

传导-辐射和磁流体组合对磁化可渗透 平板自然对流影响的数值解法*

M·阿什拉夫¹, S·阿斯加尔^{1,2}, M·A·侯赛因^{1,3}

(1. COMSATS 信息技术学院 数学系, 泽沙赫扎德分校,
伊斯兰堡 44000, 巴基斯坦;

2. 阿卜杜勒·阿齐兹国王大学 数学系, 吉达, 沙特阿拉伯;

3. 达卡大学 数学系, 达卡, 孟加拉国)

摘要: 研究粘性、不可压缩、导电流体,在磁化可渗透竖直平板上作自然对流时,数值地分析辐射和磁流体组合的影响.采用两种方法数值地求解非相似的控制方程:1)对所有吸入参数值 ξ ,采用有限差分法;2)为小数值和大数值的吸入参数值 ξ ,分别建立起级数的渐近解.用图形和列表形式,给出 Prandtl 数 Pr ,磁 Prandtl 数 P_m ,磁力参数 S ,辐射参数 R_d ,壁面温度 θ_w 的变化,对壁面摩擦因数、热交换率和电流密度的影响.最后分析上述物理参数对速度分布、温度分布和磁场横向分量的影响.

关键词: 磁流体; 脉动; 自然对流; 磁化板; 电流密度; 热交换

中图分类号: O361.3;O461.4 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.06.005

符号说明

H_0	参考磁场	H_∞	自由流磁场
S	磁场参数	f	转换后的流函数
P_m	磁 Prandtl 数	Re_x	局部 Reynolds 数
Gr_x	局部 Grashof 数	C_{fx}	壁面摩擦因数
H_x	沿壁面的切向磁场	H_y	垂直壁面的法向磁场
Nu_x	局部 Nusselt 数	\bar{u}	轴向速度(m/s)
\bar{v}	法相速度(m/s)	\bar{T}_w	壁面温度(K)
\bar{T}_∞	流体的环境温度(K)	V_0	壁面的质量流量
R_d	Plank 数(辐射-传导参数)	\bar{x}	轴向距离(m)
\bar{y}	法向距离(m)	g	重力加速度(m/s ²)
ψ	流体的流函数(m ² /s)	ϕ	磁场变换后流函数
ξ	蒸发参数	α	热扩散系数(m ² /s)

* 收稿日期: 2011-06-15; 修订日期: 2012-01-04

作者简介: Muhammad Ashraf(联系人. E-mail:mashraf682003@yahoo.com).

本文原文为英文,吴承平译,张禄坤校.

μ	动力学粘度 (Pa·s)	η	相似变换
ν	运动学粘度 (m ² /s)	θ	无量纲的温度函数
θ_w	壁面温度与环境温度之比	ρ	流体密度 (kg/m ³)
σ	电导率 (S/m)	σ_s	Stefan-Boltzman 常数
γ	磁扩散率	β	体积膨胀系数
$\bar{\mu}$	磁导率		
角标			
w	壁面条件	∞	环境条件

引 言

在很多工程问题中,例如型式先进的发电厂、核能火箭、高速飞行器、再入式运载工具等,运行时会出现非常高的温度,使得热辐射在热交换中显得越发重要.本文就磁化竖直多孔板上的自然对流,研究辐射和磁流体动力学的相互作用问题.在此条件下我们将阐述,过去和现在其他研究者对该领域的主要贡献. Greenspan 和 Carrier^[1] 首先在一个对称的半无限平板上,对边界层中粘性不可压缩导电流体的行为,给出了正确评价的基础.他们利用 Fourier 变换连同渐近分析法求解,并要求随着外加磁场强度的增大,平板处的速度梯度趋近于 0. Davies 在文献[2-3]中指出,随着磁场参数 S 的增大,边界层厚度和阻力系数将平稳地减小. Gribben^[4] 就外部磁流体动力学压力梯度,与沿边界距离幂次成正比时,研究了二维稳定不可压缩磁流体动力学边界层的流动问题.其后, Gribben^[5] 用渐近分析法,在外部磁场动压力梯度作用下,研究磁流体动力学边界层中稳定的不可压缩流动,并发现壁面摩擦随着磁场的增大而减小. Ramamoorthy 在文献[6]的数值研究中,对边界层中的温度分布作了适当简化,由于磁场的存在,流速因而放缓. Tan 和 Wang^[7] 讨论了热交换率随磁力参数 S 的增大而减小,从而磁场和热边界层的厚度增大. Hildyard 在文献[8]中指出, Gribben 使用的磁场边界条件不正确,并作了必要的修正,得到了大和小磁 Prandtl 数 P_m 时的近似渐近解. Ingham^[9] 就半无限的平板,在(入射角为 0 并排列磁场的)均匀导电气体流作用下,研究其边界层的流动.他得出结论:对一个给定的 Mach 数,磁场将增强,或者,对一个给定的磁场(动量和热边界层)厚度, Mach 数将下降. Glauert^[10] 在均匀的磁化平板场中研究基本的稳定流动.从该研究可以看出,当磁场参数 S 取小数值,同时,磁 Prandtl 数 P_m 取较小或较大值时,速度和磁场有效. Chawla^[11] 就磁化平板在流动方向的均匀磁场作用下,研究磁流体动力学边界层的流动.他观察到,若外加磁场的强度超过某一临界值,边界层会出现分离现象.

一些学者研究了对流和辐射共同作用下稳定不可压缩流体的流动,如 Cess^[12], Sparrow 和 Lin^[13]. Lin 和 Cebeci^[14] 研究了辐射对沿平板层流边界层的影响. Perlmutter 和 Siegal^[15] 与 Siegal 和 Keshock^[16] 研究了辐射对圆管内流动的影响. Chen^[17] 引入的辐射效应,是假设气体对管壁的热交换率与壁面温度的 4 次方成正比例,但是,这在物理上是不切实际的边界条件,因为它没有考虑别的壁面单元,对此壁面的辐射. Dussan 和 Irvine^[18] 假设辐射是线性的,利用指数 Kernal 近似计算热交换率.一个无需预知热交换系数的、更完善更现实的模型,由 Thorsen^[19] 与 Thorsen 和 Kachanagom^[20] 在研究辐射对圆管内流动热交换中首先提出; Liu 和 Thorsen^[21] 研究了平行管道间的流动.一些学者讨论了不同几何形状对热辐射的影响. Ali 等^[22] 在水平表面边界层流动中,研究了辐射的相互作用. Arpaci^[23], Cheng 和 Ozisik^[24], Sparrow 和 Cess^[25] 讨论了热辐射对垂直加热平板自由对流的影响. Soundalgekar 等^[26] 采用 Colgey-Vincenti 平衡模型,

给出了热辐射对加热垂直半无限板自由对流的影响。Hossain 和 Takhar^[27] 利用 Rosseland 扩散近似研究辐射的影响,当光密、粘性、不可压缩流体流过竖直加热板,在均匀的自由流速度和壁面温度作用下,得到了其强迫对流和自由对流时的非相似解。Aboeldahab 和 Gendy^[28] 就流过半无限竖直平板时的气体磁流体动力学自由对流问题,利用打靶法求解其高温差时的可变热物理性质。Mebine 和 Adigio^[29] 利用 Laplace 变换分析和证实了,热辐射对 Newton 加热竖直多孔平板不稳定自由对流的影响。Palani 和 Abbas^[30] 用有限元法数值求解了,磁流体动力学和辐射的组合,对脉冲启动(Rosseland 扩散)等温板自由对流的影响。Cess 等^[31] 就等温竖直平面有均匀吸入和吹出时,得到了前沿附近有效的级数解。接着,Merkin^[32] 对同样的问题进行了更详细地研究,并在有均匀吸入和吹出两种情况下,得到离前沿更长距离上有效的渐进解。Clarke^[33] 采用匹配渐近展开法数值地求解了边界层问题。Merkin^[32] 用一组相似解,讨论了强吸入和吹出作用对一般外形物体的影响。Vedhanayagam 等^[34] 讨论了壁面变温和有吹出作用问题。Riley 等^[35] 详细地研究了蒸发对加热等温水平面的影响。Gupta 等^[36] 研究了电绝缘多孔平板上磁流体的稳定剪切流,得到结论:无论是磁场增大,还是吸入速度增大,给定点的速度都将增大。Bikash 等^[37] 研究了非 Newton 粘弹性导电流体,在连续伸展平面上流动的热交换特性。Zueco 等^[38] 获得竖直多孔平板 MHD 混合对流的数值解。Ali^[39] 等研究了拉伸平面上稳定的 MHD 驻点流。Xio 等^[40] 采用 Pade 近似地研究磁流体动力学 Falkner-Skan 问题。Shit 等^[41] 研究了热辐射对非线性褶皱(shirring)面上 MHD 流动和热交换的影响。最近,Ashraf 等^[42] 就粘性不可压流体流过磁化竖直多孔板问题,研究其磁流体混合对流时的数值解。

在上述调研文献的基础上,本文研究辐射和磁流体组合,对磁化可渗透竖直平板自然对流的影响。给出了不同的辐射参数 R_d , Prandtl 数 Pr , 磁 Prandtl 数 P_m , 磁力参数 S , 壁面温度 θ_w , 对壁面摩擦因数 $Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} C_f$, 热交换率 $Gr_L^{1/4} x^{1/4} Nu_x$ 和电流密度 $Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} J_w$ 的影响。还调查了上述参数对速度分布、温度分布和磁场横向分量的影响。使用有限差分法,得到了蒸发参数 ξ 取中等数值时的数值解。得到了前缘附近和远离前缘处的渐近解,并与有限差分法得到的数值解进行了比较,它们有着很好的一致性。

1 数学分析及其控制方程

当导电、粘性和不可压缩流体,流过均匀加热的竖直多孔平板,能量方程中计及辐射效应后,考虑其稳定的二维磁流体动力学自然对流。图 1 示出了该流动区域和相应的坐标系。沿平板壁面选取 x 轴,取 y 轴垂直于 x 轴方向。图 1 中 δ_m , δ_T , δ_H 分别为动量、热和磁场边界层的厚度。在动量、磁和能量场方程中考虑了辐射的影响,其控制方程如下:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\bar{\mu}}{\rho} \left(\bar{H}_x \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{H}_y \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \bar{y}} \right) + g\beta(\bar{T} - \bar{T}_\infty), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (3)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \bar{y}} - \bar{H}_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \bar{H}_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \bar{H}_x}{\partial \bar{y}^2}, \quad (4)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial q_r}{\partial \bar{y}}, \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases}
 q_r = -K_r \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \\
 K_r = \frac{-16\sigma_s T^3}{3\alpha_R}, \\
 \frac{\partial q_r}{\partial y} = -K_r \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \\
 \begin{cases}
 \bar{u}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{v}(\bar{x}, 0) = V_0, \\
 \bar{H}_x(x, 0) = \bar{H}_w(\bar{x}), \\
 \bar{H}_y(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{T}(\bar{x}, 0) = T_w, \\
 \bar{u}(\bar{x}, \infty) = 0, \\
 \bar{H}_x(\bar{x}, \infty) = 0, \quad \bar{T}(\bar{x}, \infty) = 0.
 \end{cases}
 \end{cases} \quad (6)$$

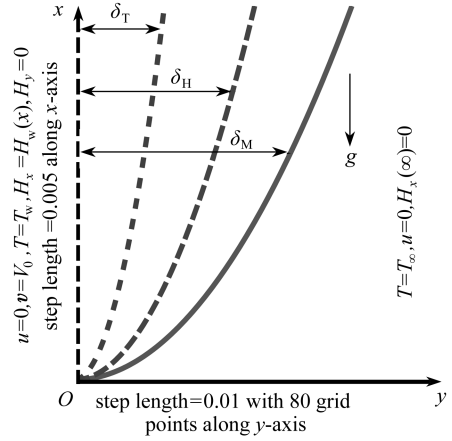


图1 坐标系和流动示意图

Fig. 1 The coordinate system and flow configuration

在方程(6)中, $\bar{H}_w(\bar{x}) = x^{1/2}$ 为壁面磁场, V_0 为壁面的质量流量, 并假设是均匀的, 流体通过壁面向内流动为负, 向外流动为正. 本文取流体以 V_0 向内流动. 为方便计, 引入如下因变量和自变量, 使上述边界层方程正则化:

$$\begin{cases}
 \bar{u} = \frac{\nu}{L} Gr_L^{1/2} u, \quad \bar{v} = \frac{\nu}{L} Gr_L^{1/4} v, \quad \theta = \frac{\bar{T} - \bar{T}_\infty}{\bar{T}_w - \bar{T}_\infty}, \\
 \bar{H}_x = \frac{H_0}{L} Gr_L^{1/2} H_x, \quad \bar{H}_y = \frac{H_0}{L} Gr_L^{1/4} H_y, \quad \bar{y} = \frac{y}{L} Gr_L^{1/4}, \quad x = \frac{\bar{x}}{L}.
 \end{cases} \quad (7)$$

将方程(7)代入方程(1)~(6), 得到如下无量纲的边界层方程和边界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + S \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

$$u \frac{\partial H_x}{\partial x} + v \frac{\partial H_x}{\partial y} - H_x \frac{\partial u}{\partial x} - H_y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{P_m} \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}, \quad (11)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \left[1 + \frac{4}{3R_d} (1 + (\theta_w - 1)\theta)^3 \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (12)$$

$$\begin{cases}
 u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = V_0, \quad H_x(x, 0) = 1, \quad H_y(x, 0) = 0, \quad \theta(x, 0) = 1, \\
 u(x, \infty) = 0, \quad H_x(x, \infty) = 0, \quad \theta(x, \infty) = 0,
 \end{cases} \quad (13)$$

其中, u 和 v 分别为 x, y 方向流体的无量纲速度分量, H_x 和 H_y 分别为 x, y 方向的无量纲磁场分量, θ 为边界层流体的无量纲温度. Pr 为 Prandtl 数, S 为磁力参数, P_m 为磁 Prandtl 数, R_d 为辐射参数, Gr_L 为 Grashof 数, θ_w 为壁面温度(壁面温度和流体的环境温度之比), 它们分别定义如下:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad S = \frac{\mu H_0^2}{\rho L^2}, \quad P_m = \frac{\nu}{\gamma}, \quad R_d = \frac{K \alpha_R}{4 \sigma T_\infty^3}, \quad Gr_L = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}, \quad \theta_w = \frac{T_w}{T_\infty},$$

其中, μ 为流体的动力学粘度, ν 为流体的运动学粘度, γ 为磁扩散系数, L 为特征长度.

2 求解方法

现在讨论问题的数值解. 为此, 将采用两种方法: 1) 先转换基本变量并用有限差分法求数值解; 2) 对远离或靠近平板前缘附近, 采用级数渐近法对流函数求数值解.

2.1 基本变量的变换

为使方程组便于积分, 定义下列因变量和自变量变换参数:

$$\begin{cases} u = x^{1/2} U(\xi, Y), v = x^{-1/4} (V(\xi, Y) + \xi), Y = x^{-1/4} V(\xi, Y), \\ H_x = x^{1/2} \phi_1(\xi, Y), H_y = x^{-1/4} \phi_2(\xi, Y), \theta = \bar{\theta}(\xi, Y), \xi = V_0 x^{1/4}. \end{cases} \quad (14)$$

将方程(14)代入方程(8) ~ (12)及其边界条件(13), 得

$$\frac{1}{2} U + \xi \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{1}{4} Y \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} U^2 + \frac{1}{4} \xi U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(V - \frac{1}{4} YU \right) \frac{\partial U}{\partial Y} - \xi \frac{\partial U}{\partial Y} = \\ \bar{\theta} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + S \left[\frac{1}{2} \phi_1^2 + \frac{1}{4} \xi \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \left(\phi_2 - \frac{1}{4} Y \phi_1 \right) \frac{\partial \phi_1}{\partial Y} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} \phi_1 + \frac{1}{4} \xi \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} - \frac{1}{4} Y \frac{\partial \phi_1}{\partial Y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial Y} = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \xi U \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \left(V - \frac{1}{4} YU \right) \frac{\partial \phi_1}{\partial Y} - \xi \frac{\partial \phi_1}{\partial Y} - \frac{1}{4} \xi \phi_1 \frac{\partial U}{\partial \xi} - \\ \left(\phi_2 - \frac{1}{4} Y \phi_1 \right) \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{1}{P_m} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial Y^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{1}{4} \xi U \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} + \left(V - \frac{1}{4} YU \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Y} - \xi \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left[1 + \frac{4}{3R_d} (1 + (\theta_w - 1) \bar{\theta})^3 \right] \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial Y^2}. \quad (19)$$

上述方程相应的边界条件为

$$\begin{cases} U(\xi, 0) = V(\xi, 0) = 0, \phi_1(\xi, 0) = 1, \phi_2(\xi, 0) = 0, \bar{\theta}(\xi, 0) = 1, \\ U(\xi, \infty) = 0, \phi_1(\xi, \infty) = 0, \bar{\theta}(\xi, \infty) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

应用中心差分的有限差分法, 将方程组(15) ~ (19)和边界条件(20)中的对流项离散化, 得到一组三对角代数方程:

$$\frac{1}{2} U_{i,j} + \xi_i \left(\frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta \xi} \right) - \frac{1}{4} Y_j \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta Y} + \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\Delta Y} = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} U_{i,j}^2 + \frac{1}{4} \xi U_{i,j} \left(\frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta \xi} \right) + \left(V_{i,j} - \frac{1}{4} Y_j U_{i,j} \right) \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta Y} - \\ \xi_i \left(\frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta Y} \right) = \theta_{i,j} + \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\Delta Y^2} + \\ S \left[\frac{1}{2} \phi_{1i,j}^2 + \frac{1}{4} \xi_i \phi_{1i,j} \left(\frac{\phi_{1i,j-1} - \phi_{1i,j}}{\Delta \xi} \right) + \right. \\ \left. \left(\phi_{2i,j} - \frac{1}{4} Y_j \phi_{1i,j} \right) \frac{\phi_{1i+1,j} - \phi_{1i-1,j}}{2\Delta Y} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{1}{2} \phi_{1i,j} + \frac{1}{4} \xi_i \left(\frac{\phi_{1i,j-1} - \phi_{1i,j}}{\Delta \xi} \right) -$$

$$\frac{1}{4} Y_j \left(\frac{\phi_{li+1,j} - \phi_{li-1,j}}{2\Delta Y} \right) + \left(\frac{\phi_{2i+1,j} - \phi_{2i-1,j}}{2\Delta Y} \right) = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \xi_i U_{i,j} \left(\frac{\phi_{li,j-1} - \phi_{li,j}}{\Delta \xi} \right) + \left(V_{i,j} - \frac{1}{4} Y_j U_{i,j} \right) \frac{\phi_{li+1,j} - \phi_{li-1,j}}{2\Delta Y} - \\ & \xi_i \left(\frac{\phi_{li+1,j} - \phi_{li-1,j}}{2\Delta Y} \right) - \frac{1}{4} \xi_i \phi_{li,j} (U_{i,j-1} - U_{i,j} \Delta \xi) - \\ & \left(\phi_{2i,j} - \frac{1}{4} Y_j \phi_{li,j} \right) \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta Y} = \\ & \frac{1}{P_m} \left(\frac{\phi_{li+1,j} - 2\phi_{li,j} + \phi_{li-1,j}}{\Delta Y^2} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \xi_i U_{i,j} \left(\frac{\bar{\theta}_{i,j-1} - \bar{\theta}_{i,j}}{\Delta \xi} \right) + \left(V_{i,j} - \frac{1}{4} Y_j U_{i,j} \right) \frac{\bar{\theta}_{i+1,j} - \bar{\theta}_{i-1,j}}{2\Delta Y} - \xi_i \left(\frac{\bar{\theta}_{i+1,j} - \bar{\theta}_{i-1,j}}{2\Delta Y} \right) = \\ & \frac{1}{Pr} \left[1 + \frac{4}{3R_d} (1 + (\theta_w - 1)\bar{\theta})^3 \right] \left(\frac{\bar{\theta}_{li+1,j} - 2\bar{\theta}_{li,j} + \bar{\theta}_{li-1,j}}{\Delta Y^2} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

离散化后的边界条件为

$$\begin{cases} U(\xi, 0) = V(\xi, 0) = 0, \phi_1(\xi, 0) = 0, \phi_1'(\xi, 0) = 0, \bar{\theta}(\xi, 0) = 1, \\ U(\xi, \infty) = 0, \phi_1(\xi, \infty) = 0, \bar{\theta}(\xi, \infty) = 0. \end{cases} \quad (26)$$

采用 Gauss 消元法求解该三对角方程组. 计算从 $X=0$ 开始, 隐式地逐步向下游进行, ξ 和 Y 网格分别取 $\Delta \xi = 0.005$ 和 $\Delta Y = 0.01$, 并在下面的计算中, y 的最大值取为 80. 需要的 CPU 运行时间为 28.9 s, 数值解收敛性所容许的误差为 $\varepsilon = 0.00001$. 由此得到较小参数值时的解, 即 Prandtl 数 Pr , 磁 Prandtl 数 P_m , 磁力参数 S , 辐射参数 R_d , 壁面温度 θ_w 较小时的解, 这些参数通常出现于核冷却系统的液态金属中. 最后, 对有关的物理参数, 即磁场参数 S , 磁 Prandtl 数 P_m , Prandtl 数 Pr , 辐射参数 R_d 和壁面温度 θ_w 取不同数值时, 得到所要求的解. 这里, 对通常出现于核装置中作冷却剂的液态金属, 取适当小的 Pr 值. 式 (27) 定义了壁面摩擦因数 $Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} C_f$, 热交换率 $Gr_L^{1/4} x^{1/4} Nu_x$ 和电流密度 $Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} J_w$. 图 2 至图 6 示出了不同物理参数对速度、温度和磁场横向分量的影响.

一旦知道了方程 (15) ~ (19) 的解, 该处诸多物理量, 如壁面摩擦因数、热交换率和电流密度, 就可以从以下给出的无量纲关系表达式得到, 从应用角度来看, 这是很重要的.

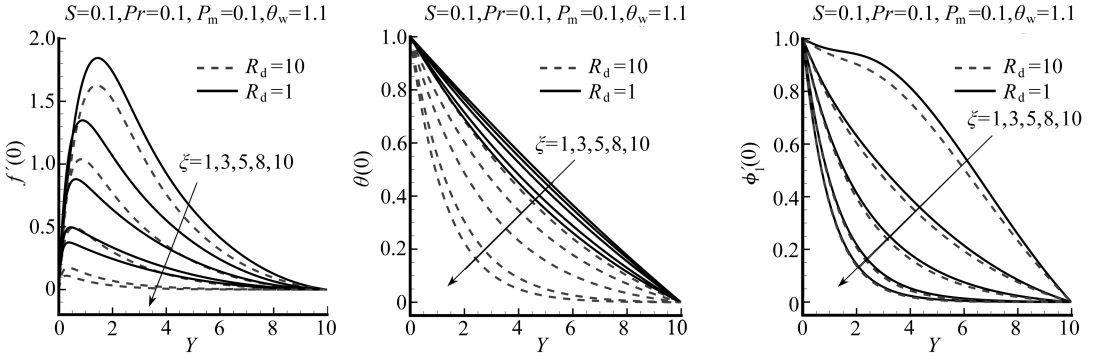
$$\begin{cases} Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} C_f = \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)_{Y=0}, \quad Gr_L^{1/4} x^{1/4} Nu_x = - \left(1 + \frac{4}{3R_d} \theta_w^3 \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0}, \\ Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} J_w = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial Y} \right)_{Y=0}. \end{cases} \quad (27)$$

下一小节将求得局部蒸发参数 ξ 取小数值和大数值时的解.

2.2 流函数公式

为了在局部蒸发参数取小数值和大数值时, 求得稳态方程的数值解, 重新定义流动变量:

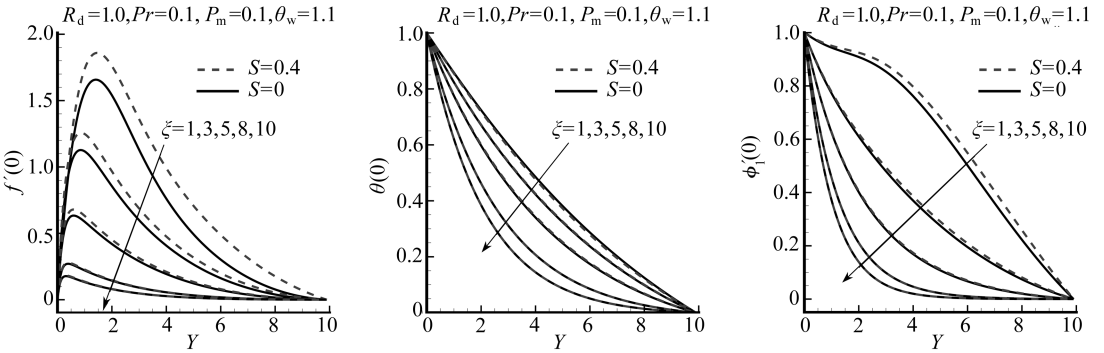
$$\begin{cases} Y = x^{-1/4} y, \quad u = x^{1/2} f'(Y), \quad v = -x^{-1/4} \left(\frac{3}{4} f(Y) - \frac{1}{4} Y f'(Y) + \frac{1}{4} \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi \right), \\ \theta_x = x^{-1} \left(\frac{1}{4} \xi \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} - \frac{1}{4} Y \bar{\theta}' \right), \quad \theta_y = x^{-1/4} \bar{\theta}', \\ H_x = x^{1/2} \phi'(Y), \quad H_y = -x^{-1/4} \left(\frac{3}{4} \phi(Y) - \frac{1}{4} Y \phi'(Y) + \frac{1}{4} \xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right), \quad \xi = V_0 x^{1/4}, \end{cases} \quad (28)$$



(a) 速度分布 $f'(0)$ (b) 温度分布 $\theta(0)$ (c) 磁场横向分量 $\phi_1'(0)$
 (a) Velocity profile (b) Temperature distribution (c) Transverse component of magnetic field

图2 当 $Pr = 0.1, S = 0.1, P_m = 0.1, \theta_w = 1.1$, 辐射参数 $R_d = 1.0, 10.0$,
 $\xi = 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 10.0$ 时, 速度、温度和磁场横向分量随 Y 的变化

Fig. 2 Velocity profile, temperature distribution and transverse component of magnetic field for various values of $\xi = 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 10.0$ against Y for different values of radiation parameter $R_d = 1.0, 10.0$ when $Pr = 0.1, S = 0.1, P_m = 0.1, \theta_w = 1.1$



(a) 速度分布 $f'(0)$ (b) 温度分布 $\theta(0)$ (c) 磁场横向分量 $\phi_1'(0)$
 (a) Velocity profile (b) Temperature distribution (c) Transverse component of magnetic field

图3 当 $Pr = 0.1, R_d = 1.0, P_m = 0.1, \theta_w = 1.1$, 磁力参数 $S = 0.0, 0.4$,
 $\xi = 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 10.0$ 时, 速度、温度和磁场横向分量随 Y 的变化

Fig. 3 Velocity profile, temperature distribution and transverse component of magnetic field for various values of $\xi = 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 10.0$ against Y for different values of magnetic force parameter $S = 0.0, 0.4$ when $Pr = 0.1, R_d = 1.0, P_m = 0.1, \theta_w = 1.1$

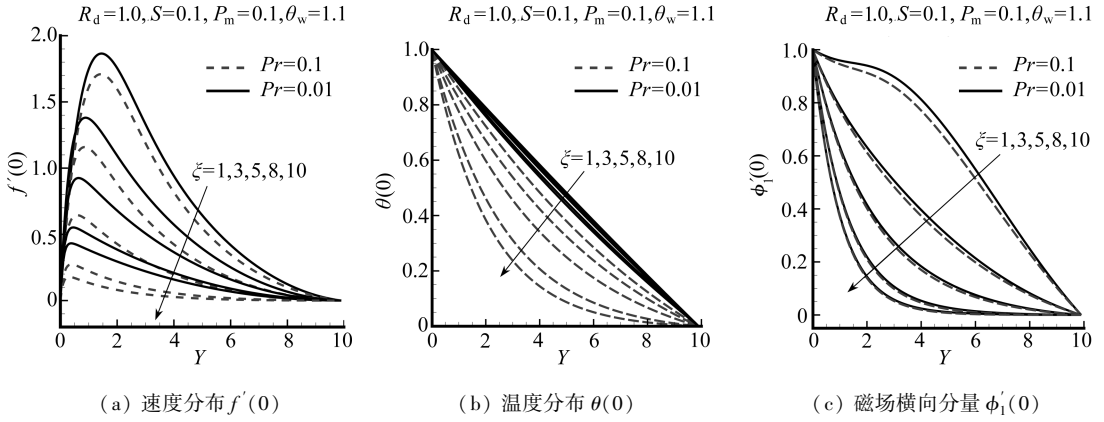
于是方程组简化为

$$f''' + \frac{3}{4}ff'' - \frac{1}{2}f'^2 + \bar{\theta} - S \left(\frac{3}{4}\phi\phi'' - \frac{1}{2}\phi'^2 \right) + \xi f'' = \frac{1}{4}\xi \left[f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} - S \left(\phi' \frac{\partial \phi'}{\partial \xi} - \phi'' \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right], \quad (29)$$

$$\frac{1}{P_m}\phi''' + \frac{3}{4}f\phi'' - \frac{3}{4}f''\phi + \xi\phi'' = \frac{1}{4}\xi \left(f' \frac{\partial \phi'}{\partial \xi} - \phi' \frac{\partial f'}{\partial \xi} + f'' \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \phi'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (30)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[1 + \frac{4}{3R_d}(1 + (\theta_w - 1)\bar{\theta})^3 \right] \bar{\theta}'' + \frac{3}{4}f\bar{\theta}' + \xi\bar{\theta}' = \frac{1}{4}\xi \left(f' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} - \bar{\theta}'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right), \quad (31)$$

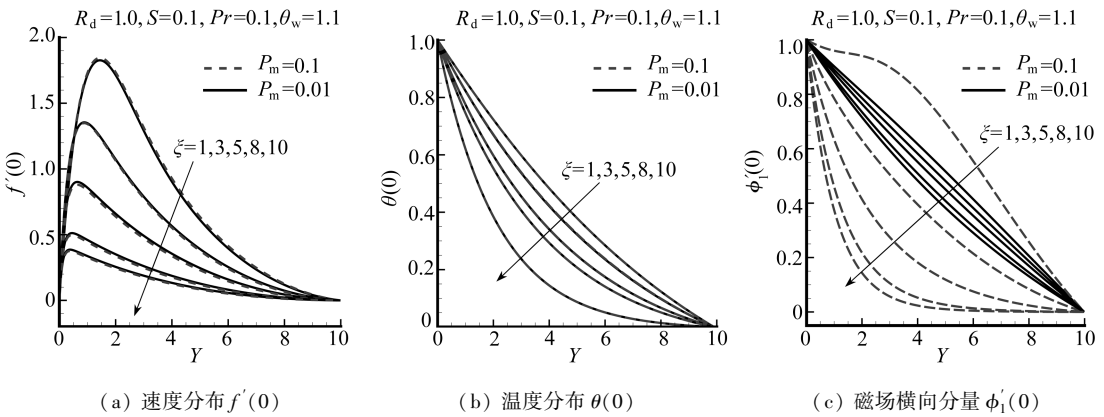
上述方程相应的边界条件为



(a) 速度分布 $f'(0)$ (b) 温度分布 $\theta(0)$ (c) 磁场横向分量 $\phi_1'(0)$
 (a) Velocity profile (b) Temperature distribution (c) Transverse component of magnetic field

图4 当 $R_d = 1.0, S = 0.1, P_m = 0.1, \theta_w = 1.1$, Prandtl 数 $Pr = 0.01, 0.1$, $\xi = 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 10.0$ 时, 速度、温度和磁场横向分量随 Y 的变化

Fig.4 Velocity profile, temperature distribution and transverse component of magnetic field for various values of $\xi = 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 10.0$ against Y for different values of Prandtl number $Pr = 0.01, 0.1$ when $R_d = 1.0, S = 0.1, P_m = 0.1, \theta_w = 1.1$



(a) 速度分布 $f'(0)$ (b) 温度分布 $\theta(0)$ (c) 磁场横向分量 $\phi_1'(0)$
 (a) Velocity profile (b) Temperature distribution (c) Transverse component of magnetic field

图5 当 $Pr = 0.1, S = 0.1, R_d = 1.0, \theta_w = 1.1$, 磁 Prandtl 数 $P_m = 0.01, 0.1$, $\xi = 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 10.0$ 时, 速度、温度和磁场横向分量随 Y 的变化

Fig.5 Velocity profile, temperature distribution and transverse component of magnetic field for various values of $\xi = 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 10.0$ against Y for different values of magnetic Prandtl number $P_m = 0.01, 0.1$ when $Pr = 0.1, S = 0.1, R_d = 1.0, \theta_w = 1.1$

$$\begin{cases} f(\xi, 0) = f'(\xi, 0) = 0, \phi(\xi, 0) = 0, \phi'(\xi, 0) = 1, \bar{\theta}(\xi, 0) = 1, \\ f'(\xi, \infty) = 0, \phi'(\xi, \infty) = 0, \bar{\theta}(\xi, \infty) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

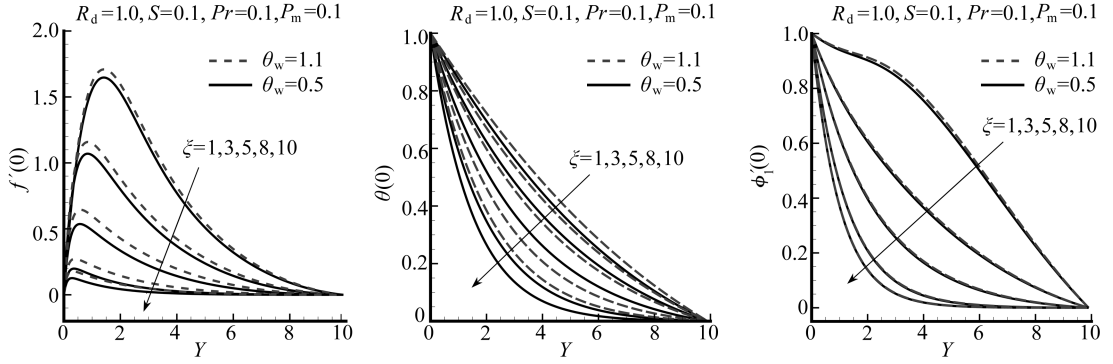
2.2.1 ξ 取小数值时

由于前缘附近的 ξ 为小数值 ($\xi \ll 1$), 可以将所有的函数按 ξ 的幂级数展开. 据此设

$$f(\xi, Y) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i f_i(Y), \phi(\xi, Y) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \phi_i(Y), \bar{\theta}(\xi, Y) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \theta_i(Y). \quad (33)$$

将上述方程代入方程组(29) ~ (31), 并保留至 $O(\xi)$ 阶, 得到下列方程组:

$O(\xi^0)$ 阶



(a) 速度分布 $f'(0)$ (b) 温度分布 $\theta(0)$ (c) 磁场横向分量 $\phi_1'(0)$
 (a) Velocity profile (b) Temperature distribution (c) Transverse component of magnetic field

图6 当 $Pr = 0.1$, $S = 0.1$, $R_d = 1.0$, $P_m = 0.1$, 壁面温度 $\theta_w = 0.5, 1.1$,
 $\xi = 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 10.0$ 时, 速度、温度和磁场横向分量随 Y 的变化

Fig. 6 Velocity profile, temperature distribution and transverse component of magnetic field for various values of $\xi = 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 10.0$ against Y for different values of surface temperature $\theta_w = 0.5, 1.1$ when $Pr = 0.1, S = 0.1, R_d = 1.0, P_m = 0.1$

$$f_0''' + \frac{3}{4}f_0f_0'' - \frac{1}{2}f_0'^2 + \theta_0 - S\left(\frac{3}{4}\phi_0\phi_0'' - \frac{1}{2}\phi_0'^2\right) = 0, \quad (34)$$

$$\frac{1}{P_m}\phi_0''' + \frac{3}{4}f_0\phi_0'' - \frac{3}{4}f_0'\phi_0' = 0, \quad (35)$$

$$[1 + \alpha(1 + \Delta\theta_0)^3]\theta_0'' + 3\alpha\Delta(1 + \Delta\theta_0)^2\theta_0'^2 + \frac{3}{4}Prf_0\theta_0' = 0. \quad (36)$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} f_0(0) = f_0'(0) = 0, \phi_0(0) = 0, \phi_0'(0) = 1, \theta_0(0) = 1, \\ f_0'(\infty) = 0, \phi_0'(\infty) = 0, \theta_0(\infty) = 0. \end{cases} \quad (37)$$

$O(\xi^1)$ 阶

$$f_1''' + \frac{3}{4}(f_0f_1'' - Sf_0\phi_1'') + (f_0''f_1 - Sf_0'\phi_1') - \frac{5}{4}(f_0'f_1' - Sf_0'\phi_1') + \theta_1 + f_0'' = 0, \quad (38)$$

$$\frac{1}{P_m}\phi_1''' + \frac{3}{4}f_0\phi_1'' + \frac{5}{4}f_1\phi_0'' - \frac{3}{4}f_0''\phi_1 - \frac{5}{4}f_0'\phi_1' - \frac{1}{4}f_0'\phi_1' + \frac{1}{4}f_1'\phi_0' + \phi_0'' = 0, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} [1 + \alpha(1 + \Delta\theta_0)^3]\theta_1'' + 3\alpha\Delta(1 + \Delta\theta_0)^2(\theta_1\theta_0'' + 2\theta_0'\theta_1') + \\ 6\alpha\Delta^2\theta_1(1 + \Delta\theta_0)\theta_0'^2 + Pr\left(\frac{3}{4}f_0\theta_1' + f_1\theta_0' - \frac{1}{4}f_0'\theta_1 + \theta_0'\right) = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} f_1(0) = f_1'(0) = 0, \phi_1(0) = 0, \phi_1'(0) = 0, \theta_1(0) = 0, \\ f_1'(\infty) = 0, \phi_1'(\infty) = 0, \theta_1(\infty) = 0. \end{cases} \quad (41)$$

方程(34) ~ (41) 为非线性耦合方程组, 可用 Nactsheim-Swigert 迭代法, 采用六阶隐式 Runge-Kutta-Butcher 初值求解器求解. 紧靠 ξ 前缘附近区域壁面的摩擦因数、热交换率和电流密度, 按下列表达式计算:

$$Gr_L^{-3/4}x^{-1/4}C_f = f''(0), \quad (42)$$

$$Gr_L^{-3/4}x^{-1/4}J_w = \phi''(0), \quad (43)$$

$$Gr_L^{1/4} x^{1/4} Nu = - \left(1 + \frac{4}{3R_d} \theta_w^3 \right) \theta'(0). \quad (44)$$

利用方程(42) ~ (44) 可得小 ξ 值时的结果, 见表 1 至表 3.

表 1 当 $P_m = 0.1, R_d = 20.0, S = 0.2, Pr = 0.1, \theta_w = 0.5, 1.5, 2.5$ 时,

按两种方法得到壁面摩擦因数 $Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} C_{fx}$ 随 ξ 的变化

Table 1 Numerical values of coefficient of skin friction $Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} C_{fx}$ obtained for $\theta_w = 0.5, 1.5, 2.5$ when $P_m = 0.1, R_d = 20.0, S = 0.2, Pr = 0.1$, against ξ by two methods

ξ	$\theta_w = 0.5$		$\theta_w = 1.5$		$\theta_w = 2.5$	
	FDM	asymptotic	FDM	asymptotic	FDM	asymptotic
0.0	1.929 58	1.920 21†	1.937 40	1.928 33†	1.944 80	1.971 00†
0.1	2.017 64	1.942 59†	2.026 28	1.952 15†	2.034 28	2.249 32†
0.5	2.458 30	2.054 52†	2.471 16	2.071 27†	2.483 07	2.510 93†
1.0	2.970 60	2.944 31†	2.990 06	2.922 01†	3.008 07	3.083 75†
2.0	3.663 65	-	3.701 20	-	3.735 92	-
4.0	3.226 90	-	3.317 10	-	3.400 79	-
8.0	1.296 61	1.265 62††	1.359 90	1.316 01††	1.422 97	1.412 65††
10.0	1.011 53	1.010 00 ††	1.060 63	1.010 00††	1.109 71	1.010 00††

表 2 当 $P_m = 0.1, R_d = 20.0, S = 0.2, Pr = 0.1, \theta_w = 0.5, 1.5, 2.5$ 时,

按两种方法得到热交换系数 $Gr_L^{1/4} x^{1/4} Nu_x$ 随 ξ 的变化

Table 2 Numerical values of coefficient of heat transfer $Gr_L^{1/4} x^{1/4} Nu_x$ obtained for $\theta_w = 0.5, 1.5, 2.5$ when $P_m = 0.1, R_d = 20.0, S = 0.2, Pr = 0.1$, against ξ by two methods

ξ	$\theta_w = 0.5$		$\theta_w = 1.5$		$\theta_w = 2.5$	
	FDM	asymptotic	FDM	asymptotic	FDM	asymptotic
0.0	0.151 53	0.145 48†	0.149 48	0.145 65†	0.147 58	0.142 28†
0.1	0.155 06	0.153 74†	0.152 84	0.154 09†	0.150 79	0.150 88†
0.5	0.172 47	0.165 05†	0.169 39	0.164 30†	0.166 57	0.163 91†
1.0	0.194 13	0.194 19†	0.189 92	0.186 55†	0.186 08	0.185 20†
2.0	0.240 00	-	0.233 21	-	0.227 05	-
4.0	0.367 08	-	0.352 33	-	0.339 06	-
8.0	0.775 46	0.808 24††	0.739 07	0.781 87††	0.705 94	0.756 31††
10.0	0.972 61	1.000 00††	0.927 21	0.956 72††	0.885 84	0.943 34††

表 3 当 $P_m = 0.1, R_d = 20.0, S = 0.2, Pr = 0.1, \theta_w = 0.5, 1.5, 2.5$ 时,

按两种方法得到 $Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} J_w$ 随 ξ 的变化

Table 3 Numerical values of $Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} J_w$ obtained for $\theta_w = 0.5, 1.5, 2.5$ when $P_m = 0.1, R_d = 20.0, S = 0.2, Pr = 0.1$, against ξ by two methods

ξ	$\theta_w = 0.5$		$\theta_w = 1.5$		$\theta_w = 2.5$	
	FDM	asymptotic	FDM	asymptotic	FDM	asymptotic
0.0	0.012 03	0.015 69†	0.011 19	0.017 50†	0.010 40	0.012 06†
0.1	0.015 48	0.017 07†	0.014 61	0.017 08†	0.013 80	0.010 76†
0.5	0.039 25	0.034 00†	0.038 27	0.032 99†	0.037 35	0.031 94†
1.0	0.080 08	0.080 16†	0.079 03	0.075 39†	0.078 05	0.078 27†
2.0	0.178 98	-	0.177 91	-	0.176 92	-
4.0	0.390 06	-	0.389 19	-	0.388 36	-
8.0	0.797 67	0.800 00††	0.797 56	0.800 00††	0.797 33	0.800 00††
10.0	0.998 29	1.000 00††	0.998 21	1.000 0††	0.998 12	1.000 00 ††

表1至表3中, † 和 †† 分别表示小和大的 ξ 值; FDM 为有限差分法的数值解; asymptotic 为渐近级数法的数值解.

2.2.2 ξ 取大数值时

本小节将关注 ξ 取大数值时, 在边界条件(32)下, 求方程(29) ~ (31) 的解. 在这些方程中进行变量项数量级分析表明, 方程(29)中的最大项为 f'' 和 $\xi f''$, 方程(30)中为 ϕ'' 和 $\xi\phi''$, 方程(31)中为 θ'' 和 $\xi\theta''$. 在各自的方程中, 两项的数量级要平衡, 并为此寻找最佳路径, 假想 η 是小数值, 因而其导数为大数值. 本质上是适当调整 f, ϕ, θ 和 η , 使它们各自平衡. 让方程(29)中的 f'' 和 $\xi f''$, 方程(30)中的 ϕ'' 和 $\xi\phi''$ 及方程(31)中的 θ'' 和 $\xi\theta''$ 各自平衡, 于是 $\eta = O(\xi^{-1})$, $f = O(\xi^{-3})$ 和 $\phi = O(\xi^{-3})$. 因而, 引入如下变换:

$$\begin{cases} Y = \xi^{-1} \eta, f(\xi, Y) = \xi^{-3} F(\xi, \eta), \\ \phi(\xi, Y) = \xi^{-3} \Phi(\xi, \eta), \theta(\xi, Y) = \Theta(\xi, \eta). \end{cases} \quad (45)$$

将方程(45)代入方程(29) ~ (31), 得到下列方程组:

$$F''' + F'' + \Theta = \frac{1}{4} \xi^{-3} \left[F' \frac{\partial F'}{\partial \xi} - F'' \frac{\partial F}{\partial \xi} - S \left(\Phi \frac{\partial \Phi'}{\partial \xi} - \Phi'' \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \right], \quad (46)$$

$$\frac{1}{P_m} \Phi''' + \Phi'' = \frac{1}{4} \xi^{-3} \left[F' \frac{\partial \Phi'}{\partial \xi} - \Phi' \frac{\partial F'}{\partial \xi} + F'' \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \Phi'' \frac{\partial F}{\partial \xi} \right], \quad (47)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[1 + \frac{4}{3R_d} (1 + (\theta_w - 1)\Theta)^3 \right] \Theta'' + \Theta' = \frac{1}{4} \xi^{-3} \left[F' \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \Theta' \frac{\partial F}{\partial \xi} \right], \quad (48)$$

上述方程相应的边界条件为

$$\begin{cases} F(\xi, 0) = F'(\xi, 0) = 0, \Phi(\xi, 0) = 0, \Phi'(\xi, 0) = 1, \Theta(\xi, 0) = 1, \\ F'(\xi, \infty) = 0, \Phi'(\xi, \infty) = 0, \Theta(\xi, \infty) = 0. \end{cases} \quad (49)$$

将函数 F, Φ, Θ 展开为 ξ^{-3} 的幂级数, 并将方程(50)代入方程(45) ~ (48), 得

$$\begin{cases} F(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^1 \xi^{-3m} F_m(\eta), \\ \Phi(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^1 \xi^{-3m} \Phi_m(\eta), \Theta(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^1 \xi^{-3m} \Theta_m(\eta), \end{cases} \quad (50)$$

并使方程两边同幂次的系数相等, 得到

$$F_0''' + F_0'' + \Theta_0 = 0, \quad (51)$$

$$\Phi_0''' + P_m \Phi_0'' = 0, \quad (52)$$

$$\left[1 + \alpha(1 + \Delta\Theta_0)^3 \right] \Theta_0'' + 3\alpha\Delta(1 + \Delta\Theta_0)^2 \Theta_0'^2 + Pr\Theta_0' = 0, \quad (53)$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} F_0(0) = F_0'(0) = 0, \Phi_0 = 0, \Phi_0'(0) = 1, \Theta_0(0) = 1, \\ F_0'(\infty) = 0, \Phi_0(\infty) = 0, \Theta_0(\infty) = 0. \end{cases} \quad (54)$$

由此得到

$$F_1''' + F_1'' + \Theta_1 = 0, \quad (55)$$

$$\Phi_1''' + P_m \Phi_1'' = 0, \quad (56)$$

$$\left[1 + \alpha(1 + \Delta\Theta_0)^3 \right] \Theta_1'' + 3\alpha\Delta(1 + \Delta\Theta_0)^2 (\Theta_1 \Theta_0'' + 2\Theta_0' \Theta_1') + 6\alpha\Delta^2 \Theta_1 (1 + \Delta\Theta_0) \Theta_0'^2 + Pr\Theta_1' = 0, \quad (57)$$

$$\begin{cases} F_1(0) = F_1'(0) = 0, \Phi_1 = 0, \Phi_1'(0) = 0, \Theta_1(0) = 0, \\ F_1'(\infty) = 0, \Phi_1(\infty) = 0, \Theta_1(\infty) = 0 \end{cases} \quad (58)$$

该方程组的解,使我们能够利用下列表达式,在 ξ 取大数值时,计算出不同参数时的解:

$$Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} C_f = F''(0), \quad (59)$$

$$Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} J_w = \Phi''(0), \quad (60)$$

$$Gr_L^{1/4} x^{1/4} Nu = - \left(1 + \frac{4}{3R_d} \theta_w^3 \right) \Theta'(0). \quad (61)$$

ξ 取大数值时,由式(59)~(61)得到的结果已列于表 1 至表 3 中,并与有限差分法得到的结果相比较,它们吻合得很好。

3 结果和讨论

使用有限差分法,对所有的蒸发参数 ξ 值,在边界条件(26)下,数值地求解方程(21)~(25)。类似地,使用渐近级数解,对充分靠近平板和远离平板时的 ξ 值,在边界条件(32)下求解方程(29)~(31)。随后,测试有限差分法得到结果的精度,并和渐近级数解得到的结果相比较,它们有着极好的一致性。在 3.1 小节中,将给出 Prandtl 数 Pr , 磁力参数 S , 磁 Prandtl 数 P_m , 辐射参数 R_d 和壁面温度 θ_w , 对壁面摩擦因数 $Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} C_f$, 热交换率 $Gr_L^{1/4} x^{1/4} Nu$ 和电流密度 $Gr_L^{-3/4} x^{-1/4} J_w$ 影响的简短讨论。在 3.2 小节中,对不同的蒸发参数 ξ , 当参数 Pr, P_m, S, R_d 和 θ_w 取不同数值时,给出速度分布、温度分布和磁场横向分量的细节。

3.1 物理参数对壁面摩擦、磁场强度和热交换率的影响

图 7(a)至图 7(c)示出了,不同的辐射参数 R_d 值,对壁面的摩擦因数、热交换率和电流密度的影响。图 7(a)至图 7(c)表明,壁面摩擦因数始终是减小的,同时,热交换率始终是增大的,而电流密度系数在 $\xi = 10^0$ 以前出现些微的增加。关系式 $R_d = K\alpha_r / (4\sigma T_w^3)$ 表明,随着参数 R_d 的增大,热扩散和 Roseland 吸收系数的乘积在增大,同时流体的环境温度在下降,表明流体的运动在减缓。因此,自然对流的下游状态,壁面摩擦因数总是非常快地减小,而热交换系数总是非常快地增大。因此一般说来,参数 R_d 的变化,对电流密度的发展没有明显的抑制作用。从图 8(a)至图 8(c)可以看到,随着磁力参数 S 的增大,作用在平板中部区域的壁面摩擦因数增长极快,但是热交换率和电流密度在平板壁面附近稍有增长,到 $\xi = 10^0$ 以后,它们不再有什么变化。原因是磁场能量随着磁场参数 S 的增大而增大,使得流体获得动能,因此,使壁面摩擦因数、热交换率和电流密度也增大。

图 9(a)至图 9(c)绘出了不同磁 Prandtl 数 P_m , 对壁面摩擦因数、热交换率和电流密度的影响。可以看到,下游区域的壁面摩擦因素有些微下降,热交换率保持不变。还可以看到,小数值 $P_m = 0.001$ 时,电流密度系数最大,随着 P_m 的增大而快速下降,并在 $P_m = 0.1$ 时减小为 0。出现这种情况的原因是,随着磁 Prandtl 数 P_m 的增大,边界层中的感应电流出现离开壁面的倾向,结果使动量和磁场边界层的厚度增厚,但就热交换情况来看,这个因素在流动区域中并不明显。随着 P_m 的增大,壁面摩擦因数和电流密度在下降,但是热交换率系数保持不变。最后从图 10(a)至图 10(c)可以看到 Prandtl 数 Pr 的变化,对如壁面的摩擦因数、热交换率和电流密度这样的物理量的影响。可以发现,壁面附近的壁面摩擦因数有适度的减少,但是下游区域壁面摩擦因数快速地减小;类似地,上游区域的热交换率非常缓慢地增加,但是下游区域的热交换率明显增长;上游区域的电流密度也稍有增长。原因是随着 Pr 数的增大,导致流体的运动学粘度上升和热扩散的下降。有趣的是运动学粘度的上升,导致动量边界层厚度增厚,同时,热扩散的下降是造成热边界层厚度变薄的原因。

在表 1 至表 3 中,用两种方法:有限差分法和渐近的级数法,在 ξ 的上、下游区域中,进行

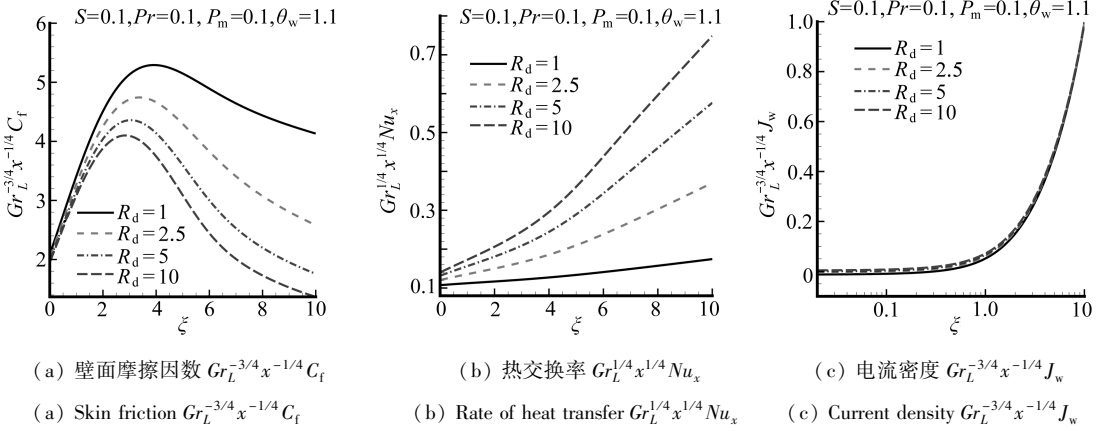


图7 当 $P_m = 0.1$, $Pr = 0.1$, $S = 0.1$, $\theta_w = 1.1$, 辐射参数 $R_d = 1.0, 2.5, 5.0, 10.0$ 时, 壁面摩擦因数、热交换率和电流密度随着蒸发参数 ξ 的变化

Fig.7 The behavior of coefficients of skin friction, rate of heat transfer and current density at the surface against ξ for different values of radiation parameter

$R_d = 1.0, 2.5, 5.0, 10.0$ when $P_m = 0.1$, $Pr = 0.1$, and $S = 0.1$, $\theta_w = 1.1$

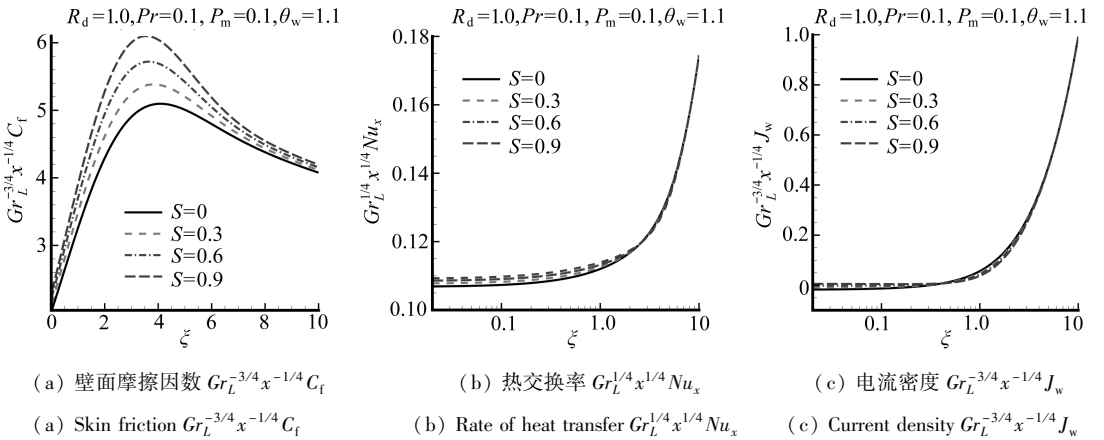


图8 当 $P_m = 0.1$, $R_d = 1.0$, $Pr = 0.1$, $\theta_w = 1.1$, 磁力参数 $S = 0.0, 0.3, 0.6, 0.9$ 时, 壁面摩擦因数、热交换率和电流密度随着蒸发参数 ξ 的变化

Fig.8 The behavior of coefficients of skin friction, rate of heat transfer and current density at the surface against ξ for different values of magnetic force parameter

$S = 0.0, 0.3, 0.6, 0.9$ when $P_m = 0.1$, $R_d = 1.0$ and $Pr = 0.1$, $\theta_w = 1.1$

数值解的比较并测试其结果精度。从表1至表3可以看到,随着壁面温度 θ_w 的上升,下游区域的壁面摩擦因数和热交换率都在增大,但是,整个区域上电流密度系数的数值变化不大。对该物理现象我们可以评述如下:随着壁面温度 θ_w 的升高,流动区域中流体的环境温度在下降,根据 Fourier 的热交换定律,热交换朝着下游方向流动,因此,由于壁面摩擦和热交换率系数得到了良好的补充故发生了改变,而电流密度系数受到控制故稍有变化。表1至表3说明,用两种方法得到的结果是非常吻合的。

3.2 物理参数对速度、温度和磁场横向分量的影响

图2至图6对不同的蒸发参数 ξ 值,用有限差分法绘出了速度、温度和横向磁场分量的分布。目的是显示出这些图形是如何随 ξ 而变化。本文中蒸发参数 ξ 取正值。从图2至图6可以看

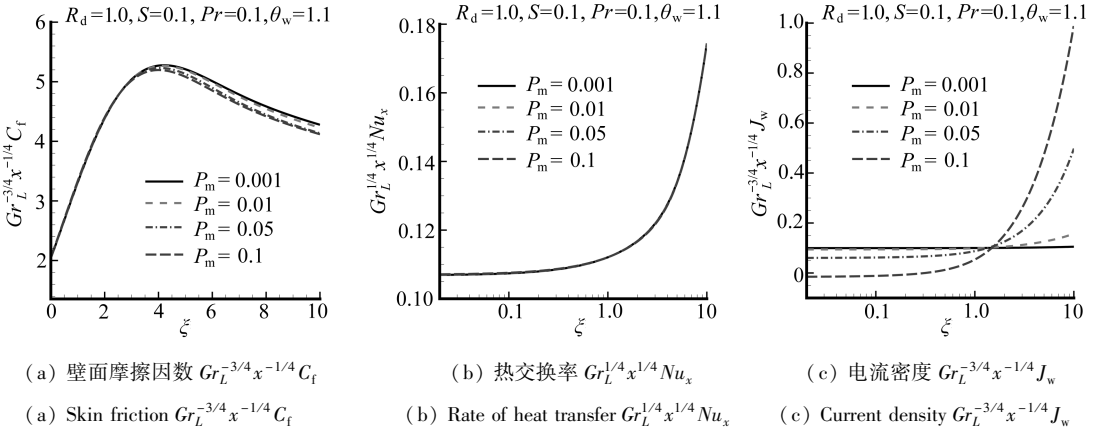


图9 当 $R_d = 1.0$, $Pr = 0.1$, $S = 0.1$, $\theta_w = 1.1$, 磁 Prandtl 数 $P_m = 0.001, 0.01, 0.05, 0.1$ 时, 壁面摩擦因数、热交换率和电流密度随着蒸发参数 ξ 的变化

Fig.9 The behavior of coefficients of skin friction, rate of heat transfer and current density at the surface against ξ for different values of magnetic Prandtl number $P_m = 0.001, 0.01, 0.05, 0.1$ when $R_d = 1.0, Pr = 0.1, S = 0.1, \theta_w = 1.1$

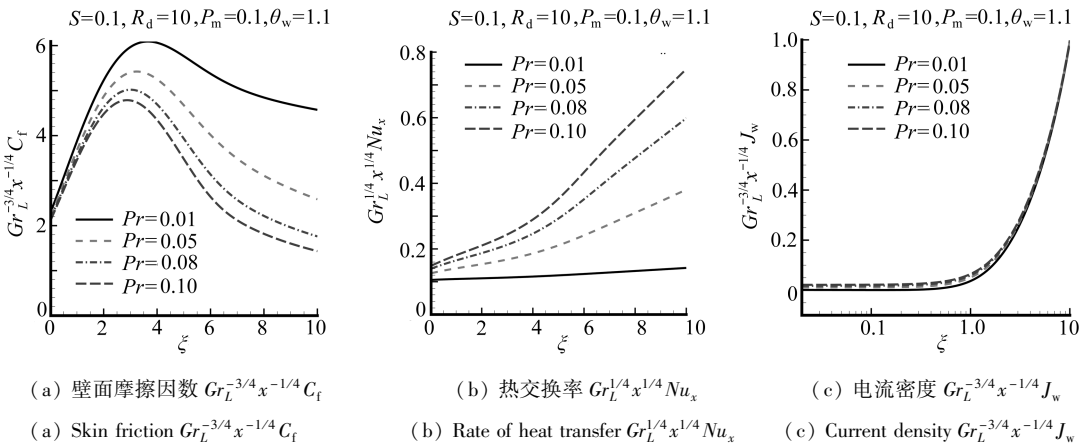


图10 当 $R_d = 10.0$, $P_m = 0.1$, $S = 0.1$, $\theta_w = 1.1$, Prandtl 数 $Pr = 0.01, 0.05, 0.08, 0.1$ 时, 壁面摩擦因数、热交换率和电流密度随着蒸发参数 ξ 的变化

Fig.10 The behavior of coefficient of skin friction, rate of heat transfer and current density at the surface against ξ for different values of Prandtl number $Pr = 0.01, 0.05, 0.08, 0.1$ when $R_d = 10.0, P_m = 0.1, S = 0.1, \theta_w = 1.1$

出,随着数值 ξ 的增大,速度、温度和横向磁场分量都在减小。这一现象充分说明,吸入作用减缓了下游区域中流体的运动,并且使上述物理量即速度、温度和横向磁场分量的数值出现减小。图2(a)至图2(c)的数值结果表明,当常数数值 $Pr = 0.1, P_m = 0.1, S = 0.1$ 和 $\theta_w = 1.1$ 时,对两个不同的辐射参数值 $R_d = 1.0, 10.0$, 随着 $\xi = 1.0, 3.0, 5.0, 8.0, 10.0$ 逐渐增大时,动量、热和磁场边界层的厚度在减小,还可以看到,流体中辐射参数值 R_d 的增大,速度、温度和横向磁场分量值在减小,导致动量、热和磁场边界层的厚度在减小。图3(a)至图3(c)表明有吸入作用时,磁力参数 $s = 0.0, 0.4$ 变化,动量和磁场分布在增加,而温度分布没有变化,这正是所期望的,因为磁场方向有利于流体的流动。从图4(a)至图4(c)中可以看到,当其它参数保持不变,Prandtl 数 $Pr = 0.01, 0.1$ 变化时,速度值略有减小,温度分布也在减小,并将区间分成两部

分,而横向磁场分量没有变化,这是可以理解的,因为在磁场方程(24)中, Pr 的作用并不重要.图5(a)至图5(c)显示了, $Pr = 0.1, S = 0.1, R_d = 1.0$ 和 $\theta_w = 1.1$,磁 Prandtl 数 $P_m = 0.01, 0.1$ 变化时,对速度、温度和横向磁场分量的影响.这些图形清楚地表明,有吸入作用存在时,随着磁 Prandtl 数 P_m 的增大,速度分布值略有增大,温度分布没有改变,横向磁场分量急剧下降,并将流域分成两部分.由图6(a)至图6(c)可以看出,随着壁面温度 θ_w 的升高,速度和温度分布也在增大,因此,动量和热边界层的厚度在增大.当 $\xi = 1.0$ 时,磁场横向分量是增大的,而对其他的蒸发参数 ξ 值,磁场横向分量没有变化.

4 结 论

汇总上述讨论,评述不同物理参数,如辐射参数 R_d ,磁力参数 S ,Prandtl 数 Pr ,磁 Prandtl 数 P_m 和壁面温度 θ_w ,对壁面摩擦因数 $Gr_L^{-3/4}x^{-1/4}C_f$,热交换率 $Gr_L^{1/4}x^{1/4}Nu$ 和电流密度 $Gr_L^{-3/4}x^{-1/4}J_w$ 的影响如下:

- 1) 随着辐射参数值 R_d 的增大,下游区域中,壁面摩擦因数在减小,热交换率系数在增大,但是电流密度直到 $\xi = 1$ 前略有增大.
- 2) 随着磁力参数 S 的增大,流域中部的壁面摩擦因数明显增大,但是在平板附近区域,热交换率系数和电流密度有很小的改变.
- 3) 随着磁 Prandtl 数 P_m 的变化,下游区域的壁面摩擦因数稍微减小,热交换率系数保持不变;但是电流密度系数减小很快.
- 4) 随着 Prandtl 数 Pr 的增大,壁面摩擦因数在减小,而热交换率系数和电流密度系数在增大.
- 5) 随着壁面温度 θ_w 的上升,壁面摩擦因数和热交换率都在增大,而电流密度系数的数值变化很小.
- 6) 当辐射参数 R_d 取两个不同数值,随着蒸发参数 ξ 的增大,速度、温度和磁场横向分量分布在减小.数值结果表明,有吸入作用时,动量、热和磁场边界层的厚度在减小.
- 7) 吸入作用下磁力参数 S 的变化,导致动量值和磁场分布的减小,但温度分布没有变化.
- 8) 随着 Prandtl 数 Pr 的变化,速度分布稍有减小.但是,温度分布的减小,同时将流域分隔成两部分,磁场横向分量没有变化.
- 9) 随着磁 Prandtl 数 P_m 的变化,速度分布值略有增大,而温度分布没有变化.但是,磁场横向分量是减小的,并将流域分成两部分.
- 10) 随着壁面温度 θ_w 的增大,速度和温度分布在增大.因而,动量及热边界层的厚度在增大.磁场的横向分量仅在 $\xi = 1.0$ 时,增大非常缓慢.

致谢 本文作者非常感谢审稿人的意见和建议.作者 Muhammad Ashraf 感谢巴基斯坦 COMSATS 信息技术学院数学系给予研究团队的授权.

参考文献 (References):

- [1] Greenspan H P, Carrier G F. The magnetohydrodynamic flow past a flat plate[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1959, 6(1): 77-96.
- [2] Davies T V. The magnetohydrodynamic boundary layer in two-dimensional steady flow past a semi-infinite flat plate—part I: uniform conditions at infinity[J]. *Proc R Soc Lond A*, 1963, 273(1355): 496-507.

- [3] Davies T V. The magnetohydrodynamic boundary layer in two-dimensional steady flow past a semi-infinite flat plate—part III : influence of adverse magneto-dynamic pressure gradient[J]. *Proc R Soc Lond A*, 1963, **273**(1355) : 518-537.
- [4] Gibben R J. Magnetohydrodynamic stagnation-point flow [J]. *Quart J Mech Appl Math*, 1963, **18**(3) : 357-384.
- [5] Gibben R J. The magnetohydrodynamic boundary layers in the presence of a pressure gradient [J]. *Proc R Soc Lond A*, 1965, **287**(1408) : 123-141.
- [6] Ramamoorthy P. Heat transfer in hydromagnetics[J]. *Quart J Mech Appl Math*, 1965, **18**(1) : 31-40.
- [7] Tan C W, Wang C T. Heat transfer in aligned-field magnetohydrodynamic flow past a flat plate[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1967, **11**(2) : 319-329.
- [8] Hildyard T. Falkner-Skan problem in magnetohydrodynamics[J]. *Phys Fluids*, 1972, **15**(6) : 1023-1027.
- [9] Ingham D B. The magnetogasdynamic boundary layer for a thermally conducting plate[J]. *Quart J Mech Appl Math*, 1967, **20**(3) : 347-364.
- [10] Glauert M B. The boundary layer on a magnetized plate[J]. *J Fluid Mech*, 1962, **12**(4) : 625-638.
- [11] Chawla S S. Fluctuating boundary layer on a magnetized plate[J]. *Proc Comb Phil Soc*, 1967, **63**(2) : 513-525.
- [12] Cess R D. The effect of radiation upon forced convection heat transfer[J]. *Appl Sci Res Section A*, 1962, **10**(1) : 430-438.
- [13] Sparrow E M, Lin S H. Boundary layers with prescribed heat flux—applications to simultaneous convection and radiation[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1965, **8** : 437-448.
- [14] Lin R C, Cebeci T. Solution of the equations of the compressible laminar boundary layers with surface radiation[R]. Douglas Aircraft Co Report No DAC, 33482, Los Angeles, Calif, 1966.
- [15] Perlmutter M, Siegel R. Heat transfer by combined forced convection and thermal radiation in a heated tube[J]. *J Heat Transfer*, 1962 **84**(4) : 301-311.
- [16] Siegel R, Keshock E G. Wall temperature in a tube with forced convection[R]. Internal radiation exchange and axial wall conduction, NASA, Tech Note TND, 2116, March 1964.
- [17] John C Chen. Laminar heat transfer in a tube with non linear radiant heat flux boundary condition[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1966, **9**(5) : 433-440.
- [18] Dussan B I, Irvine T F. Laminar heat transfer in a round tube with radiating flux at the outer wall[C]//*Proceedings of the Third International Heat Transfer Conference*. Vol 5. Chicago, Aug, 7-12, 1966: 184-189.
- [19] Thorsen R S. Heat transfer in a tube with forced convection, internal radiation exchange, axial wall heat conduction and arbitrary wall heat generation[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1969, **12** : 1182-1187.
- [20] Thorsen R S, Kanchanagom. The influence of internal radiation exchange arbitrary wall heat generation and wall heat conduction on heat transfer in laminar and turbulent flows[C]//*Proceedings of the Fourth International Heat Transfer Conference*. Vol 3. Section R 2. 8, Paris, 1970: 1-10.
- [21] Liu S T, Thorsen R S. Combined forced convection and radiation heat transfer in asymmetri-

- cally heated parallel plates[C]//*Proceedings of the Fourth International Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute*. Palo Alto Calif; Stanford University Press, 1970: 32-44.
- [22] Ali M M, Chen T S, Armaly B. Natural convection radiation interaction in boundary layer flow over horizontal surface[J]. *AIAA J*, 1984, **22**: 1797-1803.
- [23] Arpacı V S. Effect of thermal radiation with free convection from a heated vertical plate[J]. *Heat Mass Transfer*, 1972, **15**: 1243-1252.
- [24] Cheng E H, Ozisik M N. Radiation with free convection in an absorbing, emitting and scattering medium[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1972, **15**(6): 1243-1252.
- [25] Sparrow E M, Cess R D. Radiation heat transfer, Aumented edition, Hemisphere media[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1962, **5**: 179-806.
- [26] Soundalgekar V M, Takhar H S, Vighnesam N V. Combined free and forced convection flow past a semi infinite vertical plate with variable surface temperature[J]. *Nuclear Engineering and Design*, 1960, **110**(1): 95-98.
- [27] Hossain M A, Takhar H S. Radiation effect on mixed convection along a vertical plate with uniform surface temperature[J]. *Heat and Mass Transfer*, 1996, **31**(4): 243-248.
- [28] Aboeldahab E M, Gendy M S E. Radiation effect on MHD-convection flow of a gas past a semi-infinite vertical plate with variable thermophysical properties for high temperature differences[J]. *Can J Phys*, 2002, **80**: 1609-1619.
- [29] Mebine P, Adigio E M. Unsteady free convection flow with thermal radiation past a vertical porous plate with Newtonian heating[J]. *Turk J Phys*, 2009, **33**: 109-119.
- [30] Palani G, Abbas I A. Free convection MHD flow with thermal radiation from an impulsively-started vertical plate[J]. *Nonlinear Anal Model Control*, 2009, **14**(1): 73-84.
- [31] Sparrow E M, Cess R D. Free convection with blowing or suction[J]. *J Heat Transf*, 1961, **83**: 387-396.
- [32] Merkin H J. The effects of blowing and suction on free convection boundary layers[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1975, **18**(2): 237-244.
- [33] Clarke J F. Transpiration and natural convection: the vertical plate problem[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1973, **57**(1): 45-61.
- [34] Vedhanayagam M, Altenkrich R A, Eichhorn R. A transformation of the boundary layer equations for free convection past a vertical flat plate with arbitrary blowing and wall temperature variations[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1980, **23**: 1286-1288.
- [35] Clarke J F, Riley N. Natural convection induced in a gas by the presence of a hot porous horizontal surface[J]. *Quart J Mech Appl Math*, 1975, **28**(4): 373-396.
- [36] Gupta A S, Misra J C, Reza M. Magnetohydrodynamic shear flow along a flat plate with uniform suction or blowing[J]. *ZAMP*, 2005, **56**(6): 1030-1047.
- [37] 萨胡 B, 沙尔马 H G. 均匀自由流动的非牛顿流体中连续表面上的磁流体动力学流动和热传递[J]. *应用数学和力学*, 2007, **28**(11): 1307-1317. (Sahoo Bikash, Sharma H G. MHD flow and heat transfer from continuous surface in uniform free stream of non Newtonian fluid[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2007, **28**(11): 1467-1477.)
- [38] 祖额科 J, 阿么德 S. 流经有热源多孔平板并伴有化学反应的传热传质混合对流 MHD 流动[J]. *应用数学和力学*, 2010, **31**(10): 1160-1171. (Zueco J, Ahmed S. Combined heat and mass transfer by convection MHD flow along a porous plate with chemical reaction in presence of heat source[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2010, **31**(10): 1217-1230.)

- [39] 阿里 F M, 纳扎尔 R, 阿里菲 N M, 波普 I. 考虑感应磁场影响时, 伸展表面上的 MHD 驻点流动及其热传递[J]. 应用数学和力学, 2011, 32(4): 391-399. (Ali F M, Nazar R, Arfin N M, Pop I. MHD stagnation point flow and heat transfer towards stretching sheet with induced magnetic field[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2011, 32(4): 409-418.)
- [40] 苏晓红, 郑连存. 可渗透壁面上 Falkner-Skan 磁流体动力学流动的近似解[J]. 应用数学和力学, 2011, 32(4): 383-390. (SU Xiao-hong, ZHENG Lian-cun. Approximate solution to MHD Falkner-Skan flow over permeable wall[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2011, 32(4): 401-408.)
- [41] 斯特 G C, 哈尔达 R. 热辐射对粘性流体流过多孔非线性收缩平面时的 MHD 流动和热传导的影响[J]. 应用数学和力学, 2011, 32(6): 635-646. (Shit G C, Haldar R. Effect of thermal radiation on MHD viscous fluid flow and heat transfer over non linear shirking porous plate[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2011, 32(6): 677-688.)
- [42] Muhammad Ashraf, Asghar S, Hossain M A. Thermal radiation effects on hydromagnetic mixed convection flow along a magnetized vertical porous plate[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 686594, 30 pages, doi:10.1155/2010/686594, 2010.

Computational Study of the Combined Effects of Conduction-Radiation and Hydromagnetic on Natural Convection Flow Past a Magnetized Permeable Plate

Muhammad Ashraf¹, S. Asghar^{1,2}, M. A. Hossain^{1,3}

(1. Department of Mathematics, COMSATS Institute of Information Technology, Chak Shahzad Campus, Islamabad 44000, Pakistan;

2. Department of Mathematics, King Abdul Aziz University, Jeddah, Saudi Arabia;

3. Department of Mathematics, University of Dhaka, Dhaka, Bangladesh)

Abstract: The computational study of the combined effects of radiation and hydromagnetics on natural convection flow of, viscous, incompressible, electrically conducting fluid past a magnetized permeable vertical plate was presented. The governing non similar equations were solved by using (i) finite difference method for entire value of suction parameter ξ and (ii) asymptotic solution for small and large value of ξ numerically. The effects of varying the Prandtl number Pr , magnetic Prandtl number P_m , magnetic force parameter S , radiation parameter R_d , and surface temperature θ_w on coefficients of skin friction, rate of heat transfer and current density were shown in graphical form and as well as in tables. Finally, an attempt was made to examine the effects of above mentioned physical parameters on velocity profile, temperature distribution and transverse component of magnetic field.

Key words: hydromagnetic; fluctuating; natural convection; magnetized plate; current density; heat transfer