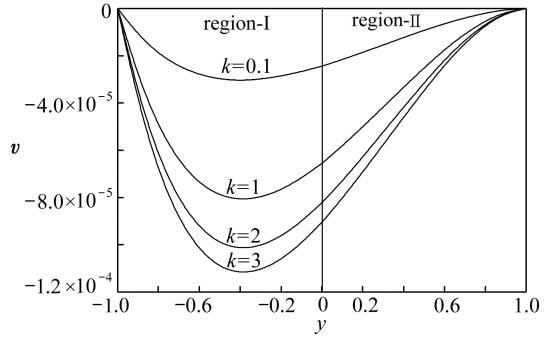
(b) 1 阶速度

(b) First order velocity



(c) 总速度  $u$

(c) Total velocity in  $u$

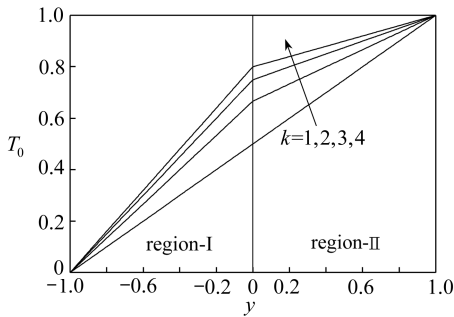


(d) 总速度  $v$

(d) Total velocity in  $v$

图 7 不同导电率时的速度分布

Fig. 7 Velocity profiles for different values of conductivity ratios



(a) 0 阶温度

(a) Zeroth order temperature

图 9(a)显示,频率参数  $\omega$  的变化对 0 阶速度  $u_0$  没有影响.从图 9(b)可以看出频率参数对 1 阶速度  $u_1$  的影响:区域 I (约在  $-1 \leq y \leq -0.2$ ) 中  $u_1$  减小,区域 II (约在  $-0.2 \leq y \leq 1$ ) 中  $u_1$  反而增大.图 9(c)表明频率对总速度  $u$  没有影响.图 9(d)给出了垂直于通道长度方向速度  $v$  的变化:两个区域中的速度  $v$  都以  $10^{-4}$  数量级随着频率参数  $\omega$  的增大而增大.

从图 10(a)可以看到,频率参数  $\omega$  对 0 阶温度  $T_0$  没有影响.从图 10(b)示出,当频率参数  $\omega$  增大时,两个区域中的 1 阶温度都在下降;且对区域 I 的影响更有效.从图 10(c)可以看出,频率参数  $\omega$  对总温度  $T$  没有影响.

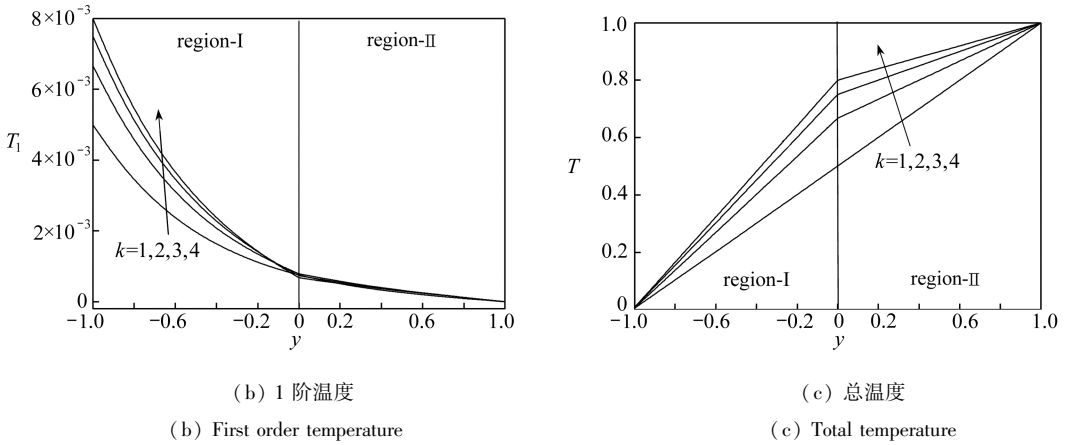


图 8 不同导电率时的温度分布

Fig. 8 Temperature profiles for different values of conductivity ratios

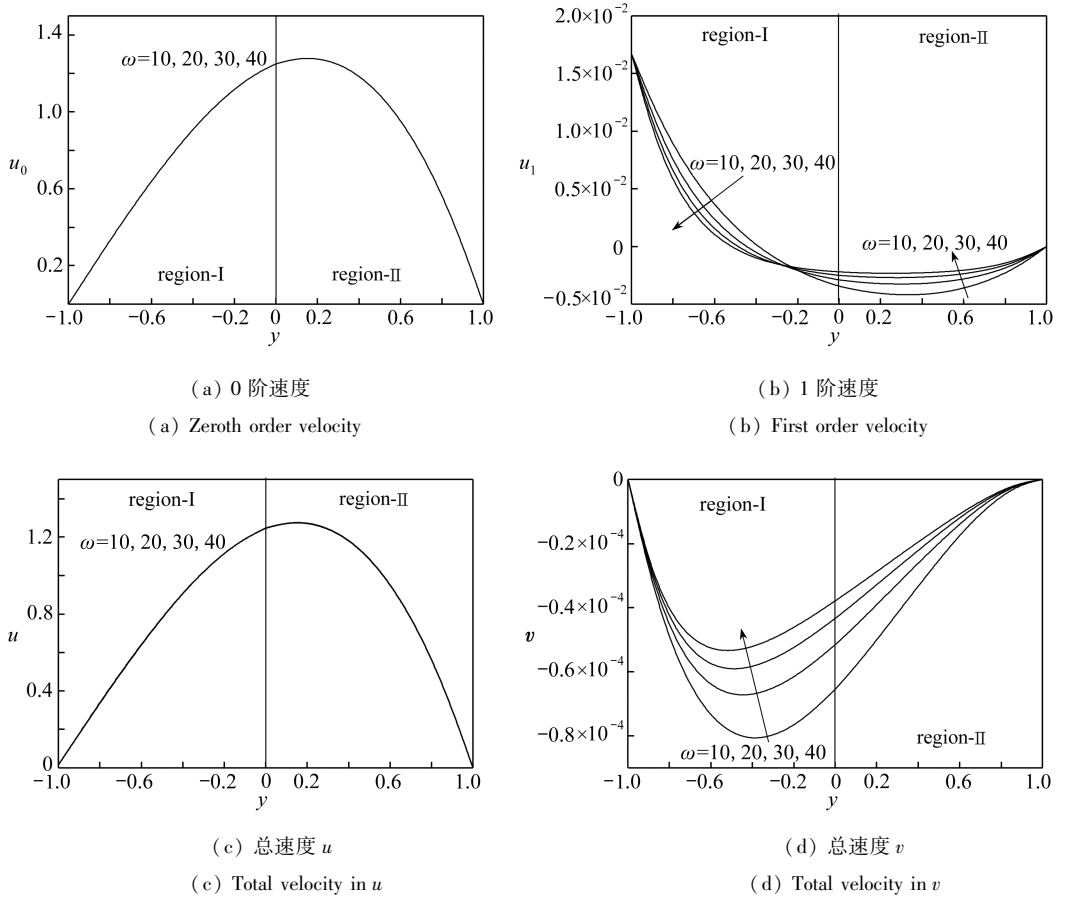
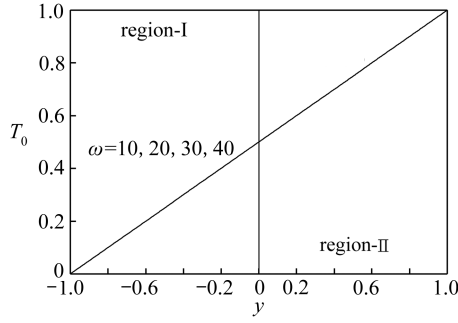


图 9 不同频率参数时的速度分布

Fig. 9 Velocity profiles for different values of frequency parameters

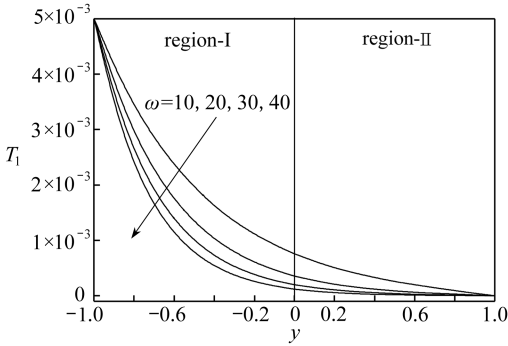
图 11 示出了通道壁上 Nusselt 数  $Nu$  的变化. 可以看出, Grashof 数  $Gr$  和粘度比  $m$  对 Nusselt 数  $Nu$  没有影响. 波状壁面上的 Nusselt 数  $Nu_w$ , 随着宽度比  $h$  的增大而减小; 平面壁面上的 Nusselt 数  $Nu_f$ , 反而增大. 随着导电率  $k$  的增大, 波状壁面上的 Nusselt 数  $Nu_w$  增大, 平面壁上

的 Nusselt 数  $Nu_f$  减小.



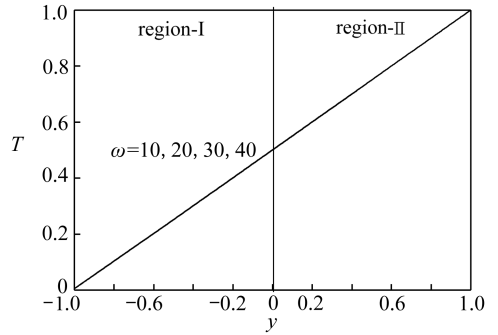
(a) 0 阶温度

(a) Zeroth order temperature



(b) 1 阶温度

(b) First order temperature

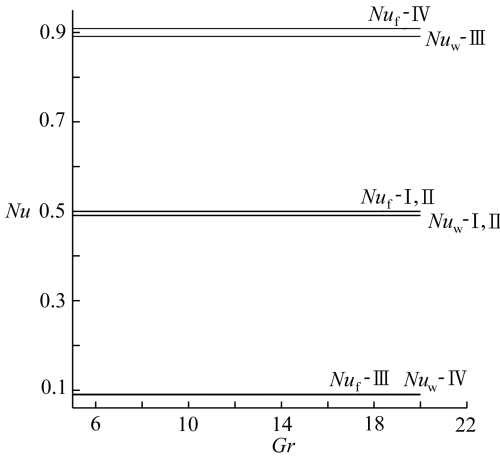


(c) 总温度

(c) Total temperature

图 10 不同频率参数时的温度分布

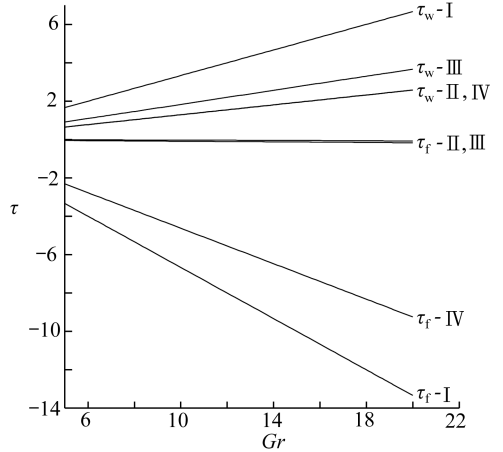
Fig. 10 Temperature profiles for different values of frequency parameters



	I	II	III	IV
$m$	1	0.1	1	1
$h$	1	1	0.1	1
$k$	1	1	1	0.1

图 11 Nusselt 数分布图

Fig. 11 Nusselt number profiles



	I	II	III	IV
$m$	1	0.1	1	1
$h$	1	1	0.1	1
$k$	1	1	1	0.1

图 12 表面摩擦力分布图

Fig. 12 Skin friction profiles



图 12 给出了通道壁面上摩擦力  $\tau$  的变化. Grashof 数、粘度比  $m$ 、宽度比  $h$  和导电率  $k$  都使波状壁面的摩擦力  $\tau_w$  增大,而使平面壁面的摩擦力  $\tau_f$  减小.

表 1 不同 Grashof 数时温度场的变化

Table 1 Values of the temperature field at different values of Grashof number

y	$T_0$			$T_1$			$T_2$		
	Gr = 5, 10, 20	Gr = 5	Gr = 10	Gr = 20	Gr = 5	Gr = 10	Gr = 20		
-1	0	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005		
-0.8	0.1	0.003 44	0.003 44	0.003 44	0.103 44	0.103 44	0.103 44		
-0.6	0.2	0.002 36	0.002 36	0.002 36	0.202 36	0.202 36	0.202 36		
-0.4	0.3	0.001 62	0.001 62	0.001 62	0.301 62	0.301 62	0.301 62		
-0.2	0.4	0.001 11	0.001 11	0.001 11	0.401 11	0.401 11	0.401 11		
0	0.5	7.536 E-4	7.551E-4	7.581E-4	0.500 75	0.500 76	0.500 76		
0.2	0.6	5.047 E-4	5.061E-4	5.089E-4	0.600 50	0.600 51	0.600 51		
0.4	0.7	3.270 E-4	3.281E-4	3.303E-4	0.700 33	0.700 33	0.700 33		
0.6	0.8	1.953 E-4	1.961E-4	1.976E-4	0.800 20	0.800 20	0.800 20		
0.8	0.9	9.124 E-5	9.162E-5	9.238E-5	0.900 09	0.900 09	0.900 09		
1	1	0	0	0	1	1	1		

表 1 给出了温度场关系 Grashof 数的变化. Grashof 数对 0 阶温度  $T_0$  没有影响. 从表 1 可以看出,随着 Grashof 数的增大,1 阶温度和总温度都以  $10^{-4}$  数量级在提高.

## 4 结 论

本文研究互不相溶粘性流体,在一个一面是不规则壁面、相对的另一面是平滑壁面的二维通道中,作不定常的混合对流问题.采用摄动技术,导出了流场和热传导的近似解.得到如下有物理意义的结论:

- 1) Grashof 数、粘度比、宽度比和导电率对流体平行于流动方向的速度有促进作用,对流体垂直于通道长度方向的速度正相反.
- 2) 频率参数对平行于流动方向的速度无影响;对垂直于流动方向的速度有促进作用.
- 3) Grashof 数、粘度比和频率参数对温度场没有影响;而宽度比将使温度场下降;导电率将使温度场上升.
- 4) Grashof 数和粘度比将使 Nusselt 数保持不变;而宽度比将使波状壁面上的 Nusselt 数减小,使平面壁面上的 Nusselt 数提高;随着导电率的增大,波状壁面上的 Nusselt 数在增大,而平面壁面上的 Nusselt 数将减小.
- 5) Grashof 数、粘度比、宽度比和导电率将使波状壁面上的摩擦力增大,而使平面壁面上的摩擦力减小.

**感谢** 本文第一作者 J. C. Umavathi 感谢大学教育资助委员会(印度新德里)对开展研究工作所提供的财政资助.

## 参考文献(References):

- [1] Chiu C P, Chou H M. Transient analysis of natural convection along a vertical wavy surface in micropolar fluids[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1994, **32**(1): 19-33.
- [2] Rees D A S, Pop I. A note on free convection along a vertical wavy surface in a porous medium[J]. *American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer*, 1994, **116**(2): 505-508.

- [3] Rees D A S, Pop I. Free convection induced by a vertical wavy surface with uniform heat flux in a porous medium[J]. *American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer*, 1995, **117**(2): 547-550.
- [4] Yang Y T, Chen C K, Lin M T. Natural convection of non-Newtonian fluids along a wavy vertical plate including the magnetic field effect[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1996, **39**(13): 2831-2842.
- [5] Yao L S. Natural convection along a vertical complex wavy surface[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2005, **49**(1/2): 281-286.
- [6] Yao L S. Natural convection along a wavy surface[J]. *American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer*, 1983, **105**: 465-468.
- [7] Yao L S. A note on Prandtl's transposition theorem[J]. *American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer*, 1988, **110**: 503-507.
- [8] Yao L S, Moulic S G. Mixed convection along a wavy surface[J]. *American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer*, 1989, **111**: 974-979.
- [9] Vajravelu K, Sastri K S. Free convective heat transfer in a viscous incompressible fluid confined between a long vertical wavy wall and a parallel flat wall[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1978, **80**(2): 365-383.
- [10] Chen C K, Wang C C. Transient analysis of forced convection along a wavy surface in micropolar fluids[J]. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2000, **14**(3): 340-347.
- [11] Chen C K, Wang C C. Transient forced and free convection along a vertical wavy surface in micropolar fluids[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2001, **44**(17): 3241-3251.
- [12] Cheng C Y. Natural convection heat and mass transfer near a vertical wavy surface with constant wall temperature and concentration in a porous medium[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2000, **27**(8): 1143-1154.
- [13] Cheng C Y. Natural convection heat and mass transfer near a wavy cone with constant wall temperature and concentration in a porous medium[J]. *Mechanics Research Communications*, 2000, **27**(5): 613-620.
- [14] Malashetty M S, Umavathi J C, Leela V. Magnetoconvective flow and heat transfer between vertical wavy wall and a parallel flat wall[J]. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **6**(2): 437-456.
- [15] Fasogbon P F. Analytical studies of heat and mass transfer by free convection in a two-dimensional irregular channel[J]. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2010, **6**(4): 17-37.
- [16] Batchelor G K. *An Introduction to Fluid Dynamics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.
- [17] Ishii M. *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*[M]. Paris: Eyrolles, 1975.
- [18] Meyer H I, Garder A O. Mechanics of two immiscible fluids in porous media[J]. *Journal of Applied Physics*, 1954, **25**(11): 1400-1406.
- [19] Loharsbi J, Sahai V. Magnetohydrodynamic heat transfer in two phase flow between parallel plates[J]. *Applied Scientific Research*, 1988, **45**(1): 53-66.
- [20] Packham B A, Shail R. Stratified laminar flow of two immiscible fluids[J]. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, 1971, **69**(3): 443-448.
- [21] Malashetty M S, Leela V. Magnetohydrodynamic heat transfer in two phase flow[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1992, **30**(3): 371-377.

- [22] Malashetty M S, Umavathi J C, Prathap Kumar J. Convective flow and heat transfer in an inclined composite porous medium[J]. *Journal Porous Media*, 2001, **4**(1): 15-22.
- [23] Malashetty M S, Umavathi J C, Prathap Kumar J. Two fluid flow and heat transfer in an inclined composite porous and fluid layer[J]. *Heat and Mass Transfer*, 2004, **40**: 871-876.
- [24] Umavathi J C, Chamkha A J, Mateen A, Al-Mudhaf A. Unsteady two fluid flow and heat transfer in a horizontal channel[J]. *Heat and Mass Transfer*, 2005, **42**(2): 81-90.
- [25] Umavathi J C, Chamkha A J, Mateen A, Prathap Kumar J. Unsteady magneto hydrodynamic two fluid flow and heat transfer in a horizontal channel[J]. *International Journal of Heat and Technology*, 2008, **26**: 121-133.
- [26] Umavathi J C, Manjula M H, Pop I, Liu I C. Flow and heat transfer of couple stress viscous fluids in a vertical channel[J]. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2007, **12**(2): 537-555.
- [27] Kumar J P, Umavathi J C, Biradar B M. Mixed convective flow of immiscible viscous fluids in a vertical channel[J]. *Heat Transfer—Asian Research*, 2011, **40**(1): 1-25.
- [28] Soundalgekar V M, Deka R K, Das U N. Transient free convection flow of a viscous incompressible fluid past an infinite vertical plate with periodic heat flux[J]. *Indian Journal Engineering and Material Sciences*, 2003, **10**(5): 390-396.
- [29] Ostrach S. *An Analysis of Laminar Free-Convection Flow and Heat Transfer About a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force*[M]. NACA, TN-2635, Accession number -93R12788, Documentation ID-19930083498, 1952.

## Unsteady Mixed Convective Heat Transfer of Two Immiscible Fluids Confined Between a Long Vertical Wavy Wall and a Parallel Flat Wall

J. C. Umavathi<sup>1</sup>, LIU I-chung<sup>2</sup>, M. Shekar<sup>1</sup>

(1. *Department of Mathematics, Gulbarga University, Gulbarga, Karnataka 585 106, India;*

2. *Department of Civil Engineering, National Chi Nan University, University Road, Puli, Nantou-54561, Taiwan, China)*

**Abstract:** An analysis on the combined effects of thermal and mass convection of viscous incompressible, immiscible fluids through a vertical wavy wall and a smooth flat wall was performed. The dimensionless governing equations were perturbed into; mean part (zeroth order) and a perturbed part (first order). The first order quantities were obtained by perturbation series expansion for short wavelength, in which terms of exponential order arise. Analytical expressions for the zeroth order, first order and the total solutions were obtained. The numerical computations were presented graphically to show salient features of the fluid flow and heat transfer characteristics. Separate solutions were matched at the interface by using suitable matching conditions. The shear stress and the Nusselt number were also analyzed for different variations of the governing parameters. It is observed that Grashof number, viscosity ratio, width ratio and conductivity ratio promote the velocity parallel to the flow direction. A reversal effect is observed for the velocity perpendicular to the flow direction.

**Key words:** mixed convection; wavy wall; immiscible fluids; perturbation method