

平面 P 波在弹性介质和非饱和多孔弹性介质分界面上的传播*

陈炜昀^{1,2}, 夏唐代^{1,2}, 陈伟³, 翟朝娇^{1,2}

- (1. 浙江大学 软弱土与环境土工教育部重点实验室, 杭州 310058;
- 2. 浙江大学 岩土工程研究所, 杭州 310058;
- 3. 弗莱贝格工业大学 岩土工程研究所, 弗莱贝格 09599, 德国)

摘要: 使用线性粘滞的多孔弹性介质模型,解决在弹性介质和非饱和多孔弹性介质分界面上平面 P 波的反射与透射问题,这里的非饱和多孔介质中固体骨架被两种相互耦合的流体(液体和气体)所充满.通过势函数的方法得到了振幅反射系数与振幅透射系数.然后推导得到入射波与反射波、透射波之间能量转换情况.研究发现:用振幅比和能量比所表示的反射系数与透射系数是与入射角度、饱和度、入射频率以及上下层介质的弹性常数有关的方程式.数值计算通过图形的形式表达出来,而且入射角度、频率及饱和度对振幅和能量的反射与透射系数的影响分别进行了讨论.证明了在整个波的传播过程中分界面处并没有发生能量的耗散.

关键词: 波的反射; 波的透射; 非饱和状态; 多孔弹性力学; 波的传播; 多孔介质
中图分类号: TU443 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.07.001

符号说明

α	表示 α 相介质 ($\alpha = S, L, G$)	ψ_α	α 相的标量势函数
β	表示不同的 P 波 ($\beta = 1, 2, 3$)	H_α	α 相的矢量势函数
F	表示两相流体 ($F = L, G$)	i	$\sqrt{-1}$
ρ^α	α 相介质的物质密度	l, n	波的方向矢量值
ρ_e	弹性介质的物质密度	θ_0	P 波入射波
λ_s, μ_s	多孔介质固体骨架的 Lamé 常数	λ_e, μ_e	弹性固体的 Lamé 常数
H_u^α	α 相介质矢量势函数的 y 方向分量	H^e	弹性介质矢量势函数的 y 方向分量
n^α	α 相介质体积分数	k_{rp}	反射 P 波的波数
u^α	α 相介质位移矢量	k_{rs}	反射 S 波的波数
σ^α	α 相介质应力张量	$k_{tp\beta}$	透射 P 波的波数
σ^e	弹性介质的应力张量	k_{ts}	透射 S 波的波数

* 收稿日期: 2012-01-11; 修订日期: 2012-04-11

基金项目: 浙江省重点科技创新团队支持计划基金资助项目(2009R50050)

作者简介: 陈炜昀(1986—),男,江西丰城人,博士生(联系人. E-mail: vic_chen@126.com).

l_{rs}, l_{ts}	反射 S 波与透射 S 波的方向矢量值	$l_{ip}, l_{rp}, l_{ip\beta}$	入射 P 波、反射 P 波与透射 P 波的方向矢量值
θ_F	描述由于 F 相流体体积变化的产生能量的物质参数	$c_{ip}, c_{rp}, c_{ip\beta}$	入射 P 波、反射 P 波与透射 P 波波速
S_r	液体饱和度	c_{rs}, c_{ts}	反射 S 波与透射 S 波的波速
η^F	F 相流体的粘度	p^c	毛细压力
$A_{p\beta}^\alpha$	透射 P 波在 α 相介质中的振幅值	p_{ez}, p_{uz}	Poynting 能量矢量在弹性介质与非饱和多孔介质中的法向分量
K_α	α 相的体积模量	A_{ip}, A_{rp}	入射 P 波与反射 P 波的振幅值
k_r^F	F 相流体相对渗透系数	B_{ts}^α	透射 S 波在 α 介质中的振幅值
k	多孔介质的固有渗透系数	B_{rs}, B_{ts}	反射 S 波与透射 S 波的振幅值
ω	角频率	α_{vg}, m_{vg}	van Genuchten 模型参数
k_p	P 波的波数	k_s	S 波的波数
R	振幅反射与透射系数	c_p	P 波的相速度
E	能量反射与透射系数	c_s	S 波的相速度
F_e, F_u	在弹性固体和非饱和多孔介质中能流的时间平均值		

引 言

由于土工材料和人工材料在声学、地质勘测、地震工程及土动力学等领域建模过程中的重要性,液体饱和和多孔介质材料的动力特性目前受到广泛的关注.最近几年,关于多孔弹性介质波动现象的研究越来越多.多孔介质中的波动理论最早开始于 Biot^[1],他预测在液体饱和和多孔介质中存在有 3 种体波:快 P 波、慢 P 波和 S 波. Plona^[2] 第一次采用试验证实这 3 种波的存在.此后,弹性波在边界处的反射与透射问题被许多学者所讨论^[3-8]. Deresiewicz 等^[3-4] 研究了地震波在流体饱和多孔介质中的反射与透射.为了解释现代海洋地震学中的声波数据,Stoll 等^[5] 分析了地震波在水与沉积土的分界面上的反射与透射. Dutta 等^[6] 计算了在两种液饱和和多孔介质分界面上地震波的反射系数与透射系数. Tomar 等^[9] 丰富了这项研究,他们讨论了斜射在两个微极弹性半空间的接触面上的平面 P 波. Dai 等^[10] 解得了从弹性半空间射在双孔介质半空间表面上简谐 P 波的反射与透射系数.

然而众所周知,许多天然多孔材料如岩石、土壤和其它非人造材料都不是水饱和的.两种互不相溶的流体同时存在于多孔介质的孔隙之中,这种情况并没有在传统的 Biot 理论中讨论.由于孔隙介质中气相的存在,除了存在于饱和多孔介质中的两种 P 波(即 P1 波和 P2 波)和一种剪切以外,另一种 P 波型(即 P3 波)将出现. Brutsaert^[11] 第一次预测在非饱和颗粒介质中存在 1 种 S 波和 3 种 P 波. Berryman 等^[12] 后来得到一组可以描述非饱和多孔介质中体波的传播与衰减的偏微分方程.基于混合物理论, Gray^[13] 和 Muraleetharan 等^[14-15] 考虑了在不同孔隙流体分界面上的动力协调条件,从而做出了更大的贡献. Lo 等^[16] 描述了当弹性多孔介质材料由两种互不相溶的流体充满时,其波动机理受到相对饱和度和波频率的影响. Lu 等^[17] 在广义混合物理论基础^[13-15,18] 上,综合比较了混合物理论与 Biot 理论并建立了非饱和多孔介质等温的线性弹性模型. Albers^[19] 拓展了经典 Biot 模型和简化混合物模型,描述了部分饱和土中的波动问题.这些学者^[15-17,19] 讨论了液体饱和度和频率对该种介质中的 4 种体波的传播特征的影响.最近, Chen 等^[20] 发展了体波的混合物理论,考虑了液体饱和度与频率对在弹性固体介

质与非饱和多孔弹性介质分界面附近 Love 波传播的影响。

众所周知,系统研究这些体波的反射与透射问题的研究并不多,然而这类问题无论在理论水平还是实际应用角度来说都是十分重要的。Tomar 等^[21]研究了非饱和多孔介质半空间与弹性半空间分界面上入射波的反射与透射问题。他们计算了 S 波和 P 波从弹性半空间射在孔隙介质半空间分界面上的反射和透射系数。Arora 等^[22]与 Yeh 等^[23]随后研究了两个由不同流体混合物所充满的多孔弹性半空间之间的分界面的弹性波。但是液体饱和度和入射波频率对这些系数的影响没有在他们的论文中考虑到。

本文主要研究 P 波在均质弹性半空间和非饱和多孔弹性介质半空间分界面处的反射与透射现象。本研究可以用来模拟在弹性岩石层与非饱和土层分界面处的地震波。本文的计算过程是在混合物连续介质理论^[14-15,17,20]的框架内进行。通过线性粘滞多孔弹性模型^[20]分别讨论了入射波角度、液体饱和度和入射波频率对以振幅比和能量比形式存在的反射与透射系数的影响大小。本文的组织结构如下:首先,简要列出了 Chen 等^[20]提出的非饱和多孔弹性介质的波动方程;然后给出了问题的公式化并且使用数值算例来分析入射角、频率和液体饱和度对分界面处反射系数与透射系数的影响;最后给出了一系列结论。

1 运动方程

本文中,非饱和多孔介质可视为由可变形固体骨架、液相和气相组成的混合物,分别由上标“S”,“L”和“G”表示。本文使用符号 α 分别定义各相组分,即 $\alpha = S, L, G$ 。使用 n^α 表示 α 相介质的微观体积分数。另外,这 3 相组分的体积分数可以由固体基质的孔隙率 n 和饱和度 S_i 表示,即 $n^S = 1 - n$, $n^L = nS_L$ 和 $n^G = n(1 - S_L)$ 。

在混合物的连续介质理论框架内^[14-15,17],Chen 等^[20]得到了如下形式的关于各向同性的非饱和多孔弹性介质的运动方程:

$$n^S \rho^S \ddot{\mathbf{u}}^S = (r_{SS} + n^S \lambda_S + n^S \mu_S) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^S) + n^S \mu_S \nabla^2 \mathbf{u}^S + r_{SL} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^L) + r_{SG} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^G) + \xi_L(\dot{\mathbf{u}}^L - \dot{\mathbf{u}}^S) + \xi_G(\dot{\mathbf{u}}^G - \dot{\mathbf{u}}^S), \quad (1a)$$

$$n^L \rho^L \ddot{\mathbf{u}}^L = r_{SL} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^S) + r_{LL} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^L) + r_{LG} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^G) - \xi_L(\dot{\mathbf{u}}^L - \dot{\mathbf{u}}^S), \quad (1b)$$

$$n^G \rho^G \ddot{\mathbf{u}}^G = r_{SG} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^S) + r_{LG} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^L) + r_{GG} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^G) - \xi_G(\dot{\mathbf{u}}^G - \dot{\mathbf{u}}^S), \quad (1c)$$

式中, $\dot{\mathbf{u}}^\alpha$ 和 $\ddot{\mathbf{u}}^\alpha$ 表示 α 相介质的速度与加速度; ρ^α 表示 α 相介质的真实密度; n^α 表示 α 相介质的体积分数。 \mathbf{u}^α 表示各相组分的位移矢量; λ_S 和 μ_S 是多介质骨架的 Lamé 常数; ξ_L 和 ξ_G 分别为表示流体(液体和气体)与固体骨架之间的粘滞耗散的粘滞力参数; ∇^2 是 Cartesian 坐标系中的 Laplace 算子。系数 $r_{SS}, r_{LL}, r_{GG}, r_{SL}, r_{SG}, r_{LG}$ 可以通过与可测得的参数之间的关系确定,在 Chen 等^[20]中有详细讨论,并且在附录 A 中给出。

考虑的 3 相介质各位移矢量的 Helmholtz 分解形式,如下:

$$\mathbf{u}^S = \nabla \psi_S + \nabla \times \mathbf{H}_S, \quad \mathbf{u}^L = \nabla \psi_L + \nabla \times \mathbf{H}_L, \quad \mathbf{u}^G = \nabla \psi_G + \nabla \times \mathbf{H}_G, \quad (2a, b, c)$$

式中, ψ_α 和 \mathbf{H}_α ($\alpha = S, L, G$) 分别为 3 相介质的标量势函数和矢量势函数。运动方程(1a) ~ (1c)可以改写为

$$\rho^S \ddot{\psi}_S = (r_{SS} + n^S \lambda_S + 2n^S \mu_S) \nabla^2 \psi_S + r_{SL} \nabla^2 \psi_L + r_{SG} \nabla^2 \psi_G + \xi_L(\dot{\psi}_L - \dot{\psi}_S) + \xi_G(\dot{\psi}_G - \dot{\psi}_S), \quad (3a)$$

$$\rho^L \ddot{\psi}_L = r_{SL} \nabla^2 \psi_S + r_{LL} \nabla^2 \psi_L + r_{LG} \nabla^2 \psi_G - \xi_L(\dot{\psi}_L - \dot{\psi}_S), \quad (3b)$$

$$\rho^G \ddot{\psi}_G = r_{SG} \nabla^2 \psi_S + r_{LG} \nabla^2 \psi_L + r_{GG} \nabla^2 \psi_G - \xi_G(\dot{\psi}_G - \dot{\psi}_S), \quad (3c)$$

$$\rho^S \ddot{\mathbf{H}}_S = n^S \mu_S \nabla^2 \mathbf{H}_S + \xi_L (\dot{\mathbf{H}}_L - \dot{\mathbf{H}}_S) + \xi_G (\dot{\mathbf{H}}_G - \dot{\mathbf{H}}_S), \tag{3d}$$

$$\rho^L \ddot{\mathbf{H}}_L = -\xi_L (\dot{\mathbf{H}}_L - \dot{\mathbf{H}}_S), \tag{3e}$$

$$\rho^G \ddot{\mathbf{H}}_G = -\xi_G (\dot{\mathbf{H}}_G - \dot{\mathbf{H}}_S). \tag{3f}$$

式(3a) ~ (3f)解的一般形式为

$$\psi_\alpha = A_\alpha \exp[ik_p(\mathbf{l}x + n z - c_p t)], \mathbf{H}_\alpha = \mathbf{B}_\alpha \exp[ik_s \mathbf{l}x + n z - c_s t], \tag{4a,b}$$

式中, $i = \sqrt{-1}$, k_p 和 k_s 分别为 P 波和 S 波的波数; \mathbf{l} 和 n 为对应波的方向矢量; c_p 和 c_s 分别为 P 波和 S 波的相速度.

将式(4a)和式(5b)带入式(3a) ~ (3f),可以得到如下的 P 波和 S 波的特征方程:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = 0, \tag{5a,b}$$

其中

$$\begin{aligned} a_{11} &= i\omega(\xi_L + \xi_G) + \omega^2 \rho^S - k_p^2(r_{SS} + n^S \lambda_S + 2n^S \mu_S), & a_{22} &= i\omega \xi_L + \omega^2 \rho^L - k_p^2 r_{LL}, \\ a_{33} &= i\omega \xi_G + \omega^2 \rho^G - k_p^2 r_{GG}, & a_{12} &= a_{21} = -i\omega \xi_L - k_p^2 r_{SL}, \\ a_{13} &= a_{31} = -i\omega \xi_G - k_p^2 r_{SG}, & a_{23} &= a_{32} = -k_p^2 r_{LG}, \\ b_{11} &= i\omega(\xi_L + \xi_G) + \omega^2 \rho^S - n^S \mu_S k_s^2, & b_{22} &= i\omega \xi_L + \omega^2 \rho^L, \\ b_{33} &= i\omega \xi_G + \omega^2 \rho^G, & b_{12} &= b_{21} = -i\omega \xi_L, \\ b_{13} &= b_{31} = -i\omega \xi_G, & b_{23} &= b_{32} = 0. \end{aligned}$$

由式(5a,b)可以看出,在非饱和多孔弹性介质中存在 1 种 S 波和 3 种 P 波,根据它们速度降序排列分别命名为:P1 波,P2 波和 P3 波.

2 问题描述

我们考虑在一个均质弹性半空间 ($z > 0$) 和一个非饱和多孔弹性半空间 ($z < 0$) 之间沿 x 轴的平面分界面. 本文考虑的几何示意图如图 1. z 轴垂直向下并指向弹性介质. 这里讨论的反射与透射问题是在 x - z 二维平面内,P 波在弹性固体半空间中的射入角度为 θ_0 . 这样激励会产生 1 种反射 P 波,1 种反射 S 波,3 种透射 P 波和 1 种透射 S 波.

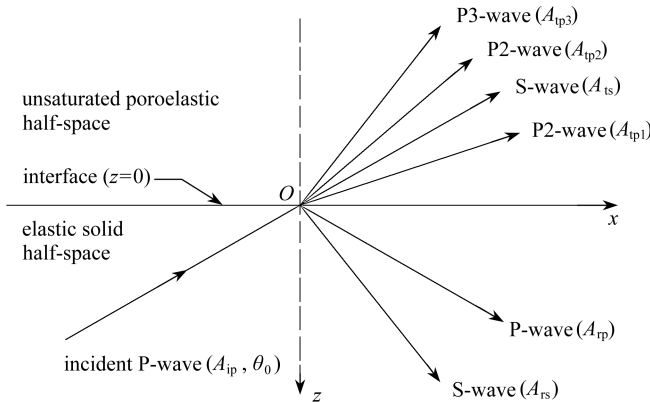


图 1 分界面上入射 P 波的反射波与透射波

Fig. 1 Reflected and transmitted waves generated by an incident P-wave at the interface

2.1 波的势函数

入射、反射与透射波的位移势函数可以表示为如下:

(i) 在弹性半空间中

$$\begin{aligned} \psi_e &= A_{ip} \exp[ik_{ip}(l_{ip}x - n_{ip}z - c_{ip}t)] + \\ &A_{rp} \exp[ik_{rp}(l_{rp}x + n_{rp}z - c_{rp}t)], \end{aligned} \quad (6a)$$

$$H_e = B_{rs} \exp[ik_{rs}(l_{rs}x + n_{rs}z - c_{rs}t)]; \quad (6b)$$

(ii) 在非饱和和多孔介质半空间中

$$\begin{aligned} \psi_u^\alpha &= A_{p1}^\alpha \exp[ik_{p1}(l_{p1}x - n_{p1}z - c_{p1}t)] + \\ &A_{p2}^\alpha \exp[ik_{p2}(l_{p2}x - n_{p2}z - c_{p2}t)] + \\ &A_{p3}^\alpha \exp[ik_{p3}(l_{p3}x - n_{p3}z - c_{p3}t)], \end{aligned} \quad (7a)$$

$$H_u^\alpha = B_{is}^\alpha \exp[ik_{is}(l_{is}x - n_{is}z - c_{is}t)], \quad (7b)$$

式中, H_e 和 H_u^α 分别是相应矢量势函数 y 方向的分量; 下标 i, r, t 分别对应入射、反射、透射的量值; k_{rp} 和 k_{rs} 分别为反射 P 波和反射 S 波波数; $k_{p\beta}$ 和 k_{is} 分别为 3 种透射 P 波和 1 种透射 S 波的波数; c_{rs} 和 c_{is} 分别是反射 S 波和透射 S 波的波速; c_{ip}, c_{rp} 和 $c_{p\beta}$ 分别为入射 P 波、反射 P 波和透射 P 波波速。

用来描述入射角、反射角和透射角之间关系的 Snell 定律如下:

$$l_{ip}k_{ip} = l_{rp}k_{rp} = l_{rs}k_{rs} = l_{p1}k_{p1} = l_{p2}k_{p2} = l_{p3}k_{p3} = l_{is}k_{is}. \quad (8)$$

由式(5a, b)可以得到式(7a)和式(7b)中不同幅值大小之间的关系式如下:

$$\delta_{L\beta} = \frac{A_{p\beta}^L}{A_{p\beta}^S} = \frac{a_{13}a_{22} - a_{23}a_{12}}{a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}}, \quad \delta_{G\beta} = \frac{A_{p\beta}^G}{A_{p\beta}^S} = \frac{a_{32}a_{21} - a_{22}a_{31}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} \quad (\beta = 1, 2, 3), \quad (9a, b)$$

$$\delta_{Ls} = \frac{B_{is}^L}{B_{is}^S} = -\frac{b_{22}}{b_{21}}, \quad \delta_{Gs} = \frac{B_{is}^G}{B_{is}^S} = \frac{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}}{b_{13}b_{22}}. \quad (9c, d)$$

2.2 边界条件

不同幅值 $A_{rp}, B_{rs}, A_{p1}^S, A_{p2}^S, A_{p3}^S$ 和 B_{is}^S 可以通过均质弹性固体半空间和非饱和和多孔弹性半空间之间的分界面处 ($z = 0$) 的边界条件确定. 在平面分界面处的边界条件为: 法向应力连续、切向应力连续和切向位移连续, 即

$$\boldsymbol{\sigma}_{zz}^e = \boldsymbol{\sigma}^S + \boldsymbol{\sigma}^L + \boldsymbol{\sigma}^G, \quad \boldsymbol{\sigma}_{xz}^e = \boldsymbol{\sigma}_{xz}^S, \quad \mathbf{u}_z^e = \mathbf{u}_z^S, \quad \mathbf{u}_x^e = \mathbf{u}_x^S, \quad \mathbf{u}_y^e = \mathbf{u}_y^L, \quad \mathbf{u}_z^e = \mathbf{u}_z^G. \quad (10)$$

式(10)中的应力张量采用以下形式^[20]:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^S = [(r_{ss} + n^S \lambda_s) \nabla^2 \psi_u^S + r_{sL} \nabla^2 \psi_u^L + r_{sG} \nabla^2 \psi_u^G] \delta_{ij} + 2n^S \mu_s \varepsilon_{ij}, \quad (11a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^L = r_{sL} \nabla^2 \psi_u^S + r_{LL} \nabla^2 \psi_u^L + r_{LG} \nabla^2 \psi_u^G, \quad (11b)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^G = r_{sG} \nabla^2 \psi_u^S + r_{LG} \nabla^2 \psi_u^L + r_{GG} \nabla^2 \psi_u^G, \quad (11c)$$

式中 δ_{ij} 表 Kronecker 符号. 采用势函数的形式, 边界条件(10)可以表示为

$$\begin{aligned} \lambda_e \nabla^2 \psi_e + 2\mu_e \left(\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_e}{\partial z \partial x} \right) = \\ (r_{ss} + r_{sL} + r_{sG} + n^S \lambda_s) \nabla^2 \psi_u^S + (r_{sL} + r_{LL} + r_{LG}) \nabla^2 \psi_u^L + \\ (r_{sG} + r_{LG} + r_{GG}) \nabla^2 \psi_u^G + 2n_0^S \mu_s \left(\frac{\partial^2 \psi_u^S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_u^S}{\partial z \partial x} \right), \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\mu_e \left[2 \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 H_e}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_e}{\partial z^2} \right] = n_0^S \mu_s \left[2 \frac{\partial^2 \psi_u^S}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 H_u^S}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_u^S}{\partial z^2} \right], \quad (12b)$$

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial z} + \frac{\partial H_e}{\partial x} = \frac{\partial \psi_u^S}{\partial z} + \frac{\partial H_u^S}{\partial x}, \quad (12c)$$

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial x} - \frac{\partial H_e}{\partial z} = \frac{\partial \psi_u^S}{\partial x} - \frac{\partial H_u^S}{\partial z}, \quad (12d)$$

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial z} + \frac{\partial H_e}{\partial x} = \frac{\partial \psi_u^L}{\partial z} + \frac{\partial H_u^L}{\partial x}, \quad (12e)$$

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial z} + \frac{\partial H_e}{\partial x} = \frac{\partial \psi_u^G}{\partial z} + \frac{\partial H_u^G}{\partial x}. \quad (12f)$$

将式(4a,b)带入边界条件(12a)~(12f)中,并且考虑 Snell 定律(8),我们可以得到如下矩阵关系式:

$$\mathbf{MN} = A_{ip}\mathbf{Q}, \quad (13)$$

式中, $\mathbf{N} = [A_{rp}, B_{rs}, A_{p1}^S, A_{p2}^S, A_{p3}^S, B_{ts}^S]^T$; 矩阵 \mathbf{M} 和 \mathbf{Q} 的系数在附录 B 中详细给出. 假设入射波的振幅值 A_{ip} 等于 1, 则可解出矩阵 \mathbf{N} 中的元素值, 并可看作是边界面上的振幅反射与透射系数 ($R_{rp}, R_{rs}, R_{p1}, R_{p2}, R_{p3}$ 和 R_{ts}).

2.3 能流考虑

同样, 计算在分界面上入射波能流在各个反射波与透射波之间的分配情况也是有益的, 且具有一定的物理意义的. Poynting 能量矢量在分界面上的法向分量是连续的并可以表示为

$$p_{ez} = \sigma_{xz}^e \dot{u}_x^e + \sigma_{zz}^e \dot{u}_z^e \quad (\text{弹性半空间}), \quad (14a)$$

$$p_{uz} = \sigma_{xz}^S \dot{u}_x^S + \sigma_{zz}^S \dot{u}_z^S + \sigma_{xz}^L \dot{u}_x^L + \sigma_{zz}^G \dot{u}_z^G \quad (\text{非饱和多孔介质半空间}). \quad (14b)$$

这些能量流相应的时间平均值可表示为

$$F_e = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} p_{ez} dt, \quad F_u = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} p_{uz} dt. \quad (15a,b)$$

考虑式(2a,b,c), (4a,b), (6a)~(7b)和(11a)~(11c), 能量流被分配在不同波模式下的各个不同组分中, 相应的能量反射系数与透射系数定义为

$$E_{rp} = \frac{F_{rp}}{F_{ip}} = R_{rp}^2, \quad (16a)$$

$$E_{rs} = \frac{F_{rs}}{F_{ip}} = \frac{\mu_e n_{rs} k_{rs}^3 R_{rs}^2}{(\lambda_e + 2\mu_e) n_{ip} k_{ip}^3}, \quad (16b)$$

$$E_{p1} = \frac{F_{p1}}{F_{ip}} = \frac{[(2n^S \mu_s + n^S \lambda_s + r_{ss} + 2r_{sl} \delta_{L1} + 2r_{sg} \delta_{G1} + 2r_{lg} \delta_{G1} \delta_{L1} + r_{ll} \delta_{L1}^2 + r_{cg} \delta_{G1}^2) n_{ip1} k_{ip1}^3 R_{p1}^2]}{(\lambda_e + 2\mu_e) n_{ip} k_{ip}^3}, \quad (16c)$$

$$E_{p2} = \frac{F_{p2}}{F_{ip}} = \frac{[(2n^S \mu_s + n^S \lambda_s + r_{ss} + 2r_{sl} \delta_{L2} + 2r_{sg} \delta_{G2} + 2r_{lg} \delta_{G2} \delta_{L2} + r_{ll} \delta_{L2}^2 + r_{cg} \delta_{G2}^2) n_{ip2} k_{ip2}^3 R_{p2}^2]}{(\lambda_e + 2\mu_e) n_{ip} k_{ip}^3}, \quad (16d)$$

$$E_{p3} = \frac{F_{p3}}{F_{ip}} = \frac{[(2n^S \mu_s + n^S \lambda_s + r_{ss} + 2r_{sl} \delta_{L3} + 2r_{sg} \delta_{G3} + 2r_{lg} \delta_{G3} \delta_{L3} + r_{ll} \delta_{L3}^2 + r_{cg} \delta_{G3}^2) n_{ip3} k_{ip3}^3 R_{p3}^2]}{(\lambda_e + 2\mu_e) n_{ip} k_{ip}^3}, \quad (16e)$$

$$E_{ts} = \frac{F_{ts}}{F_{ip}} = \frac{n^S \mu_s n_{ts} k_{ts}^3 R_{ts}^2}{(\lambda_e + 2\mu_e) n_{ip} k_{ip}^3} \quad (16f)$$

Poynting 能量矢量的法向分量连续性证明了分界面处的能量守恒, 可以表述为

$$E_{rp} + E_{rs} + E_{p1} + E_{p2} + E_{p3} + E_{ts} = 1. \quad (17)$$

3 数值计算与讨论

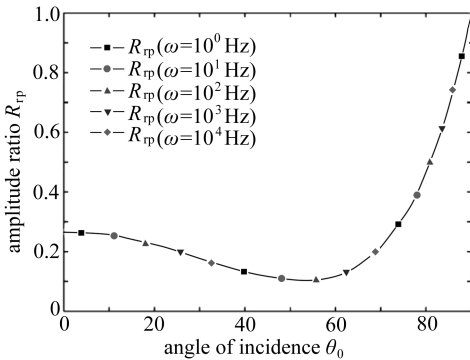
在本节中, 运用 MATLAB 程序中的数值算例分别分析了振幅反射与透射系数、能量反射与透射系数受到入射角度、入射波频率以及多孔介质液体饱和度的影响情况. 非饱和多孔弹性半空间的物理参数选自文献[20], 并在下面列出:

(i) 非饱和多孔弹性半空间

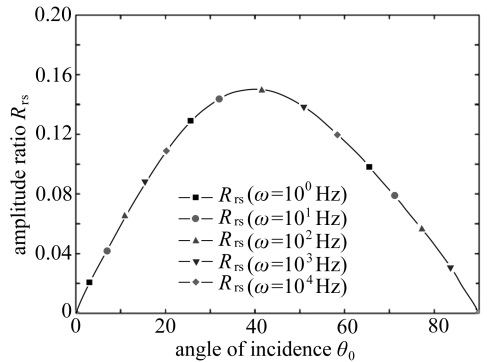
$$\begin{aligned} n &= 0.3, \rho^S = 2700 \text{ kg/m}^3, \rho^L = 1000 \text{ kg/m}^3, \rho^G = 1.2 \text{ kg/m}^3, \\ K_S &= 35 \text{ GPa}, K_L = 2.2 \text{ GPa}, K_G = 0.1 \text{ MPa}, k = 3.0 \times 10^{-13} \text{ m}^2, \\ \eta^G &= 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}, \eta^L = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}, \\ \lambda_S &= 9.0 \text{ GPa}, \mu_S = 4.0 \text{ GPa}, \\ m_{vg} &= 0.5, \alpha_{vg} = 0.0001 \text{ Pa}^{-1}. \end{aligned}$$

(ii) 弹性固体半空间

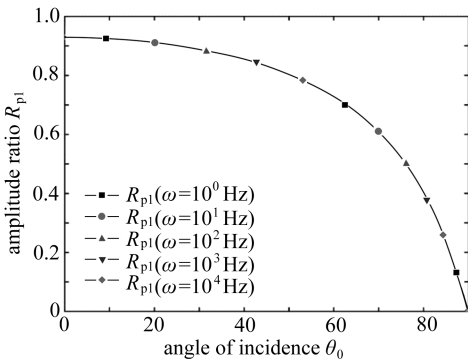
$$\mu_e = 8 \text{ GPa}, \lambda_e = 12 \text{ GPa}, \rho_e = 2700 \text{ kg/m}^3.$$



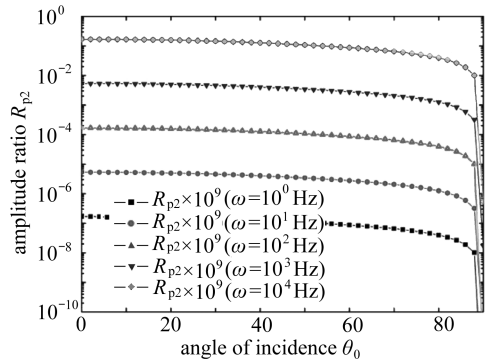
(a) 反射 P 波
(a) Reflected P-wave



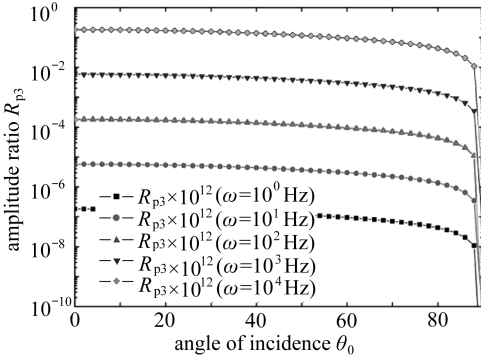
(b) 反射 S 波
(b) Reflected S-wave



(c) 透射 P1 波
(c) Transmitted P1-wave

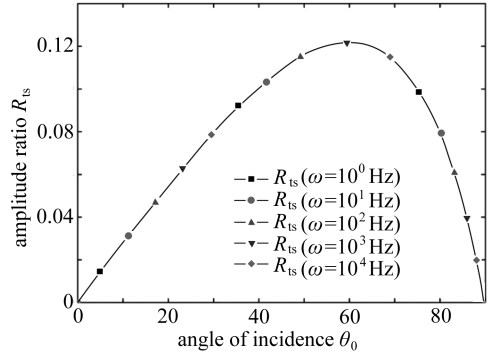


(d) 透射 P2 波
(d) Transmitted P2-wave



(e) 透射 P3 波

(e) Transmitted P3-wave



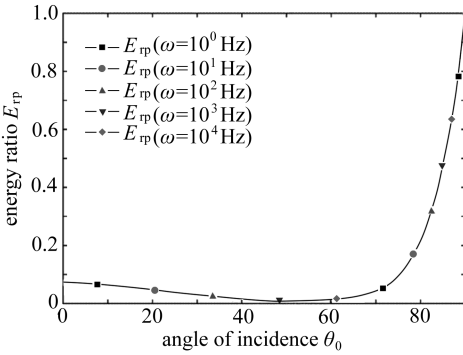
(f) 透射 S 波

(f) Transmitted S-wave

图2 频率对振幅比的影响 ($S_r = 0.8$)

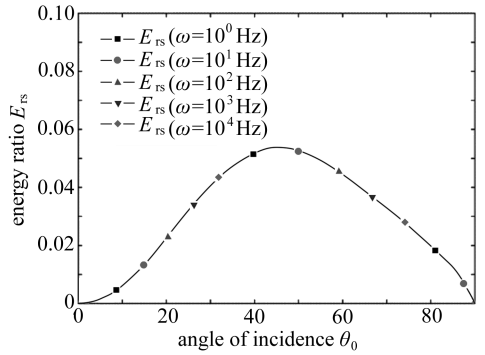
Fig. 2 Effects of frequency on the amplitude ratios ($S_r = 0.8$)

图2至图5分别描述了在分界面处以振幅比和能量比形式表示的反射系数与透射系数在不同频率和饱和度条件下随着入射角变化而变化的情况。本文的研究中,对于多孔介质中的4种体波并没有出现临界角。可以看出振幅比和能量比的大小随着弹性半空间中P波入射角度变化是均匀变化的。当入射P波垂直射在分界面上,即入射角等于0时,没有反射S波和透



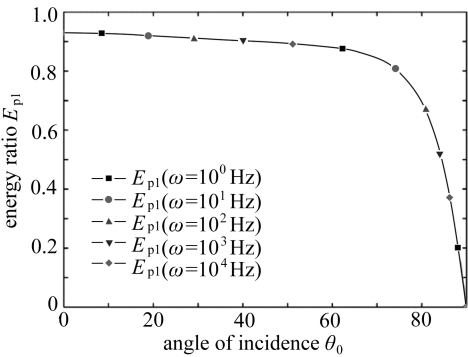
(a) 反射 P 波

(a) Reflected P-wave



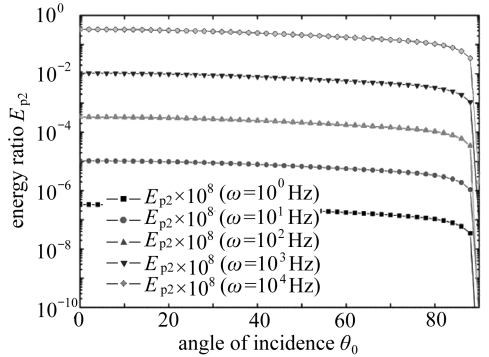
(b) 反射 S 波

(b) Reflected S-wave



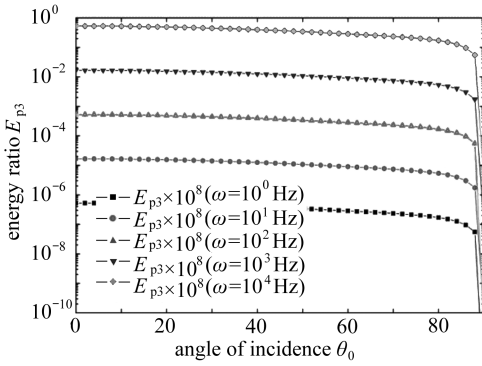
(c) 透射 P1 波

(c) Transmitted P1-wave



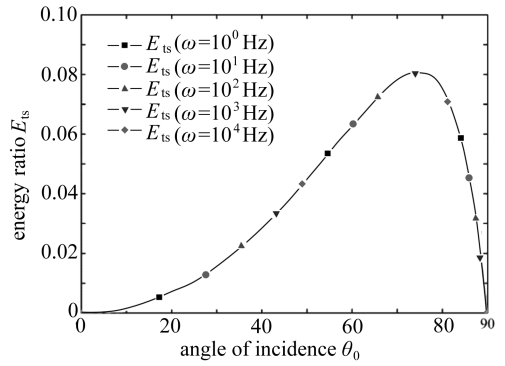
(d) 透射 P2 波

(d) Transmitted P2-wave



(e) 透射 P3 波

(e) Transmitted P3-wave



(f) 透射 S 波

(f) Transmitted S-wave

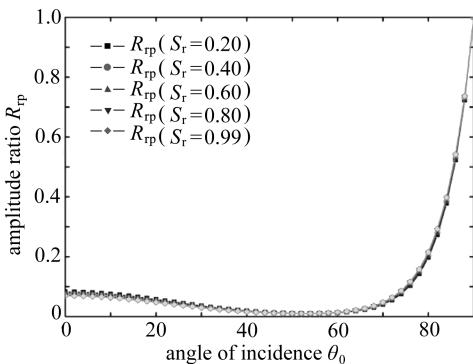
图 3 频率对能量比的影响 ($S_r = 0.8$)

Fig. 3 Effects of frequency on the energy ratios ($S_r = 0.8$)

射 S 波产生. 此时, 3 种透射 P 波的振幅和能量均处于最大值. 另外, 透射 P1 波的值最大, 比 P2 和 P3 波大几个数量级. 当入射角为 90° 时, 即为掠入射时, 只有反射 P 波存在. 比较图 2 和图 4 及图 3 和图 5 后显示: 振幅比的变化趋势与其能量比的趋势相似. 反射 P 波的振幅比和能量比都随着入射角 θ_0 增加而减少, 在 55° 附近时达到最小值, 之后逐渐增加, 当 θ_0 达到掠入射时其大小达到最大值, 即 1. 反射 S 波的振幅当入射角达到约 40° 时达到最大值. 然而对于透射 S 波, 当 $\theta_0 \approx 60^\circ$ 时, 其相应的振幅比达到最大值. 反射 S 波和透射 S 波的能量比分别在 $\theta_0 = 45^\circ$ 和 $\theta_0 = 75^\circ$ 达到最大值. 值得注意的是, 透射 P2 波和透射 P3 波的能量处在相同的数量级, 但 P2 波的振幅要比 P3 波大得多. 因此, 相比透射 P2 波而言, 透射 P3 波的能量是不能被忽略的. 因此, 本研究同样对了解反射波与透射波之间的能量分配有重要意义. 当入射角小于 75° 时, 绝大部分的入射波的能量转移到透射 P1 波中. 入射角 θ_0 大于 75° 时, 图 3(a) 和图 3(c) 及图 5(a) 和图 5(c) 显示反射 P 波能量迅速增加而同时透射 P1 波能量的相应减少. 图 3 和图 5 显示在分界面平面处的能量是严格守恒的.

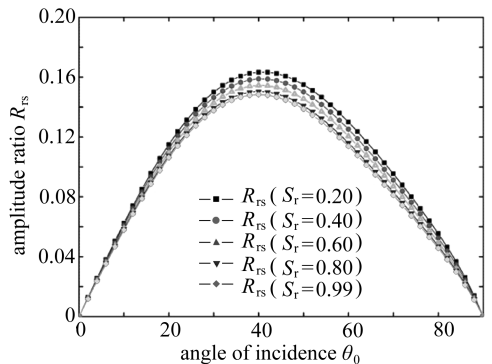
a) 频率对反射系数和透射系数的影响

需要指出的是, 由于粘滞力模型, 即附录 A 中的式 (A1h, i) 只在低频范围内是有效的^[16, 20], 在高频范围内则是与频率相关的^[1, 12, 16, 20, 24]. 在高频范围内, 弹性波的波长要接近多



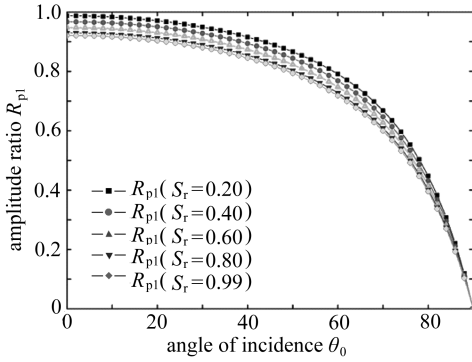
(a) 反射 P 波

(a) Reflected P-wave



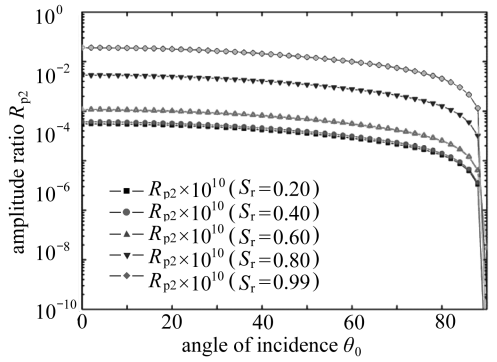
(b) 反射 S 波

(b) Reflected S-wave



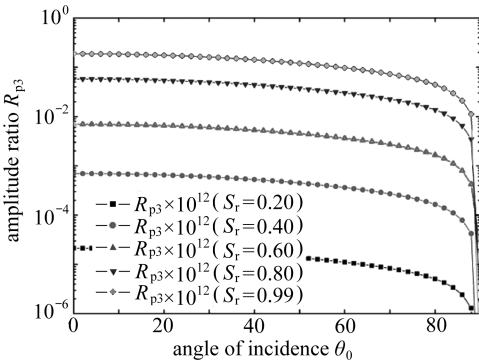
(c) 透射 P1 波

(c) Transmitted P1-wave



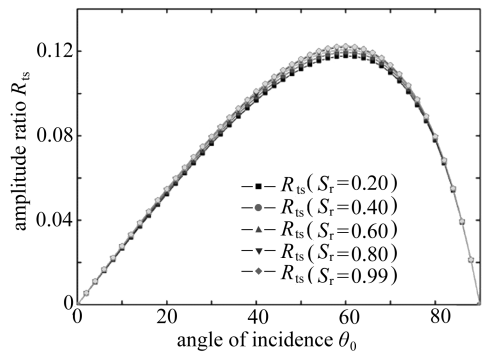
(d) 透射 P2 波

(d) Transmitted P2-wave



(e) 透射 P3 波

(e) Transmitted P3-wave



(f) 透射 S 波

(f) Transmitted S-wave

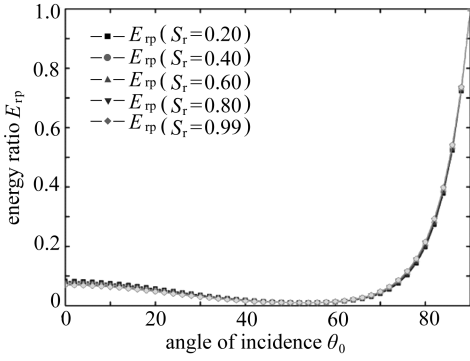
图 4 饱和度对振幅比的影响 ($\omega = 1 \text{ kHz}$)Fig. 4 Effects of water saturation on the amplitude ratios ($\omega = 1 \text{ kHz}$)

孔介质的基质的孔隙尺度. 故在高频范围内应该引入频率修正方程^[25]. 因此, 本文的工作是限定在相对较低的频率, 即低于 10kHz, 这个覆盖了地震和声波领域中常用的频率范围. 图 2 和图 3 分别显示了入射波频率对振幅比和能量比的影响. 本次计算中, 液体饱和度设为 0.8, 且频率分别设为 1 Hz, 10 Hz, 100 Hz, 1 kHz 和 10 kHz. 图 2 和图 3 根据式 (13) 和式 (16a) 至式 (16f) 描述了计算结果. 不同曲线代表了不同频率下的计算结果. 图 2 和图 3 显示, 反射 P 波、反射 S 波、透射 P1 波和透射 S 波在本文考虑的频率范围内几乎与频率无关. 对于透射 P2 波和透射 P3 波而言, 频率越大, 其振幅和能量也越大.

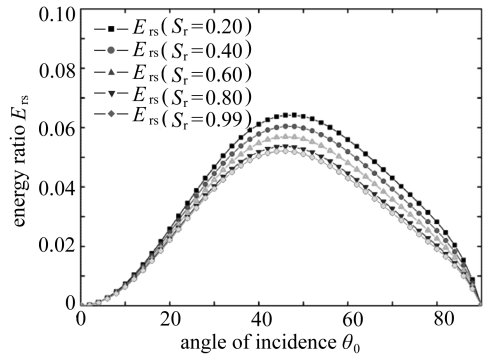
b) 液体饱和度对反射系数与透射系数的影响

为了研究液体饱和度对各种波的振幅比和能量比的影响, 入射波的频率设为 1 kHz 并且其它的物质参数保持不变. 液体饱和度分别设为 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 和 0.99. 图 4 和图 5 给出了相应的数值结果. 不同曲线表示不同液体饱和度的情况. 从图 4 和图 5 可以看出, 液体饱和度对反射 P 波、反射 S 波、透射 P1 波和透射 S 波的影响要比之前部分讨论的频率的影响要更加显著. 对于反射 P 波, 其振幅和能量随着饱和度增加而减小, 当 θ_0 接近 55° 时达到最小值, 并在之后逐渐增加. 对于反射 S 波而言, 饱和度越大时其振幅和能量都越小. 从图 4(c) 可以看出, 透射 P1 波的振幅随着饱和度增加而减小. 图 5(c) 显示, 当入射角低于 55° 时, 透射 P1 波的能量随着饱和度增加而增加; 但之后随着饱和度增加而减小. 从图 5(a) 和图 5(c) 可以看出,

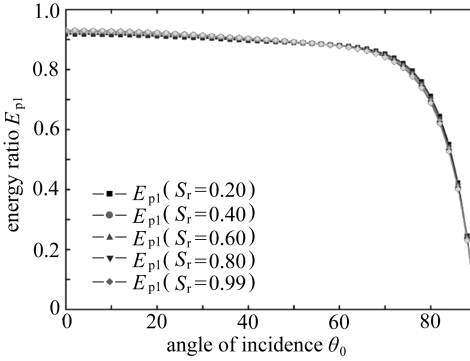
液体饱和度对反射 P 波的影响与其对透射 P1 波的影响恰好相反。同样可以看出,透射 P3 波的振幅和能量是随着饱和度增加而增加的。



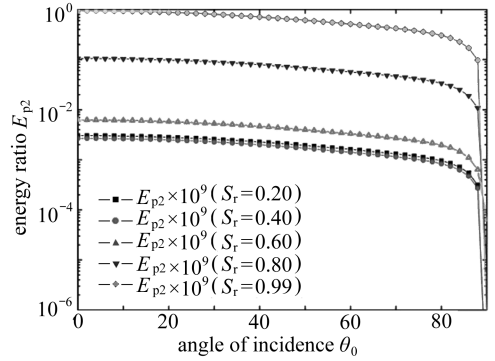
(a) 反射 P 波
(a) Reflected P-wave



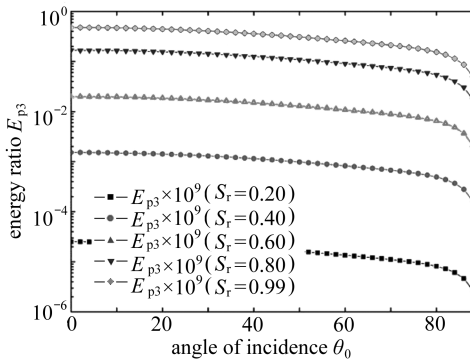
(b) 反射 S 波
(b) Reflected S-wave



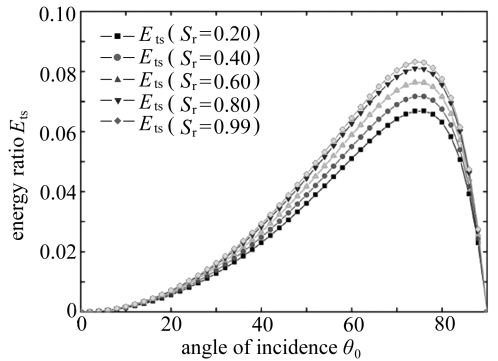
(c) 透射 P1 波
(c) Transmitted P1-wave



(d) 透射 P2 波
(d) Transmitted P2-wave



(e) 透射 P3 波
(e) Transmitted P3-wave



(f) 透射 S 波
(f) Transmitted S-wave

图 5 饱和度对能量比的影响 ($\omega = 1$ kHz)

Fig. 5 Effects of water saturation on the energy ratios ($\omega = 1$ kHz)

4 结 论

本文中,基于 Chen 等^[20]提出的多孔介质弹性理论,提出了一项关于斜入射 P 波,在弹性

固体半空间和非饱和多孔弹性介质半空间之间分界面上反射与透射问题的理论分析. 反射系数和透射系数分别采用振幅比和能量比的形式进行了研究. 为了得到能量反射与透射系数, 分别定义了上下部分介质中的能流矢量. 数值结果显示, 绝大部分的入射能量在分界面处通过模态转换进行了分配, 同时产生了反射波与透射波. 基于以上讨论, 可以得到以下主要结论:

(i) P 波垂直入射时, 只有反射 P 波和 3 种透射 P 波产生. 另外, 当掠入射时, 只产生反射 P 波并没有透射现象发生.

(ii) 分界面上的反射系数和透射系数随着入射角变化而平稳变化, 对于这 4 种透射体波并没有临界角出现.

(iii) 在相对的低频范围内 ($k \leq 10$ kHz), 数值结果显示只有透射 P2 波和透射 P3 波的振幅反射与透射系数、能量反射与透射系数受入射 P 波频率的影响.

(iv) 数值结果之间的比较表明, 振幅和能量的反射与透射系数对饱和度的变化更加敏感 (相对频率变化而言). 因此, 当我们考虑在非饱和多孔材料如部分饱和土和岩石表面处的波的反射与透射问题时, 液体饱和度的影响应该给与考虑.

(v) 结果显示在分界面处的能量比之和十分接近于 1, 这说明整个波的传播过程中没有发生能量的耗散.

附录 A

式(1a) ~ (1c) 中系数的详细表达式为^[20]

$$r_{ss} = \frac{(n^s)^2 K_s (\theta_L + K_L) (K_G + \theta_G)}{M}, \quad r_{sl} = \frac{n^s n^l K_s K_L (K_G + \theta_G)}{M}, \quad (\text{A1a, b})$$

$$\begin{cases} r_{sc} = \frac{n^s n^c K_s K_G (\theta_L + K_L)}{M}, \\ r_{ll} = \frac{n^s n^l K_L \theta_L (K_G + \theta_G) + (n^l)^2 K_s K_L (K_G + \theta_G) + n^l n^c K_s K_L \theta_L}{M}, \end{cases} \quad (\text{A1c, d})$$

$$\begin{cases} r_{lg} = \frac{n^l n^c K_s K_L K_G}{M}, \\ r_{gc} = \frac{n^s n^c K_G \theta_G (K_L + \theta_L) + n^l n^c K_s K_G \theta_G + (n^c)^2 K_s K_G (\theta_L + K_L)}{M}, \end{cases} \quad (\text{A1e, f})$$

$$M = n^s (\theta_L + K_L) (K_G + \theta_G) + n^l K_s (K_G + \theta_G) + n^c K_s (\theta_L + K_L), \quad (\text{A1g})$$

$$\xi_L = (n^l)^2 \frac{\eta^L}{kk_r^L}, \quad \xi_G = (n^c)^2 \frac{\eta^G}{kk_r^G}, \quad (\text{A1h, i})$$

式中, K_s, K_L, K_G 分别表示三相组分的压缩模量; $\theta_r (F = L, G)$ 是描述由于 F 相流体体积变化而产生相应能量的物质参数^[20]; k 是多孔介质的固有渗透系数; $\eta^F (F = L, G)$ 表示流体粘滞系数; k_r^F 表示相对渗透系数, 通常可以简化为关于饱和度的方程^[26]. 当孔隙中的液相和气相分别为液态水和潮湿空气时, 可以通过以下表达式表示^[12, 16-17, 27-28]:

$$k_r^L = \sqrt{S_r} [1 - (1 - S_r^{1/m_{vg}})^{m_{vg}}]^2, \quad k_r^G = \sqrt{1 - S_r} (1 - S_r^{1/m_{vg}})^{2m_{vg}}, \quad (\text{A2a, b})$$

式中, m_{vg} 是 van Genuchten 模型参数, 计算中需要的另一个 van Genuchten 参数 α_{vg} 可以通过毛细水压-饱和度之间关系式表示^[28]:

$$\alpha_{vg} = p_c^{-1} (S_r^{-m_{vg}^{-1}} - 1)^{1-m_{vg}}, \quad (\text{A3})$$

式中, p_c 表示毛细孔压, 即非润湿流体和润湿流体之间的压力差.

附录 B

矩阵 M 中元素的详细表达式如下:

$$\begin{aligned}
m_{11} &= -(\lambda_e + 2\mu_e n_{ip}^2)k_{ip}^2, \quad m_{12} = -2\mu_e l_{rs} n_{rs} k_{rs}^2, \\
m_{13} &= 2n^S \mu_S n_{ip1}^2 k_{ip1}^2 + (r_{SS} + n^S \lambda_S + r_{SL} + r_{SG})k_{ip1}^2 + \\
&\quad (r_{SL} + r_{LL} + r_{LG})k_{ip1}^2 \delta_{L1} + (r_{SG} + r_{LG} + r_{GG})k_{ip1}^2 \delta_{G1}, \\
m_{14} &= 2n^S \mu_S n_{ip2}^2 k_{ip2}^2 + (r_{SS} + n^S \lambda_S + r_{SL} + r_{SG})k_{ip2}^2 + \\
&\quad (r_{SL} + r_{LL} + r_{LG})k_{ip2}^2 \delta_{L2} + (r_{SG} + r_{LG} + r_{GG})k_{ip2}^2 \delta_{G2}, \\
m_{15} &= 2n^S \mu_S n_{ip3}^2 k_{ip3}^2 + (r_{SS} + n^S \lambda_S + r_{SL} + r_{SG})k_{ip3}^2 + \\
&\quad (r_{SL} + r_{LL} + r_{LG})k_{ip3}^2 \delta_{L3} + (r_{SG} + r_{LG} + r_{GG})k_{ip3}^2 \delta_{G3}, \\
m_{16} &= -2n^S \mu_S l_{is} n_{is} k_{is}^2, \quad m_{21} = 2\mu_e l_{ip} n_{ip} k_{ip}^2, \quad m_{22} = (l_{rs}^2 - n_{rs}^2) \mu_e k_{rs}^2, \quad m_{23} = 2n^S \mu_S l_{ip1} n_{ip1} k_{ip1}^2, \\
m_{24} &= 2n^S \mu_S l_{ip2} n_{ip2} k_{ip2}^2, \quad m_{25} = 2n^S \mu_S l_{ip3} n_{ip3} k_{ip3}^2, \quad m_{26} = (n_{is}^2 - l_{is}^2) n^S \mu_S k_{is}^2, \\
m_{31} &= n_{ip} k_{ip}, \quad m_{32} = l_{rs} k_{rs}, \quad m_{33} = n_{ip1} k_{ip1}, \quad m_{34} = n_{ip2} k_{ip2}, \quad m_{35} = n_{ip3} k_{ip3}, \quad m_{36} = -l_{is} k_{is}, \\
m_{41} &= -l_{ip} k_{ip}, \quad m_{42} = n_{rs} k_{rs}, \quad m_{43} = l_{ip1} k_{ip1} = l_{ip} k_{ip}, \quad m_{44} = l_{ip2} k_{ip2} = l_{ip} k_{ip}, \quad m_{45} = l_{ip3} k_{ip3} = l_{ip} k_{ip}, \\
m_{46} &= n_{is} k_{is}, \quad m_{51} = n_{ip} k_{ip}, \quad m_{52} = l_{rs} k_{rs}, \quad m_{53} = n_{ip1} \delta_{L1} k_{ip1}, \quad m_{54} = n_{ip2} \delta_{L2} k_{ip2}, \quad m_{55} = n_{ip3} \delta_{L3} k_{ip3}, \\
m_{56} &= -l_{is} \delta_{LS} k_{is}, \quad m_{61} = n_{ip} k_{ip}, \quad m_{62} = l_{rs} k_{rs}, \quad m_{63} = n_{ip1} \delta_{G1} k_{ip1}, \quad m_{64} = n_{ip2} \delta_{G2} k_{ip2}, \\
m_{65} &= n_{ip3} \delta_{G3} k_{ip3}, \quad m_{66} = -l_{is} \delta_{GS} k_{is}.
\end{aligned}$$

矩阵 Q 中元素的详细表达式如下:

$$q_1 = (\lambda_e + 2\mu_e n_{ip}^2)k_{ip}^2, \quad q_2 = 2l_{ip} n_{ip} \mu_e k_{ip}^2, \quad q_3 = n_{ip} k_{ip}, \quad q_4 = l_{ip} k_{ip}, \quad q_5 = n_{ip} k_{ip}, \quad q_6 = n_{ip} k_{ip}.$$

参考文献 (References):

- [1] Biot M A. The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid— I : low frequency range; II : higher frequency range[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, **28**(2) : 168-191.
- [2] Plona T J. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies[J]. *Applied Physics Letters*, 1980, **36**(4) : 259-261.
- [3] Deresiewicz H, Rice J T. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid— I : Reflection of plane waves at a true plane boundary[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1960, **50**(4) : 599-607.
- [4] Deresiewicz H, Rice J T. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid V. Transmission across a plane interface[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1964, **54**(1) : 409-416.
- [5] Stoll R D, Kan T K. Reflection of acoustic wave at a water-sediment interface[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1981, **70**(1) : 149-156.
- [6] Dutta N C, Ode H. Seismic reflections from a gas water contact[J]. *Geophysics*, 1983, **48**(2) : 148-162.
- [7] Wu K Y, Xue Q, Adler L. Reflection and transmission of elastic waves from a fluid-saturated porous solid boundary[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1990, **87**(6) : 2349-2358.
- [8] Santos J E. Reflection and transmission coefficients in fluid-saturated porous media[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1992, **91**(4) : 1911-1923.
- [9] Tomar S K, Gogna M L. Reflection and refraction of longitudinal wave at an interface between two micropolar elastic solids in welded contact[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1995, **97**(2) : 822-830.
- [10] Dai Z J, Kuang Z B, Zhao S X. Reflection and transmission of elastic waves at the interface between an elastic solid and a double porosity medium[J]. *International Journal of Rock*

- Mechanics and Mining Sciences*, 2006, **43**: 961-971.
- [11] Brutsaert W. The propagation of elastic waves in unconsolidated unsaturated granular mediums[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1964, **69**(2): 360-373.
- [12] Berryman J G, Thigpen L, Chin R C Y. Bulk elastic wave propagation in partially saturated porous solids[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1988, **84**(1): 360-373.
- [13] Gray W G. Thermodynamics and constitutive theory for multiphase porous-media flow considering internal geometric constraints[J]. *Advances in Water Resources*, 1999, **22**(5): 521-547.
- [14] Muraleetharan K K, Wei C. Dynamic behaviour of unsaturated porous media: governing equations using the theory of mixtures with interfaces (TMI)[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1999, **23**(13): 1579-1608.
- [15] Wei C, Muraleetharan K K. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids— I : linear poroelasticity [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2002, **40**(16): 1807-1833.
- [16] Lo W C, Majer E, Sposito G. Wave propagation through elastic porous media containing two immiscible fluids[J]. *Water Resources Research*, 2005, **41**(2): 1-20.
- [17] Lu J F, Hanyga A. Linear dynamic model for porous media saturated by two immiscible fluids [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**(9/10): 2689-2709.
- [18] Bowen R M. Compressible porous media models by use of theory of mixtures[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1982, **20**(6): 697-735.
- [19] Albers B. Analysis of the propagation of sound waves in partially saturated soils by means of a macroscopic linear poroelastic model[J]. *Transport in Porous Media*, 2009, **80**(1): 173-192.
- [20] Chen W Y, Xia T D, Hu W T. A mixture theory analysis for the surface-wave propagation in an unsaturated porous medium[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, **48**(16/17): 2402-2412.
- [21] Tomar S K, Arora A. Reflection and transmission of elastic waves at an elastic/porous solid saturated by two immiscible fluids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(7/8): 1991-2013.
- [22] Arora A, Tomar S K. Elastic waves at porous/porous elastic half-spaces saturated by two immiscible fluids[J]. *Journal of Porous Media*, 2007, **8**(10): 751-768.
- [23] Yeh C L, Lo W C, Jan C D, Yang C C. Reflection and refraction of obliquely incident elastic waves upon the interface between two porous elastic half-spaces saturated by different fluid mixtures[J]. *Journal of Hydrology*, 2010, **395**(1/2): 91-102.
- [24] Johnson D L, Koplik J, Dashen R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous-media[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, **176**: 379-402.
- [25] Lo W C, Sposito G, Majer E. Low-frequency dilatational wave propagation through unsaturated porous media containing two immiscible fluids[J]. *Transport in Porous Media*, 2007, **68**(1): 91-105.
- [26] Dullien F A L. *Porous Media Fluid Transport and Pore Structure*[M]. San Diego: Academic Press, 1992.
- [27] Coussy O. *Poromechanics*[M]. 2nd ed. Chichester: John Wiley and Sons, 2004.
- [28] van Genuchten M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1980, **44**(5): 892-898.

Propagation of Plane P-Waves at the Interface Between an Elastic Solid and an Unsaturated Poroelastic Medium

CHEN Wei-yun^{1,2}, XIA Tang-dai^{1,2}, CHEN Wei³, ZHAI Chao-jiao^{1,2}

(1. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering,
Zhejiang University, Hangzhou 310058, P. R. China;

2. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University,
Hangzhou 310058, P. R. China;

3. Institute of Geotechnical, TU Bergakademie Freiberg, Freiberg 09599, Germany)

Abstract: A linear viscoporoelastic model was developed to describe the problem of reflection and transmission of an obliquely incident plane P-wave at an interface between an elastic solid and an unsaturated poroelastic medium in which the solid matrix was filled with two weakly coupled fluids (liquid and gas). The expressions for the amplitude reflection coefficients and amplitude transmission coefficients were derived using the potential method. The present derivation was subsequently applied to study the energy conversions among the incident, reflected and transmitted wave modes. It was found that the reflection coefficients and transmission coefficients in the forms of amplitude ratios and energy ratios are functions of incident angle, liquid saturation, frequency of incident wave and elastic constants of the upper and lower media. The numerical computations are performed graphically, and the effects of the incident angle, frequency and liquid saturation on the amplitude and energy reflection and transmission coefficients are respectively discussed. It was verified that during transmission process there was no energy dissipation at the interface.

Key words: wave reflection; wave transmission; unsaturation; poroelasticity; wave propagation; porous medium