

有限区域求解流函数和速度势的 迭代调整方法及其收敛性分析*

黎爱兵, 张立凤, 臧增亮, 张云

(解放军理工大学 气象学院,南京 211101)

摘要: 全球区域求解流函数和速度势的解是唯一的,但有限区域内,由于受区域边界条件限制,流函数和速度势的计算以及风场的分解不是唯一的,减小或消除边界不确定对结果的影响是有限区域求解流函数和速度势以及分解风场最重要的问题.该文在 Endlich 迭代调整思想上,提出了能准确求解有限区域流函数和速度势且对边界条件要求较低的迭代调整方法.该方法也能准确地分解和重建风场,且风场重建的误差非常小.对该迭代方法的收敛性进行分析,发现其收敛性与不同方向网格的格距和调整系数有关.最后将该方法应用到 Arakawa A-D 网格和不规则区域,验证了该方法的可靠性.

关键词: 有限区域; 流函数和速度势; 迭代调整; 收敛性

中图分类号: O302; P425 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.06.002

引 言

流函数和速度势在气象中被广泛使用,是针对无辐散运动和无旋转运动表示风场的一组物理量,也是对风场分解的有效工具^[1],其不仅能很好地反映流体的涡度和散度^[2],在大气环流分析和资料同化方面也有着广泛的应用^[3-6].

风场可以直接观测,然而流函数和速度势不是观测量,其主要通过求解 Poisson 方程得到.流函数和速度势的计算在周期边界的全球范围内可以得到唯一精确解^[7],但在有限区域内,由于无法确定边界上的流函数和速度势,解是不唯一的^[8],且计算往往存在误差.为了解决这个问题,国内外许多学者作了大量的研究.

Tangri^[9]在求解有限区域流函数时,假设边界条件为 0. Phillips^[10]提出流函数的边界可用法向原始风速与平均风速之差来确定,但 Hawkins 和 Rosenthal^[11]指出,通过该边界得到的流函数和速度势重建的风场与实测风场差异较大. Brown 和 Neilon^[11]在 Phillips 基础上直接用实测的法向风速来确定边界条件.

* 收稿日期: 2011-09-26; 修订日期: 2012-03-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40975031)

作者简介: 黎爱兵(1985—),男,湖南益阳人,博士生(Tel: +86-25-80831403; E-mail: jeibing@126.com);

张立凤(1961—),女,河北唐山人,教授(联系人. Tel: +86-25-80831403; E-mail: zhanglif@yeah.net).

以上方法都是求解单个 Poisson 方程,而实际中流函数和速度势是有密切联系的描述风场的两个变量. Sangster^[12] 提出同时考虑流函数和速度势,首先求得零边界的速度势及其辐散风,然后用风向风速减去辐散风来确定流函数边界,但后来的计算反映此方法不能准确地分解和重建水平风场^[13]. 在 Sangster 基础上, Shukla 等^[14] 提出不断更新流函数和速度势边界的迭代方法. Bijlsma 等^[8] 将流函数和速度势都分解为两部分,设计了另一种迭代方法. 但 Lynch^[15-16] 在讨论多种边界下流函数和速度势的迭代计算问题时指出,两迭代方法都不收敛. Chen 等^[17-18] 提出了求解流函数和速度势的调和-正弦/余弦展开方法,其外部部分也由边界确定. 他们还给出了有限区域流函数和速度势解不唯一的证明,但风场分解成的旋转风和辐散风之和是唯一的,并在此基础上,重新定义了流函数和速度势求解的标准,即用流函数和速度势去分解和重建风场,看重建的风场是否能与原始风场一致. 近年来,朱宗申等^[19-20] 和周玉淑等^[21-22] 在有限区域流函数和速度势计算和风场分解方面也做了许多研究,其主要目的也是消除边界对流函数和速度势计算结果和重建风场的影响.

除通过 Poisson 方程求解流函数和速度势来分解风场外,也有一些学者从其他角度来分解风场,但相关的文献不多. Endlich^[23] 通过迭代两次调整求得了旋转风,但没有给出迭代收敛的证明. Davies-Jones^[24] 通过变分原理在特定情形下,求得了与气压场非常相似的流函数. Li 等^[25] 基于 Tikhonov 正则化方法求得了有限区域的流函数和速度势.

综上所述,无论采用什么方法求解有限区域的流函数和速度势,其难点主要在消除边界条件的影响,至今,不需严格考虑边界条件就能准确求解有限区域流函数和速度势并能很好地重建原始风场的计算方法还很少. 本文在 Endlich 迭代调整思想基础上,根据流函数和速度势与水平风场的关系,设计了一个合理的且不需考虑边界条件的有限区域求解流函数和速度势的迭代调整方法,并对该方法的收敛性进行了分析,然后针对不同的网格和在不规则区域对该方法进行了验证.

1 有限区域求解流函数和速度势的迭代调整原理

1.1 Endlich 分解风场的迭代调整思想

水平风场 \mathbf{V} 可以分解为旋转风 \mathbf{V}_ψ 和辐散风 \mathbf{V}_χ ^[17-18,21]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi, \quad (1)$$

其中, $\mathbf{V}_\psi, \mathbf{V}_\chi$ 分别表示无辐散运动和无旋转运动,它们可定义为

$$\mathbf{V}_\psi = \mathbf{k} \times \nabla\psi, \quad \mathbf{V}_\chi = \nabla\chi, \quad (2)$$

其中, ψ 为流函数, χ 为速度势, \mathbf{k} 为垂直方向的单位矢量. 利用式(2),在已知流函数和速度势的情形下,可对水平风场进行分解.

由式(1)和(2)可得到水平风场与流函数和速度势的关系为

$$\begin{cases} u = u_\psi + u_\chi = \frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ v = v_\psi + v_\chi = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y}, \end{cases} \quad (3)$$

其中, $(u, v), (u_\psi, v_\psi)$ 和 (u_χ, v_χ) 分别为 $\mathbf{V}, \mathbf{V}_\psi$ 和 \mathbf{V}_χ 在 x, y 方向上的分量. 利用式(3),在已知流函数和速度势的情况下可对原始水平风场进行重建,即通过流函数和速度势求旋转风和辐散风之和就为重建的水平风场.

对式(1)求涡度和散度,并由式(2)可知流函数和速度势分别与水平风场涡度 ζ 和散度 D

的关系为

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = \nabla \times \mathbf{V} = \zeta = \frac{\partial v_\psi}{\partial x} - \frac{\partial u_\psi}{\partial y}, \\ \nabla^2 \chi = \nabla \cdot \mathbf{V} = D = \frac{\partial u_\chi}{\partial x} + \frac{\partial v_\chi}{\partial y}. \end{cases} \quad (4)$$

式(4)给出了旋转风、辐散风与散度、涡度的关系。 (u_ψ, v_ψ) 表示大气的无辐散运动,其散度应为0,涡度等于原始风场的涡度,结合式(4), (u_ψ, v_ψ) 与风场的涡度、散度有如下关系:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\psi}{\partial x} + \frac{\partial v_\psi}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_\psi}{\partial x} - \frac{\partial u_\psi}{\partial y} = \zeta. \end{cases} \quad (5)$$

1967年 Endlich^[23]利用观测风场的涡度和散度与式(5)成功地对有限区域的风场进行了分解,迭代求得了旋转风和辐散风。下面,我们简单介绍 Endlich 迭代分解风场思想。

首先引入一个临时风场 (u', v') ,其对应的临时散度和涡度分别为 D' 和 ζ' ,它们一般不满足旋转风式(5)要求。要使 (u', v') 满足式(5)的关系,必须对其进行调整。可先在临时风场 u' 分量的 x 方向和 v' 分量的 y 方向分别引进大小相等符号相反的第1次调整量 $(u^{\text{RD}}, v^{\text{RD}})$,使其散度为0,写成差分格式为

$$\frac{[u'_{i+1,j} + u^{\text{RD}}_{i,j}] - [u'_{i-1,j} - u^{\text{RD}}_{i,j}]}{2\delta x} + \frac{[v'_{i,j+1} + v^{\text{RD}}_{i,j}] - [v'_{i,j-1} - v^{\text{RD}}_{i,j}]}{2\delta y} = 0, \quad (6)$$

其中, $\delta x, \delta y$ 和下标 i, j 分别为网格在 x 和 y 方向的相邻网格距离和序号。

设 u^{RD} 和 v^{RD} 大小相等,且 $\delta x = \delta y$,由 D' 和式(6)不难求得

$$u^{\text{RD}}_{i,j} = -\frac{\delta x}{2} D'_{i,j}, \quad v^{\text{RD}}_{i,j} = -\frac{\delta y}{2} D'_{i,j},$$

从而第1次调整后的风场 (u', v') 为

$$u'_{i+1,j} = u'_{i+1,j} + u^{\text{RD}}_{i,j}, \quad u'_{i-1,j} = u'_{i-1,j} - u^{\text{RD}}_{i,j}, \quad v'_{i,j+1} = v'_{i,j+1} + v^{\text{RD}}_{i,j}, \quad v'_{i,j-1} = v'_{i,j-1} - v^{\text{RD}}_{i,j}.$$

经过第1次调整后,尽管 (u', v') 在格点 (i, j) 处的散度为0,但它的涡度 ζ' 一般不等于 ζ ,必须进行第2次调整。根据同样的原理,为了满足原始风场涡度要求,在 u' 分量的 y 方向和 v' 分量的 x 方向分别引进第2次调整量

$$u^{\text{RR}}_{i,j} = -\frac{\delta y}{2} (\zeta'_{i,j} - \zeta_{i,j}), \quad v^{\text{RR}}_{i,j} = -\frac{\delta x}{2} (\zeta'_{i,j} - \zeta_{i,j}),$$

故第2次调整后的风场 (u'', v'') 为

$$u''_{i,j+1} = u'_{i,j+1} + u^{\text{RR}}_{i,j}, \quad u''_{i,j-1} = u'_{i,j-1} - u^{\text{RR}}_{i,j}, \quad v''_{i+1,j} = v'_{i+1,j} + v^{\text{RR}}_{i,j}, \quad v''_{i-1,j} = v'_{i-1,j} - v^{\text{RR}}_{i,j}.$$

对所有格点进行调整后,若 (u'', v'') 还不满足旋转风的要求,使 (u'', v'') 替换 (u', v') ,并重新进行调整和迭代计算,直到整个计算区域的 D' 都小于某一临界值 ε 为止,故最后的风场就为 (u_ψ, v_ψ) ,并由式(1)可计算出 (u_χ, v_χ) 。这样经过多次迭代调整后, \mathbf{V} 就分解成了 \mathbf{V}_ψ 和 \mathbf{V}_χ 。同样的思想也适合先求辐散风后求旋转风,如刘建文等^[26]通过 Endlich 迭代调整先求出辐散风场,然后根据实际风场的特点计算出相应的旋转风场。

1.2 有限区域流函数和速度势计算原理

风场容易获得,流函数和速度势不易得到,利用迭代调整分解风场的思想,根据流函数和速度势与风场的关系式(3),可计算流函数和速度势,具体做法如下(本小节以正方形网格为例,即 $\delta x = \delta y$):

第1步:利用流函数和速度势求临时风场。根据式(3),设第 n 次迭代调整后流函数和速度势分别为 ψ^n 和 χ^n ($n=0$ 表示初始时刻,其流函数和速度势可为任意值,计算时一般取为0),则由流函数和速度势求得的临时风场(u^n, v^n)为

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi^n}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial y} = u^n, \\ \frac{\partial \psi^n}{\partial x} + \frac{\partial \chi^n}{\partial y} = v^n. \end{cases} \quad (7)$$

第2步:调整流函数和速度势使临时风场接近实际风场。为了使式(3)成立,参照式(6)的做法,同时对式(7)中流函数和速度势进行调整,即有

$$\begin{cases} \frac{[\chi_{i+1,j}^n + \chi_{i,j}^x] - [\chi_{i-1,j}^n - \chi_{i,j}^x]}{2\delta x} - \frac{[\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^y] - [\psi_{i,j-1}^n - \psi_{i,j}^y]}{2\delta y} = u_{i,j}, \\ \frac{[\chi_{i,j+1}^n + \chi_{i,j}^y] - [\chi_{i,j-1}^n - \chi_{i,j}^y]}{2\delta y} + \frac{[\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^x] - [\psi_{i-1,j}^n - \psi_{i,j}^x]}{2\delta x} = v_{i,j}, \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\psi_{i,j}^x, \psi_{i,j}^y$ 和 $\chi_{i,j}^x, \chi_{i,j}^y$ 分别代表流函数和速度势在网格 (i,j) 点 x 和 y 方向上的调整值。由式(7)和(8)可知

$$\begin{cases} \frac{\chi_{i,j}^x}{\delta x} - \frac{\psi_{i,j}^y}{\delta y} = u_{i,j} - u_{i,j}^n, \\ \frac{\chi_{i,j}^y}{\delta y} + \frac{\psi_{i,j}^x}{\delta x} = v_{i,j} - v_{i,j}^n. \end{cases} \quad (9)$$

为了计算简单和迭代收敛(可见第2节的收敛性分析),设 x 和 y 方向上的流函数和速度势调整值为

$$\begin{cases} \psi_{i,j}^x = 0.5\delta x(v_{i,j} - v_{i,j}^n), \\ \psi_{i,j}^y = -0.5\delta y(u_{i,j} - u_{i,j}^n), \\ \chi_{i,j}^x = 0.5\delta x(u_{i,j} - u_{i,j}^n), \\ \chi_{i,j}^y = 0.5\delta y(v_{i,j} - v_{i,j}^n), \end{cases} \quad (10)$$

所以第 $n+1$ 次迭代调整后的流函数和速度势为

$$\begin{cases} \psi_{i+1,j}^{n+1} = \psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^x, \chi_{i+1,j}^{n+1} = \chi_{i+1,j}^n + \chi_{i,j}^x, \\ \psi_{i-1,j}^{n+1} = \psi_{i-1,j}^n - \psi_{i,j}^x, \chi_{i-1,j}^{n+1} = \chi_{i-1,j}^n - \chi_{i,j}^x, \\ \psi_{i,j+1}^{n+1} = \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^y, \chi_{i,j+1}^{n+1} = \chi_{i,j+1}^n + \chi_{i,j}^y, \\ \psi_{i,j-1}^{n+1} = \psi_{i,j-1}^n - \psi_{i,j}^y, \chi_{i,j-1}^{n+1} = \chi_{i,j-1}^n - \chi_{i,j}^y. \end{cases} \quad (11)$$

第3步:迭代结束判断。对每网格点进行迭代调整后,通过式(7)计算第 $n+1$ 次迭代调整后的临时风场(u^{n+1}, v^{n+1}),其也是流函数和速度势的重建水平风场。值得注意的是对有限区域每个格点进行调整时,会破坏周围格点流函数和速度势与风场的关系,所以要使有限区域内每个格点都满足式(3),必须进行多次迭代。为使流函数和速度势重建的水平风场接近原始风场,可取非常小的参数 ε (ε 可为 10^{-12} 或更小)作为结束迭代的临界数,当 $|u^{n+1} - u| + |v^{n+1} - v| < \varepsilon$ 时,即说明通过流函数和速度势求得的(u^{n+1}, v^{n+1})与 (u, v) 之间误差或重建风场误差已非常小,迭代可以结束。这样就求得了能很好重建原始风场的流函数和速度势,并根据式(2)可对原始风场进行分解,求得相应的旋转风和辐散风。

从以上计算原理可见,该方法主要是根据有限区域流函数和速度势与风场的关系进行迭

代求解,即只要已知计算区域内的风场就能通过迭代调整求得区域内的流函数和速度势,而不需要给定这两个物理量在边界上的值,从而成功消除了边界对计算结果的影响。

2 迭代调整方法的收敛性分析

由式(7),不难将差分格式转化为矩阵形式,即有

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\chi}^n - \boldsymbol{\psi}^n\mathbf{B} = \mathbf{U}^{nt}, \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\psi}^n + \boldsymbol{\chi}^n\mathbf{B} = \mathbf{V}^{nt}, \quad (12)$$

其中, \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为差分格式矩阵, $\boldsymbol{\psi}^n$, $\boldsymbol{\chi}^n$, \mathbf{U}^{nt} 和 \mathbf{V}^{nt} 分别为第 n 次迭代调整后流函数、速度势和临时风场矩阵,它们的形式分别为

$$\boldsymbol{\chi}^n = (\chi_{i,j}^n)_{M \times N}, \quad \boldsymbol{\psi}^n = (\psi_{i,j}^n)_{M \times N}, \quad \mathbf{U}^{nt} = (u_{i,j}^{nt})_{M \times N}, \quad \mathbf{V}^{nt} = (v_{i,j}^{nt})_{M \times N},$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2\delta x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}_{M \times M}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2\delta y} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & \ddots & & & \\ & 1 & \ddots & -1 & & \\ & & \ddots & 0 & -1 & \\ & & & 1 & 0 & \end{pmatrix}_{N \times N},$$

其中,下标 M 和 N 表示矩阵大小.由式(8)和(9)不难推得第 $n+1$ 次迭代调整后流函数和速度势的矩阵形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{\chi}^{n+1} = \boldsymbol{\chi}^n + a\mathbf{C}\mathbf{e}_u^n + b\mathbf{e}_v^n\mathbf{D}, \\ \boldsymbol{\psi}^{n+1} = \boldsymbol{\psi}^n + a\mathbf{C}\mathbf{e}_v^n - b\mathbf{e}_u^n\mathbf{D}, \end{cases} \quad (13)$$

其中, a 和 b 为迭代调整时引入的一组正值调整系数($\delta x = \delta y$ 时, $a = b = 1$), $\mathbf{e}_u^n = \mathbf{U} - \mathbf{U}^{nt}$ 和 $\mathbf{e}_v^n = \mathbf{V} - \mathbf{V}^{nt}$ 分别为第 n 次迭代调整后临时风场与原始风场 u 分量和 v 分量之间的误差矩阵, \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 为原始风场矩阵, \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 为调整矩阵,它们的形式分别为

$$\mathbf{U} = (u_{i,j})_{M \times N}, \quad \mathbf{V} = (v_{i,j})_{M \times N},$$

$$\mathbf{C} = \frac{\delta x}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & \ddots & & & \\ & 1 & \ddots & -1 & & \\ & & \ddots & 0 & -1 & \\ & & & 1 & 0 & \end{pmatrix}_{M \times M}, \quad \mathbf{D} = \frac{\delta y}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & \ddots & & & \\ & -1 & \ddots & 1 & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & & -1 & 0 & \end{pmatrix}_{N \times N}.$$

将式(13)代入式(12)可得

$$\begin{cases} a\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{e}_u^n + b\mathbf{A}\mathbf{e}_v^n\mathbf{D} - a\mathbf{C}\mathbf{e}_v^n\mathbf{B} + b\mathbf{e}_u^n\mathbf{D}\mathbf{B} = \mathbf{U}^{n+1t} - \mathbf{U}^{nt} = \mathbf{e}_u^n - \mathbf{e}_u^{n+1}, \\ a\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{e}_v^n - b\mathbf{A}\mathbf{e}_u^n\mathbf{D} + a\mathbf{C}\mathbf{e}_u^n\mathbf{B} + b\mathbf{e}_v^n\mathbf{D}\mathbf{B} = \mathbf{V}^{n+1t} - \mathbf{V}^{nt} = \mathbf{e}_v^n - \mathbf{e}_v^{n+1}. \end{cases} \quad (14)$$

由 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 的矩阵形式,易知它们之间有如下关系式:

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{\delta x^2}\mathbf{C}, \quad \mathbf{B} = -\frac{1}{\delta y^2}\mathbf{D}. \quad (15)$$

由式(14)和(15)可得

$$\begin{cases} \mathbf{e}_u^n - a\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{e}_u^n - b\mathbf{e}_u^n\mathbf{D}\mathbf{B} - (b\delta y^2 - a\delta x^2)\mathbf{A}\mathbf{e}_v^n\mathbf{B} = \mathbf{e}_u^{n+1}, \\ \mathbf{e}_v^n - a\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{e}_v^n - b\mathbf{e}_v^n\mathbf{D}\mathbf{B} + (b\delta y^2 - a\delta x^2)\mathbf{A}\mathbf{e}_u^n\mathbf{B} = \mathbf{e}_v^{n+1}. \end{cases} \quad (16)$$

当 $b/a = \delta x^2/(\delta y^2)$ 时,把式(16)两方程相加,故有

$$(\mathbf{e}_u^n + \mathbf{e}_v^n) - a\mathbf{A}\mathbf{C}(\mathbf{e}_u^n + \mathbf{e}_v^n) - b(\mathbf{e}_u^n + \mathbf{e}_v^n)\mathbf{D}\mathbf{B} = \mathbf{e}_u^{n+1} + \mathbf{e}_v^{n+1}. \quad (17)$$

将式(17)简化为

$$r\left(I_M - \frac{a}{r}AC\right)e_{uv}^n + e_{uv}^n(1-r)\left(I_N - \frac{b}{1-r}DB\right) = e_{uv}^{n+1}, \tag{18}$$

其中, r 为 $0 \sim 1$ 之间的常数, 即 $0 \leq r \leq 1$, I_M 和 I_N 分别为 M 和 N 阶单位矩阵, $e_{uv}^n = e_u^n + e_v^n$ 和 $e_{uv}^{n+1} = e_u^{n+1} + e_v^{n+1}$ 分别为第 n 次迭代调整与第 $n + 1$ 次迭代调整后重建风场的误差矩阵。

残量校正法^[27] 可用来分析迭代计算的收敛性, 由该方法可知迭代格式(18)的迭代矩阵即误差传播矩阵为

$$R_1 = r\left(I_M - \frac{a}{r}AC\right), R_2 = (1-r)\left(I_N - \frac{b}{1-r}DB\right).$$

为保证差分格式的一致性, 迭代调整主要在除最外一圈的区域计算, 所以式(18)可变为

$$\begin{aligned} \|e_{uv}^{n+1}\| &\leq \|R_1'\| \|e_{uv}^n\| + \|e_{uv}^n\| \|R_2'\| = \\ &(\|R_1'\| + \|R_2'\|) \|e_{uv}^n\| \leq \dots \leq \\ &(\|R_1'\| + \|R_2'\|)^{n+1} \|e_{uv}^0\|, \end{aligned} \tag{19}$$

其中, R_1', R_2', e_{uv}^n 分别为 R_1, R_2, e_{uv}^n 除最外一圈的内部矩阵, $\|\cdot\|$ 为矩阵的范数. 由残量校正法可知, 当误差传播矩阵的谱半径 ρ 即矩阵特征值模的最大值小于 1 时, 误差随迭代次数的增加而衰减, 迭代收敛. 故 $\rho(R_1') + \rho(R_2')$ 为收敛因子, 当 $\rho(R_1') + \rho(R_2') < 1$ 时, 迭代格式(18)对于初始任意选择的流函数和速度势都是收敛的, 且渐近收敛速度可定义为

$$-\ln(\rho(R_1') + \rho(R_2')).$$

根据矩阵 R_1 和 R_2 的形式, 不难计算 a 或 b 的收敛区域(即谱半径小于 1 的范围) 随 r 的变化, 结果如图 1 所示, 图中阴影区域为可收敛区域, 呈三角形分布, 说明 a 的收敛区域上限关于 r 有一最大值, 其最大值与网格 x 和 y 方向相邻网格距离之比有关. 当 $\delta x = \delta y$ 时, $a = b$, 在 $r = 0.5$ 处, a 收敛区域的最大值为 1(见图 1(b)), 这就是为什么正方形网格流函数和速度势的调整值为式(10); 从图 1(a)和图 1(c)中阴影区域来看, 当 $\delta x < \delta y$ 时, $b/a < 1$, a 收敛区域最大值大于 1, 而当 $\delta x > \delta y$ 时, $b/a > 1$, 相应最大值小于 1.

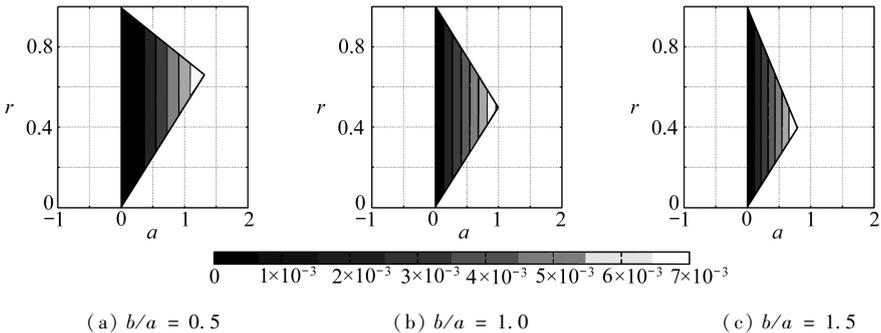


图 1 收敛区域渐近收敛速度分布图(阴影区域为可收敛区域, 色标大小为渐近收敛速度)
 Fig. 1 The distribution of asymptotic convergence rate for convergent domain (shaded area is convergent domain and the value of colorbar is asymptotic convergence rate)

通过计算可知, 当 $0 < a/r \leq 2, 0 \leq b/(1-r) \leq 2$ 时, $\rho(R_1') + \rho(R_2') < 1$, 因为 $b/a = \delta x^2/(\delta y^2)$, 所以当 $r = \delta y^2/(\delta x^2 + \delta y^2)$ 时, a 或 b 收敛上限最大, 即当 $0 < a \leq 2\delta y^2/(\delta x^2 + \delta y^2), 0 < b \leq 2\delta x^2/(\delta x^2 + \delta y^2)$ 时, 此迭代调整收敛. 图 1 还给出了收敛区域的渐近收敛速度, 从该结果来看, 渐近收敛速度 $-\ln(\rho(R_1') + \rho(R_2'))$ 随 a 线性变化, a 越大, 迭代收敛就越快, 故迭代调整时, $a(b)$ 的值尽可能选收敛区域中的最大值

$$2\delta y^2/(\delta x^2 + \delta y^2)(2\delta x^2/(\delta x^2 + \delta y^2)).$$

由以上收敛性分析可知,本文给出的迭代调整方法的收敛性除与相邻网格距离大小 δx 与 δy 之比有关外,即 $b/a = \delta x^2/(\delta y^2)$,其收敛的速度还与迭代调整的系数 a 或 b 的大小有关.还有本节给出的迭代收敛条件是迭代调整方法收敛的充分条件,非必要条件.

3 迭代调整方法在不同网格及不规则区域中的应用

为了检验上述方法,利用 2009 年 3 月 21 日 18UTC 的 NCEP/NCAR $1^\circ \times 1^\circ$ 的 500 hPa 的水平风场再分析资料,选择 $(30^\circ \sim 80^\circ N, 130^\circ \sim 180^\circ E)$ 为计算区域,通过上述迭代调整方法进行数值计算和结果分析.

3.1 迭代收敛检验

对 x 和 y 方向网格距离相等的正方形网格来说,调整系数 a 和 b 都可取为 1,但对于经纬网格,经度和纬度方向相邻网格距离不相等,由上面的收敛性分析可知,为了迭代收敛, a 和 b 要满足一定的条件,即 $b/a = \cos^2 \varphi$ 且 $0 < a \leq 2/(1 + \cos^2 \varphi)$. 图 2 是 a 取不同大小时,迭代误差对数随迭代次数变化图,图中 $f(\varphi) = 1 + \cos^2 \varphi$,从该图来看,迭代误差对数与迭代次数成线性关系,尤其是迭代的后期,线性关系非常明显.从迭代误差衰减速度来看,误差衰减的速度与调整系数有关,在收敛的范围内, a 越大,迭代收敛也越快,这与上面的收敛性分析相符合.下面的计算中,都是在保证收敛的情况下, a 取较大的值.

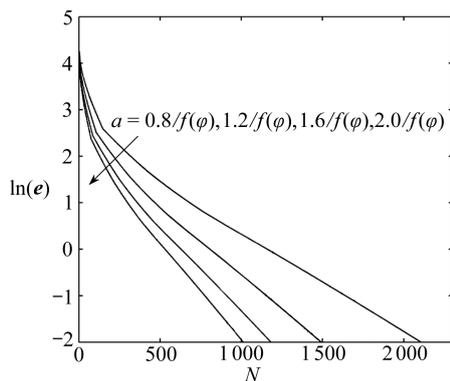


图 2 迭代误差对数 $\ln(e)$ 随迭代次数 N 的变化
Fig. 2 The log of error $\ln(e)$ changes with the number of iterations N

3.2 Arakawa 网格的计算

在 Arakawa 的文献[28] A ~ D 的 4 种网格中,由于网格点上各变量配置的不同,导致式 (3) 差分格式出现差异.由于 NCEP/NCAR 数据是呈 A 网格分布的,为了方便对 B, C 和 D 网格进行计算,首先将水平风场 (u, v) 插值到相应的网格点上,然后采用迭代调整方法求解流函数和速度势并分解和重建原始风场.

表 1 A ~ D 网格下流函数与高度场的相关系数 R_{cor} 、重建风场最大误差

Δu_{max} 和 Δv_{max} 及其最大涡度和散度误差 $\Delta \zeta_{max}$ 和 ΔD_{max}

Table 1 The correlation coefficient R_{cor} between stream function and geopotential height and the maximum error Δu_{max} , Δv_{max} , $\Delta \zeta_{max}$ and ΔD_{max} for the reconstructed wind field, vorticity and divergence in A ~ D grids

grid	R_{cor}	$\Delta u_{max} / (m/s)$	$\Delta v_{max} / (m/s)$	$\Delta \zeta_{max} / (1/s)$	$\Delta D_{max} / (1/s)$
A	0.914 0	$5.071 5 \times 10^{-13}$	$8.437 7 \times 10^{-13}$	$3.774 4 \times 10^{-18}$	$3.415 2 \times 10^{-18}$
B	0.903 5	$4.920 5 \times 10^{-13}$	$8.935 1 \times 10^{-13}$	$8.097 6 \times 10^{-18}$	$1.387 8 \times 10^{-17}$
C	0.907 4	$7.300 8 \times 10^{-13}$	$7.904 8 \times 10^{-13}$	$2.562 1 \times 10^{-17}$	$5.720 9 \times 10^{-17}$
D	0.915 5	$5.426 8 \times 10^{-13}$	$8.650 9 \times 10^{-13}$	$1.839 1 \times 10^{-17}$	$2.284 3 \times 10^{-17}$

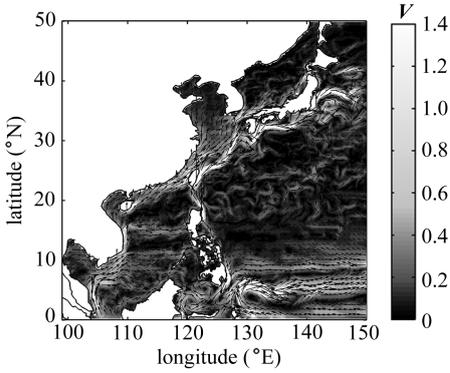
表 1 给出了不同网格下流函数 ψ 与位势高度场 ϕ 的相关系数、重建风场最大误差以及由流函数和速度势求得涡度和散度的最大误差.中高纬度大尺度运动具有准地转关系, ψ 与 ϕ 之间近似存在正比关系,从表 1 结果来看,对 A ~ D 网格,此迭代调整方法流函数与位势场的相关性都在 0.9 以上,故该方法求流函数准确可靠.从理论上来看,迭代结束判断条件决定了重

建风场与实际风场的误差,表1中重建风场最大误差 Δu_{\max} 和 Δv_{\max} 都非常小,不同网格下误差量级都在 10^{-13} m/s 左右,所以此方法很好地解决了以往流函数和速度势求旋转风和辐散风与原始风场存在较大误差的问题。从表1还可得知,由流函数和速度势求得的涡度和散度,与原始风场涡度和散度相比较,其误差在不同网格下也非常小,故此方法求得流函数和速度势不但可以准确地分解和重建原始水平风场,还可以准确地反映原始水平风场的涡度和散度性质,且对 A~D 网格都适用。

3.3 不规则区域的计算

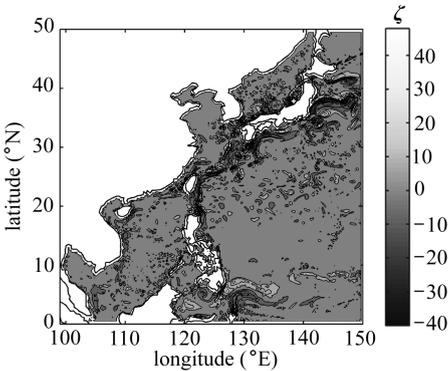
以往对有限区域流函数和速度势的计算,以及对风场分解和重建都是针对规则区域,而大多观测区域是非常复杂和不规则的。例如 Doppler 雷达观测的风场数据在有限的不规则区域内;地面的风场由于受地形限制,其值也分布在不规则区域;还有海洋上的流场受海岸线、海底地形和岛屿的限制,其数据也只在不规则的区域内有值。现在不规则区域的资料越来越多,但至今还没有计算不规则区域流函数和速度势的标准方法^[26],且在这方面研究的工作也较少。Watterson^[29]假设海岸线上的流函数为常值,计算了海洋上的流函数和速度势,刘等^[26]在这方面也作了一些研究。为了说明本文迭代调整方法对边界要求低(即不需要严格考虑流函数和速度势的边界)的特点,下面针对不规则海域计算海洋流场的流函数和速度势。

试验资料为1997年6月20日西太平洋($0^{\circ} \sim 50^{\circ}\text{N}$, $99^{\circ} \sim 150^{\circ}\text{E}$)不规则海域的海面流场(见图3(a))。图3(d)至图3(g)给出了采用迭代调整方法计算得到的流函数和速度势、旋转

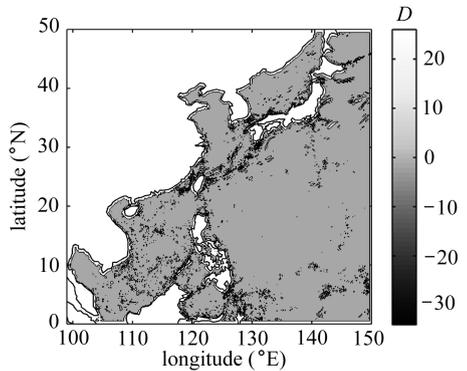


(a) $V/(m/s)$

流和辐散流。从图3(d)可以看出,流函数主要分布在海流速度或涡度较大的区域,其等值线的走向很好地反映了大洋海面流场的流向,尤其是在菲律宾的东南与南部海域以及日本的东部海域,洋流流向在流函数上都有很好的反映,在台湾东部大片海域由于流场的速度和涡度较小,其流函数值较小且等值线比较稀少。图3(e)给出的大洋海面的速度势相对流函数来说数值较小,且密集的等值线分布主要体现在我国和日本的海岸线附近。海面洋流旋转部分(图3(f))要比辐散部分(图3(g))大,与原始海面水平流场非常



(b) $\zeta \times 10^{-6} / (1/s)$



(c) $D \times 10^{-6} / (1/s)$

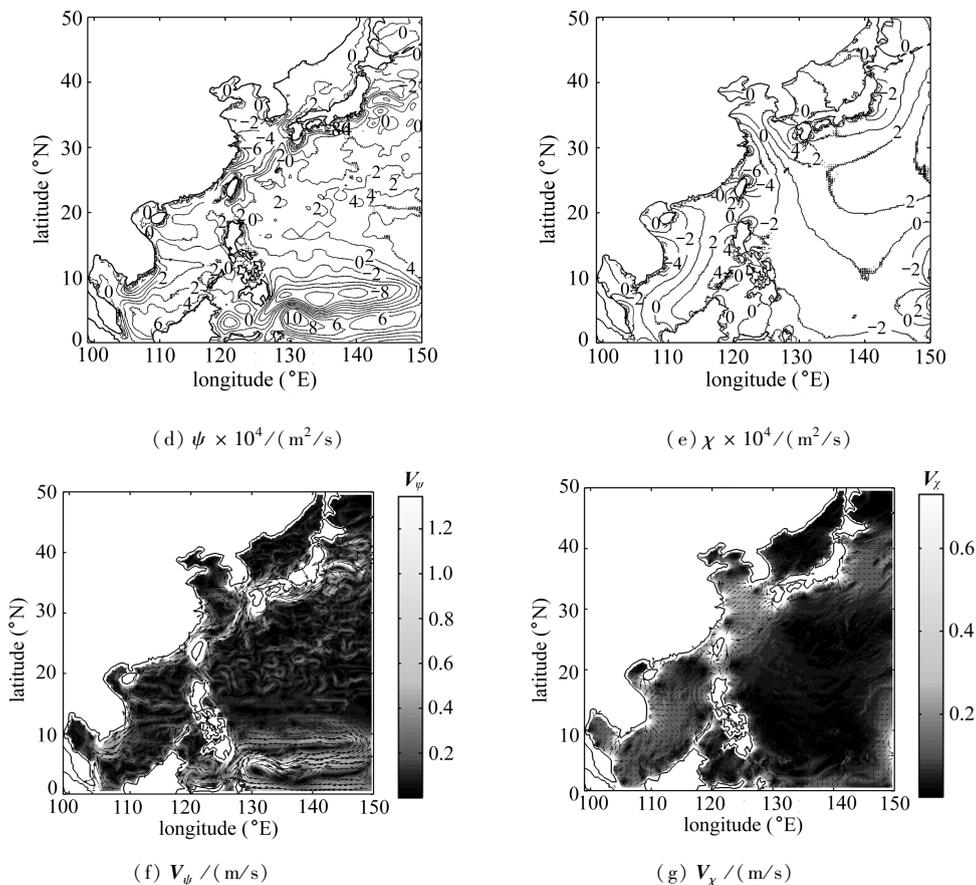


图3 西太平洋的海面流场 V 及其涡度 ζ 、散度 D 、流函数 ψ 、速度势 χ 、旋转流 V_ψ 和辐散流 V_χ (色标大小对应各流场的大小或流场涡度、散度大小)

Fig. 3 The sea surface current V in Western Pacific and its vorticity ζ , divergence D , stream function ψ , velocity potential χ , rotational flow field V_ψ and divergent flow field V_χ (value of colorbar refer to the value of flow filed or vorticity, divergence)

相似,说明海面上的洋流主要是涡旋或旋转流,这在图3(b)和图3(c)给出洋流涡度和散度也可以看出。故此计算方法也可以准确求解不规则区域海洋流场的流函数和速度势,克服了海岸线上流函数和速度势的边界无法确定带来的误差,从而为解决不规则区域流函数和速度势的计算问题提供了一个新的途径。

4 结 论

在 Endlich 迭代分解风场的思想上,本文提出了一个求解有限区域流函数和速度势的迭代调整方法,该方法求得的流函数和速度势可以准确地对风场或流场进行分解和重建,并利用残量校正法分析了该迭代方法的收敛性。最后将该方法应用到 Arakawa 多种网格和不规则区域,检验了方法的精度和可靠性。主要的结论如下:

- 1) 该方法对流函数和速度势的边界条件要求低,很好地克服了以往计算中由于边界条件无法确定而带来误差问题,为求解有限区域流函数和速度势提供了一个新的途径。
- 2) 该迭代调整方法相对原迭代思想在每次迭代过程中只进行一次调整,迭代的收敛性与

两方向相邻网格距离和迭代调整系数 a 或 b 有关,在收敛的范围内,迭代渐近收敛速度还与迭代调整系数 a 或 b 的大小成正比。

3) 该方法求得流函数和速度势比较准确,不但可以通过 Poisson 方程求得高精度的涡度和散度,还可准确地对风场或流场进行分解和重建。对于网格中不同变量配置方案及有限不规则的区域,该方法也可得到准确可靠的结果。

至今流函数和速度势的计算已涌现出许多迭代方法,与这些方法相比,本文的迭代调整方法收敛速度和计算效果如何,有待进一步研究。

致谢 本论文感谢中国科学院大气物理研究所周玉淑老师为本文的研究和论文的完成提供的帮助;感谢解放军理工大学气象学院刘宇迪副教授在 Arakawa 网格上的悉心指导以及师兄刘磊博士、硕士同学郑崇伟和余运科在海洋和大气方面提供的数据。

参考文献(References):

- [1] Hawkins H F, Rosenthal S L. On the computation of stream function from the wind field[J]. *Mon Wea Rev*, 1965, **93**(4):245-252.
- [2] 吕美仲, 候志明, 周毅. 动力气象学[M]. 北京:气象出版社, 2004:113-114. (LÜ Mei-zhong, HOU Zhi-ming, ZHOU Yi. *Dynamic Meteorology*[M]. Beijing: Meteorological Press, 2004: 113-114. (in Chinese))
- [3] Frederiksen J S, Frederiksen C S. Monsoon disturbances, intraseasonal oscillations, teleconnection patterns, blocking, and storm tracks of the global atmosphere during January 1979: linear theory[J]. *J Atmos Sci*, 1993, **50**(10):1349-1372.
- [4] Knutson T R, Weickmann K M. 30 ~ 60 day atmospheric oscillations: composite life cycles of convection and circulation anomalies[J]. *Mon Wea Rev*, 1987, **115**(7):1407-1436.
- [5] Lorenc A C, Ballard S P, Bell R S, Ingleby N B, Andrews P L F, Barker D M, Bray J R, Clayton A M, Dalby T, Li D, Payne T J, Saunders F W. The met office global 3-dimensional variational data assimilation scheme[J]. *Quart J Roy Meteor Soc*, 2000, **126**(570):2991-3012.
- [6] Barker D M, Huang W, Guo Y R, Bourgeois A J, Xiao Q N. A three-dimensional(3DVAR) data assimilation system for use with MM5: implementation and initial results[J]. *Mon Wea Rev*, 2004, **132**(4):897-914.
- [7] Bourke W. An efficient one-level primitive equation spectral model[J]. *Mon Wea Rev*, 1972, **100**(9):683-689.
- [8] Bijlsma S J, Hafkensheid L M, Lynch P. Computation of the streamfunction and velocity potential and reconstruction of the wind field[J]. *Mon Wea Rev*, 1986, **114**(8):1547-1551.
- [9] Tangri A C. Computation of streamlines associated with a low latitude cyclone[J]. *Indian J Meteor Geophys*, 1966, **17**:401-406.
- [10] Phillips N A. Geostrophic errors in predicting the Appalachian storm of November 1950[J]. *Geophysica*, 1958, **6**:389-405.
- [11] Brown J A, Neilon J R. Case studies of numerical wind analysis[J]. *Mon Wea Rev*, 1961, **89**(3): 83-90.
- [12] Sangster W E. A method of representing the horizontal pressure force without reduction of pressures to sea level[J]. *J Meteor*, 1960, **17**(2):166-176.
- [13] Sangster W E. An improved technique for computing the horizontal pressure-gradient force at

- the earth's surface[J]. *Mon Wea Rev*, 1987, **115**(7): 1358-1368.
- [14] Shukh J, Saha K R. Computation of non-divergent streamfunction and irrotational velocity potential from the observed winds[J]. *Mon Wea Rev*, 1974, **102**(6):419-425.
- [15] Lynch P. Deducing the wind from vorticity and divergence[J]. *Mon Wea Rev*, 1988, **116**(1): 86-93.
- [16] Lynch P. Partitioning the wind in a limited domain[J]. *Mon Wea Rev*, 1989, **117**(7):1492-1500.
- [17] Chen Q S, Kuo Y H. A harmonic-sine series expansion and its application to partitioning and reconstruction problems in a limited area[J]. *Mon Wea Rev*, 1992, **120**(1): 91-112.
- [18] Chen Q S, Kuo Y H. A consistency condition for wind-field reconstruction in a limited area and harmonic-cosine series expansion[J]. *Mon Wea Rev*, 1992, **120**(11):2653-2670.
- [19] 朱宗申, 朱国富. 有限区域风速场求解流函数和速度势场的有效方案[J]. 应用气象学报, 2008 **19**(1):10-18. (ZHU Zong-shen, ZHU Guo-fu. An effective method to solve the streamfunction and velocity potential from a wind field in a limited area[J]. *Quart J Appl Meteor Sci*, 2008, **19**(1):10-18. (in Chinese))
- [20] 朱宗申, 朱国富, 张林. 用有限区域风速场准确求解流函数和速度势场的方法[J]. 大气科学, 2009, **33**(4): 811-824. (ZHU Zong-shen, ZHU Guo-fu, ZHANG Lin. An accurate solution method of stream function and velocity potential from the wind field in a limited area[J]. *Chin J Atmos Sci*, 2009, **33**(4):811-824. (in Chinese))
- [21] 周玉淑, 曹洁, 高守亭. 有限区域风场分解方法及其在台风 SAOMEI 研究中的应用[J]. 物理学报, 2008, **57**(10):6654-6665. (ZHOU Yu-shu, CAO Jie, GAO Shou-ting. The method of decomposing wind field in a limited area and its application to typhoon SAOMEI[J]. *Acta Phys Sin*, 2008, **57**(10):6654-6665. (in Chinese))
- [22] 周玉淑, 曹洁. 有限区域风场的分解和重建[J]. 物理学报, 2010, **59**(4):2898-2906. (ZHOU Yu-shu, CAO Jie. Partitioning and reconstruction problem of the wind in a limited region[J]. *Acta Phys Sin*, 2010, **59**(4):2898-2906. (in Chinese))
- [23] Endlich R M. An iterative method for altering the kinematic properties of wind fields[J]. *Journal of the Applied Meteorology*, 1967, **6**(5):837-844.
- [24] Davies-Jones R. On the formulation of surface geostrophic stream function[J]. *Mon Wea Rev*, 1988, **116**(9):1824-1826.
- [25] Li Z J, Chao Y. Computation of the streamfunction and velocity potential for limited and irregular domains[J]. *Mon Wea Rev*, 2006, **134**(11):3384-3394.
- [26] 刘健文, 郭虎, 李耀东, 刘还珠, 吴宝俊. 天气分析预报物理量计算基础[M]. 北京:气象出版社, 2005:249-251. (LIU Jian-wen, GUO Hu, LI Yao-dong, LIU Huan-zhu, WU Bao-jun. *The Basis of Weather Analysis and Prediction Physical Quantity Calculation*[M]. Beijing: China Meteorologica Press, 2005:249-251. (in Chinese))
- [27] 张文生. 科学计算中的偏微分方程有限差分法[M]. 北京:高等教育出版社, 2006:172-172. (ZHANG Wen-sheng. *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations in Science Computation*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004:172-172. (in Chinese))
- [28] Arakawa A. Computational design for long-term numerical integrations of the equations of atmospheric motion; two dimensional incompressible flow; part I [J]. *J Comput Phys*, 1966, **1**(1): 119-143.
- [29] Watterson I G. Decomposition of global ocean currents using a simple iterative method[J]. *J Atmos Oceanic Technol*, 2001, **18**(4):691-703.

Iterative and Adjusting Method for Computing Stream Function and Velocity Potential in Limited Domains and Its Convergence Analysis

LI Ai-bing, ZHANG Li-feng, ZANG Zeng-liang, ZHANG Yun

(*Institute of Meteorology, PLA University of Science and Technology,
Nanjing 211101, P. R. China*)

Abstract: Stream function and velocity potential can be easily computed by solving Poisson equations in a unique way for the global domain. Because of various assumptions for handling boundary conditions, the solution is not unique when a limited domain is concerned. So, it is very important to reduce or eliminate the effects caused by uncertain boundary condition. An iterative and adjusting method based on the Endlich iteration method was presented to compute stream function and velocity potential for limited domains. This method did not need an explicitly specifying the boundary condition, while it could obtain the effective solution and was proved to be successful in decomposing and reconstructing the horizontal wind field with very small errors. The convergence of the method depended on relative value between the distances of grid in two different directions and was related to the value of the adjusting factor. Applying the method in Arakawa grids and irregular domains, the results showed that it could not only obtain accurate vorticity and divergence, but also accurately decompose and reconstruct the original wind field. Hence, the iterative and adjusting method was accurate and reliable.

Key words: limited domains; stream function and velocity potential; iteration and adjustment; convergence