

微极流体薄膜层通过以滑移速度移动的可渗透无限平板时流体特性变化和热辐射对流动和热传导的影响*

M·A·A·哈玛麦德, S·E·瓦希德

(本哈大学 理学院 数学系, 扎利亚 13518, 埃及)

摘要: 微极流体薄膜层通过按滑移速度移动的可渗透无限垂直平板时, 研究热辐射对混合对流薄膜层流动和热传导的影响. 假定流体粘度和热传导率变化是温度的一个函数. 对一些典型的可变参数值, 应用 Chebyshev 谱方法, 数值求解流动的控制方程. 将所得结果与已发表文献的结果进行比较, 结果是一致的. 绘出并讨论了可变参数对速度、微旋转速度、温度分布曲线、表面摩擦因数和 Nusselt 数的影响.

关键词: 微极流体; 薄膜层; 滑移速度; 可变流体特性; 热辐射; Chebyshev 谱方法

中图分类号: O357 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.05.010

符号说明

c_p	比定压热容	C_f	表面摩擦因数
F	单位质量体力	f_w	无量纲的吸入/喷出速度
g	重力加速度	g	无量纲微旋转
J	微惯性矩	k	回旋粘度系数
K	材料参数	k^*	平均吸收系数
l	单位质量体力偶	m_1	浮力参数
n	边界参数	N	垂直于 X-Y 平面的微旋转分量
Nu	Nusselt 数	p	压力
Pr	Prandtl 数	Q	内热生成密度
q_r	辐射热通量	q_w	从平板传出的热量
R	辐射参数	Re	Reynolds 数
T	流体温度	T_0	自由表面处的温度
T_w	平板的表面温度	U, V	沿着、垂直平板方向的速度分量

* 收稿日期: 2011-01-04; 修订日期: 2011-12-27

作者简介: Mostafa A. A. Mahmoud (E-mail: mostafabdelhameed@yahoo.com);

Shimaa E. Waheed (联系人, E-mail: shimaa_ezat@yahoo.com).

本文原文为英文, 黄锋译, 张禄坤校.

U_w	表面速度	u	沿平板方向无量纲的速度分量
U	平移向量	V_w	有量纲的吸入/喷出速度
X, Y	沿着、垂直平板方向的 有量纲距离		

希腊字母

$\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$	微极流体的材料常数	β_1, β_2	粘度系数、热传导系数
μ_0	温度 T_0 时的流体粘度	κ_0	温度 T_0 时的热传导系数
ϕ	耗散函数	δ	流体薄膜层的厚度
ν_0	温度 T_0 时的运动学粘度	α_w	有量纲的滑移系数
ρ_0	温度 T_0 时的流体密度	η	垂直于平板的无量纲距离
σ^*	Stefan Boltzmann 常数	κ_f	热传导率
μ	动力学粘度	ρ	流体密度
α	无量纲滑移参数	τ_w	壁面剪切应力
β	热膨胀系数	σ	微旋转向量
θ	无量纲温度		

引 言

流过一个可移动表面的生产工艺,在许多技术生产过程中有着广泛的应用前途,如连续喷射、金属挤压、纸的生产、玻璃纤维生产、塑料薄膜拉伸、热轧、金属和聚合物的挤出。Sakiadis^[1] 对一个稳定可移动连续半无限平面,通过另一个静止的流体环境时的边界层理论,进行了开创性的研究工作。Tosu 等^[2] 对通过连续平直表面的流动,进行了实验和理论研究,对一些特定的 Prandtl 数确定其热传导率。Erickson 等^[3] 就边界层经过一个可移动连续平面时,研究了吸入或喷出对流动和热传导的影响。一些学者从不同的角度,拓展了 Sakiadis 问题的研究^[4-10]。

由于流体薄膜层流动分析可能的技术应用,吸引了众多研究者的注意。可以举出如下的例子:电子设备的冷却装置^[11]、蒸发^[12]、吸收^[13]、纳米颗粒的自行集结^[14]和喷墨打印^[15]。许多学者在这个方面做出了贡献,详见文献[16-25]。

近年来,微极流体的研究引起了极大的关注,因为它们在和工业应用中有着重要作用,如聚合物挤出、液晶体的凝固、喷淋时金属板的冷却,以及悬浮的溶液等。Eringen^[26-27] 发展了微极流体理论,可以应用于带一些添加剂的流体:聚合物流体、胶状流体、悬浮的溶液、液晶体、血液等,为这些流体的流动现象提供了数学模型。在 Ariman 等^[28-29] 发表的评论文章中,以及,最近在 Lukaszewicz^[30] 和 Eringen^[31] 发表的论著中,可以看到关于该理论及其应用的优秀综述。乔德哈瑞等^[32] 就微极流体通过嵌入多孔介质中的半无限垂直平板问题,研究了滑移速度和化学反应对非稳定 MHD 流动及其传热传质的影响。Hayat 等^[33] 就 3 个外在流动问题,给出了微极流体薄膜层流动的精确解。

上述研究都是在流体特性不变下讨论,事实上,物理特性随着温度发生剧烈地变化。因此,有必要将粘度和热传导率取为变化的。Dandapat 等^[34] 研究过流体特性随温度变化所产生的影响,同样的流动问题还出现在早期的文献中^[18]。Nadeem 等^[35] 在水平多孔伸展平面薄膜层中,研究了可变粘度对流动和热传导的影响。Makinde^[36] 在一个倾斜的加热平板上,认为流体薄膜层上表面自由且温度相同,可变粘度流体分层减少时,研究了流体薄膜层的稳态解。Mahmoud

等^[37]在横向磁场作用下,流体薄膜层通过一个非稳定伸展平面时,研究可变的粘度和可变的
热传导率,对导电非 Newton 幂律流体流动和热传导的影响。

上述研究都没有关注探索滑移所产生的影响.滑移影响对非 Newton 流体十分重要,聚合
体融化体显示出了壁面的滑移.在技术应用中流体展现的滑移现象很重要,如人造心瓣膜的抛
光,以及种种制造业零件内部的空洞,都是在流体中混入研磨剂而完成的.文献[38-41]给出了
关于滑移条件的详细综述。

本文的主要目的是,当粘度可变和热传导率可变,微极流体薄膜层通过可移动可渗透平面
时,研究滑移速度和热辐射对微极流体流动和热传导的影响。

1 问题的公式化

不可压缩微极流体作稳定运动时,其向量形式的控制方程分成^[26-27]:
质量守恒方程

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \tag{1}$$

线性动量守恒方程

$$\rho(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + (\mu + k) \nabla^2 \mathbf{U} + k \nabla \times \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F}, \tag{2}$$

角动量守恒方程

$$\begin{aligned} \rho J(\mathbf{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{\sigma} &= (\alpha^* + \beta^* + \gamma^*) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \\ &\gamma \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\sigma}) + k \nabla \times \mathbf{U} - 2k \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{l}, \end{aligned} \tag{3}$$

能量方程

$$\rho c_p(\mathbf{U} \cdot \nabla) T = \kappa_f \nabla^2 T - \nabla q_r + \phi + Q, \tag{4}$$

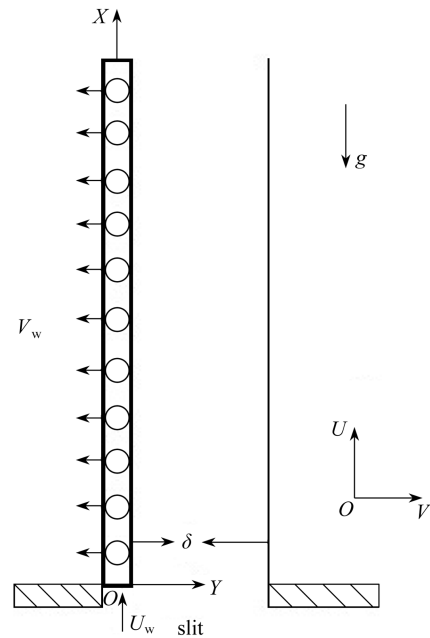


图 1 物理模型及其坐标系

Fig.1 Physical model and coordinate system

其中, \mathbf{F} 为单位质量体力, \mathbf{l} 为单位质量体力偶, \mathbf{U} 为平
移向量, $\boldsymbol{\sigma}$ 为微旋转向量, p 为压力, α^* , β^* , γ^* 和 k 为
微极流体的材料参数, ρ 为流体密度, J 为微惯性矩, μ 为
动粘度系数, κ_f 为热传导率, T 为流体温度, ϕ 为耗散函
数, Q 为内热生成密度, 通常由 Joule 加热, 化学或原子
反应而产生, q_r 为辐射热通量, c_p 为比定压热容。

考虑一有缝隙并以恒定速度 U_w 移动的平板, 其物
理模型和坐标系如图 1 所示, 原点固定在缝隙上, 取 X -
轴垂直于平板, Y -轴垂直于 X -轴. 流体的自由表面温度
为 T_0 , 而平板的表面温度保持为 T_w , 且 $T_w > T_0$. 物体表
面和周围微极流体之间的温度差, 产生的浮力导致向上
的对流流动. 假定流体的粘度和热传导率是一个随温度
而变化的函数, 同时流体的薄膜层厚度 δ 为常数。

体力偶、微惯性矩、粘性耗散和生成热可以忽略不
计. 在上述假定下应用边界层理论和 Boussinesq 近似,
微极流体在压力梯度作用下, 流过一块多孔的无限平
板, 平板以匀速度 U_w 沿垂直于平板方向移动时, 流体薄
膜层混合对流流动的基本方程为二维的边界层质量、动
量、角动量和能量控制方程:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (5)$$

$$\rho_0 \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \frac{\partial}{\partial Y} \left((\mu + k) \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right) + k \frac{\partial N}{\partial Y} + \rho_0 g \beta (T - T_0), \quad (6)$$

$$\rho_0 J \left(U \frac{\partial N}{\partial X} + V \frac{\partial N}{\partial Y} \right) = J \frac{\partial}{\partial Y} \left((\mu + k/2) \left(\frac{\partial N}{\partial Y} \right) \right) - k \left(2N + \frac{\partial U}{\partial Y} \right), \quad (7)$$

$$\rho_0 c_p \left(U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} \right) = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\kappa_r \frac{\partial T}{\partial Y} \right) - \frac{\partial q_r}{\partial Y}, \quad (8)$$

其中, X 和 Y 为有量纲的 Cartesian 坐标, U 和 V 分别为沿 X 和 Y 方向的有量纲速度分量, N 为垂直于 X - Y 平面的有量纲微旋转分量, k 为回转粘度系数, ρ_0 为温度 T_0 时的流体密度, g 为向下的重力加速度, β 为热膨胀系数. 由于认为平板无限大, 所有对 X 的导数不出现^[42-43], 则方程 (5) ~ (8) 变为

$$\frac{dV}{dY} = 0, \quad (9)$$

$$\rho_0 V \frac{dU}{dY} = \frac{d}{dY} \left((\mu + k) \frac{dU}{dY} \right) + k \frac{dN}{dY} + \rho_0 g \beta (T - T_0), \quad (10)$$

$$\rho_0 J V \frac{dN}{dY} = J \frac{d}{dY} \left((\mu + k/2) \frac{dN}{dY} \right) - k \left(2N + \frac{dU}{dY} \right), \quad (11)$$

$$\rho_0 c_p V \frac{dT}{dY} = \frac{d}{dY} \left(\kappa_r \frac{dT}{dY} \right) - \frac{dq_r}{dY}, \quad (12)$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} Y = 0: U = U_w + \alpha_w \left((\mu + k) \frac{dU}{dY} + kN \right), V = V_w, N = -n \frac{dU}{dY}, T = T_w, \\ Y = \delta: \frac{dU}{dY} = 0, N = 0, T = T_0, \end{cases} \quad (13)$$

其中, α_w 为有量纲的滑移参数, n ($0 \leq n \leq 1$) 为边界参数. 当边界参数 $n = 0$ 时, 得到 $N = 0$, 它对应于无滑移条件, 即在一个靠近壁面的浓微粒流动中, 微单元是无法旋转的 (如文献 [44] 中的论述). 当 $n = 1/2$ 时, 表示有弱浓度微单元流动. 而 $n = 1$ 对应于湍流边界层流动模型 (见文献 [45]).

积分方程 (9) 并利用边界条件 (13), 得到

$$V = \text{constant} = V_w, \quad (14)$$

其中, V_w 为表面处有量纲的法向速度, $V_w > 0$ 时为喷出, $V_w < 0$ 时为吸入.

应用 Rosseland 近似, 有

$$q_r = \left(- \frac{4\sigma^*}{3k^*} \right) \frac{dT^4}{dY}, \quad (15)$$

其中, σ^* 为 Stefan Boltzmann 常数, k^* 为平均吸收系数. 假定流动中的温度差足够小, 使得 T^4 可以表示为温度的线性函数^[46]:

$$T^4 \approx 4T_0^3 T - 3T_0^4, \quad (16)$$

这里忽略了展开式中更高阶的项.

引入下列无量纲变量:

$$\eta = \frac{Y}{\delta}, g = \frac{\delta N}{U_w}, u = \frac{U}{U_w}, \theta(\eta) = \frac{T - T_0}{T_w - T_0}. \quad (17)$$

粘度和热传导率随着无量纲温度的变化可以写成^[34,37]

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta_1 \theta}, \tag{18}$$

$$\kappa_f = \kappa_0 (1 + \beta_2 \theta), \tag{19}$$

其中, β_1 和 β_2 分别为粘度参数和热传导率参数, 它们随着流体性质而变化. μ_0 为温度 T_0 时的流体粘度系数, κ_0 为温度 T_0 时的热传导率.

将方程(14) ~ (19)代入方程(9) ~ (13), 得到

$$(e^{-\beta_1 \theta} + K) \frac{d^2 u}{d\eta^2} - \left(f_w + \beta_1 e^{-\beta_1 \theta} \frac{d\theta}{d\eta} \right) \frac{du}{d\eta} + K \frac{dg}{d\eta} + m_1 \theta = 0, \tag{20}$$

$$(e^{-\beta_1 \theta} + K/2) \frac{d^2 g}{d\eta^2} - \left(f_w + \beta_1 e^{-\beta_1 \theta} \frac{d\theta}{d\eta} \right) \frac{dg}{d\eta} - K \left(2g + \frac{du}{d\eta} \right) = 0, \tag{21}$$

$$\left((1 + \beta_2 \theta) + \frac{1}{R} \right) \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + \beta_2 \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)^2 - Pr f_w \frac{d\theta}{d\eta} = 0, \tag{22}$$

相应的满足边界条件为

$$\begin{cases} \eta = 0: u = 1 + \alpha(e^{-\beta_1} + K(1 - n)) \left(\frac{du}{d\eta} \right), \\ g = -n \left(\frac{du}{d\eta} \right), \theta = 1, \\ \eta = 1: \frac{du}{d\eta} = 0, g = 0, \theta = 0, \end{cases} \tag{23}$$

其中, $K = k/\mu_0$ 为材料参数, $m_1 = g\beta\delta^2(T_w - T_0)/(\nu_0 U_w)$ 为浮力参数, $\alpha = \alpha_w \mu_0/\delta$ 为滑移参数, $Pr = \mu_0 c_p/\kappa_0$ 为 Prandtl 数, $R = 3k^* \kappa_0/(16\sigma^* T_0^3)$ 为辐射参数, $f_w = V_w \delta/\nu_0$ 表示吸入(或喷出)的参数.

感兴趣的物理量还有表面摩擦因数 C_f 和 Nusselt 数 Nu , 它们分别被定义为

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho_0 U_w^2}, Nu = \frac{\delta q_w}{\kappa_f (T_w - T_0)}, \tag{24}$$

其中, 壁面剪切应力 τ_w 和从平板传出的热量 q_w 分别定义为

$$\tau_w = \left[(\mu + k) \frac{dU}{dY} + kN \right]_{Y=0}, q_w = - \left[\kappa_f \frac{dT}{dY} \right]_{Y=0}. \tag{25}$$

利用方程(17) ~ (19), 得到

$$\frac{1}{2} C_f Re = (e^{-\beta_1} + K(1 - n)) \left(\frac{du}{d\eta} \right)_{\eta=0}, Nu = - \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta=0}, \tag{26}$$

其中, $Re = \delta U_w/\nu_0$ 为 Reynolds 数.

2 求解方法

控制边界层方程(20) ~ (23)的求解区域为有界区间 $[0, 1]$. 应用下面的代数映射, 求解区域被映射为计算区域 $[-1, 1]$:

$$\chi = 2\eta - 1.$$

方程(20) ~ (23)转换为下面的 Chebyshev 谱方程:

对于所有的 $i = 0(1)L$, 有

$$\left(e^{-\beta_1 (\sum_{j=0}^L l_{ij}^p \xi_j + d_i^q)} + K \right) \phi_i -$$

$$\left(\frac{f_w}{2} + \beta_1 e^{-\beta_1(\sum_{j=0}^L l_{ij}^{\theta} \zeta_j + d_i^{\theta})} \left(\sum_{j=0}^L l_{ij}^{\theta 1} \zeta_j + d_i^{\theta 1}\right)\right) \left(\sum_{j=0}^L l_{ij}^{u 1} \phi_j + d_i^{u 1}\right) + \frac{K}{2} \left(\sum_{j=0}^L l_{ij}^{\psi} \psi_j + \sum_{j=0}^L l_{ij}^{\phi} \phi_j + d_i^{\psi}\right) + \frac{m_1}{4} \left(\sum_{j=0}^L l_{ij}^{\zeta} \zeta_j + d_i^{\zeta}\right) = 0, \tag{27}$$

$$\left(e^{-\beta_1(\sum_{j=0}^L l_{ij}^{\theta} \zeta_j + d_i^{\theta})} + \frac{K}{2}\right) \psi_i - \left(\frac{f_w}{2} + \beta_1 e^{-\beta_1(\sum_{j=0}^L l_{ij}^{\theta} \zeta_j + d_i^{\theta})} \left(\sum_{j=0}^L l_{ij}^{\theta 1} \zeta_j + d_i^{\theta 1}\right)\right) \left(\sum_{j=0}^L l_{ij}^{\psi} \psi_j + \sum_{j=0}^L l_{ij}^{\phi} \phi_j + d_i^{\psi}\right) - \frac{K}{2} \left(\left(\sum_{j=0}^L l_{ij}^{\psi} \psi_j + \sum_{j=0}^L l_{ij}^{\phi} \phi_j + d_i^{\psi}\right) + \left(\sum_{j=0}^L l_{ij}^{u 1} \phi_j + d_i^{u 1}\right)\right) = 0, \tag{28}$$

$$\left((1 + \beta_2 \theta) + \frac{1}{R}\right) \zeta_i + \beta_2 \left(\sum_{j=0}^L l_{ij}^{\theta 1} \zeta_j + d_i^{\theta 1}\right)^2 - \frac{Pr f_w}{2} \left(\sum_{j=0}^L l_{ij}^{\theta 1} \zeta_j + d_i^{\theta 1}\right) = 0, \tag{29}$$

其中

$$l_{ij}^{\theta} = b_{ij}^2 - \frac{\chi_i + 1}{2} b_{Lj}^2, \quad d_i^{\theta} = 1 - \frac{\chi_i + 1}{2}, \quad l_{ij}^{\theta 1} = b_{ij} - \frac{1}{2} b_{Lj}^2, \quad d_i^{\theta 1} = -\frac{1}{2},$$

$$l_{ij}^{\psi} = n(1 - \chi_i) b_{Lj}, \quad d_i^{\psi} = 0, \quad l_{ij}^{\phi} = -n b_{Lj}, \quad d_i^{\phi} = 0,$$

$$l_{ij}^u = b_{ij}^2 - [(\chi_i + 1) + 2\alpha(e^{-\beta_1} + K(1 - n))] b_{Lj}, \quad d_i^u = 1,$$

$$l_{ij}^{u 1} = b_{ij} - b_{Lj}, \quad d_i^{u 1} = 0,$$

这里

$$b_{ij}^2 = (\chi_i - \chi_j) b_{ij}, \quad i = 0(1)L,$$

b_{ij} 为矩阵 \mathbf{B} 的元素,在文献[47]中给出.然后利用 Newton 迭代法求解该方程组.

3 结果及讨论

为了验证本文数值解的精度,就 K 和 n 取不同数值时,将本文数值解和文献[33]的精确解 $(du/d\eta)_{\eta=0}$ 和 $(dg/d\eta)_{\eta=0}$ 列表比较.表 1 表明,本文的数值解和文献[33]的精确解是吻合的.

表 1 当 K 和 n 取不同数值时,本文的数值解和文献[33]的精确解的比较
Table 1 Comparison between our numerical results and the exact results given by reference [33] for various values of K and n

K	n	$(du/d\eta)_{\eta=0}$		$(dg/d\eta)_{\eta=0}$	
		reference[33]	present work	reference[33]	present work
1	0.0	0.500 00	0.500 00	-0.104 35	-0.104 35
2	0.0	0.333 33	0.333 33	-0.102 34	-0.102 34
3	0.0	0.250 00	0.250 00	-0.091 24	-0.091 24
4	0.0	0.200 00	0.200 00	-0.080 65	-0.080 65
1	0.5	0.666 67	0.666 67	0.333 33	0.333 33
2	0.5	0.500 00	0.500 00	0.250 00	0.250 00
3	0.5	0.400 00	0.400 00	0.200 00	0.200 00
4	0.5	0.333 33	0.333 33	0.166 67	0.166 67

为了便于讨论,当滑移参数 α , 可变的粘度参数 β_1 , 材料参数 K , 吸入(喷出) 参数 f_w , 可变的导热率参数 β_2 , 浮力参数 m_1 和辐射参数 R 取不同数值时,绘出速度 $u(\eta)$, 微旋转 $-g(\eta)$

和温度 $\theta(\eta)$ 的分布曲线. 物理上, $m_1 < 0$ 相当于外部对平板加热, 混合对流流动使平板温度上升; $m_1 > 0$ 相当于外部对平板冷却; 当 $m_1 = 0$ 时, 相当于没有混合对流的流动. 现在考虑混合对流冷却的情形, 仅选取正值的 m_1 .

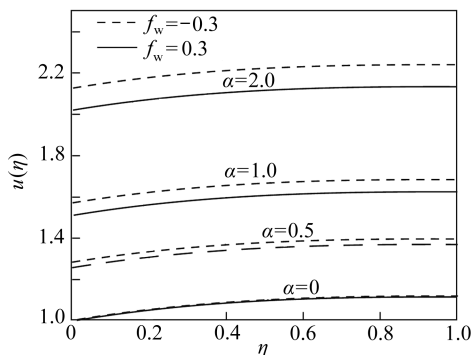


图2 速度分布曲线随 α 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.1$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $K = 1.5$, $m_1 = 1$)

Fig. 2 Velocity profiles for various value of α with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.1$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $K = 1.5$ and $m_1 = 1$

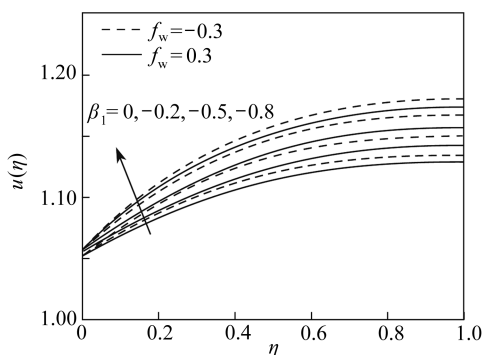


图3 速度分布曲线随 β_1 的变化 ($n = 0.5$, $\alpha = 0.1$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $K = 1.5$, $m_1 = 1$)

Fig. 3 Velocity profiles for various value of β_1 with $n = 0.5$, $\alpha = 0.1$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $K = 1.5$ and $m_1 = 1$

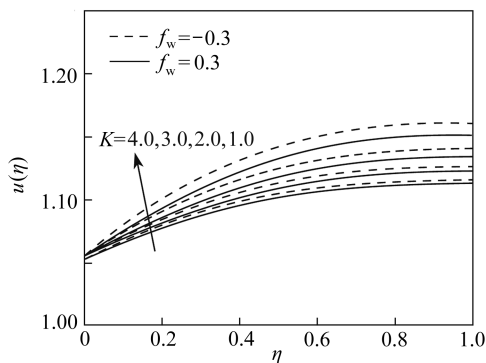


图4 速度分布曲线随 K 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$, $m_1 = 1$)

Fig. 4 Velocity profiles for various value of K with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$ and $m_1 = 1$

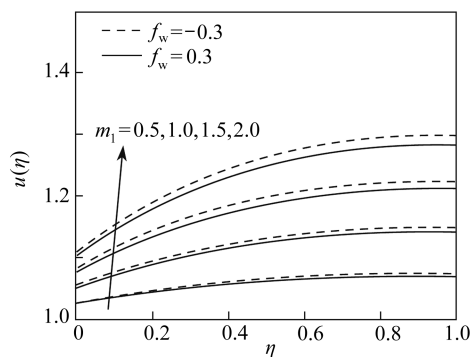


图5 速度分布曲线随 m_1 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$, $K = 1.5$)

Fig. 5 Velocity profiles for various value of m_1 with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$ and $K = 1.5$

图2给出了滑移参数 α 对速度 $u(\eta)$ 的影响. 图2显示, 对于流体吸入和喷出两种情形, 流体速度都随着滑移参数 α 的增大而增大. 图3显示了粘度参数 β_1 对速度分布曲线的影响. 对于流体吸入和喷出两种情形, 流体速度都随着粘度参数 β_1 的增大(粘度减小)而减少. 图4显示了流体速度分布曲线随着材料参数 K 的变化. 从图4中可以清楚地看到, 对于一个给定的 f_w (吸入或喷出), 流体速度随着 K 的增大而减小. 材料参数的增大, 导致流动的总粘度增大, 因此流动减缓. 图5中展示了速度分布随浮力参数 m_1 的变化. 可以发现, 对于 $f_w < 0$ (喷出) 和 $f_w < 0$ (吸入) 两种情况, 流体速度随浮力参数 m_1 的增大而增大. 吸入(喷出) 参数 f_w 对速度曲线

的影响如图6所示.从图6可以看到,随着从吸入($f_w = -0.8$)增大到喷出($f_w = 0.8$),平板处的蒸发率在而增大.图7描绘了热传导率参数 β_2 对流体速度分布曲线的影响.曲线 $\beta_2 = 0$ 表示流体热传导率参数为常数.对于喷出和吸入两种情形,随着 β_2 的增大,各自流体薄膜层中的速度亦增大.对一个给定的 f_w (吸入或喷出),图8显示了辐射参数 R 对无量纲速度的影响.辐射参数 R 的增大,会导致速度的减小.热辐射的增大,流体内热量更多,与引起边界层流动的浮力相互作用后,促使那里的流体速度减小.

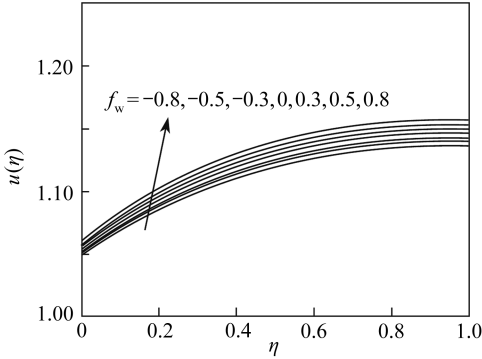


图6 速度分布曲线随 f_w 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$, $m_1 = 1$, $K = 1.5$)

Fig. 6 Velocity profiles for various value of f_w with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$, $m_1 = 1$ and $K = 1.5$

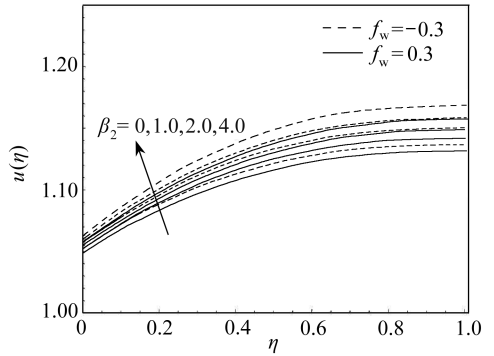


图7 速度分布曲线随 β_2 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$, $m_1 = 1$, $K = 1.5$)

Fig. 7 Velocity profiles for various value of β_2 with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$, $m_1 = 1$ and $K = 1.5$

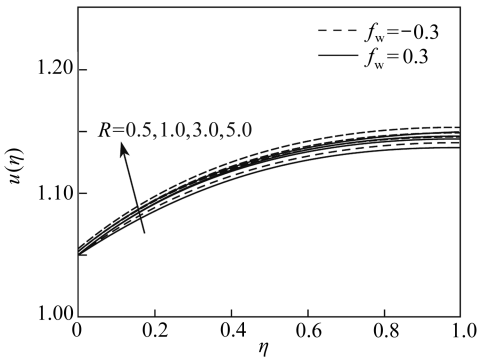


图8 速度分布曲线随 R 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $\alpha = 0.1$, $m_1 = 1$, $K = 1.5$)

Fig. 8 Velocity profiles for various value of R with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $\alpha = 0.1$, $m_1 = 1$ and $K = 1.5$

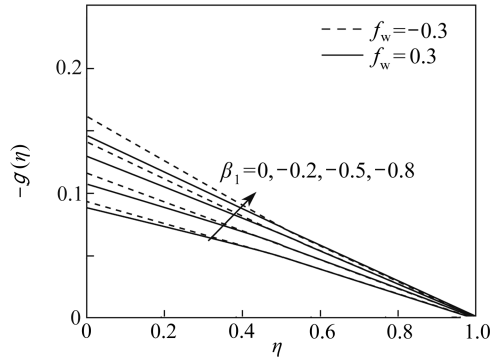


图9 微旋转分布曲线随 β_1 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $\alpha = 0.1$, $R = 1.3$, $m_1 = 1$, $K = 1.5$)

Fig. 9 Microrotation profiles for various value of β_1 with $n = 0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $\alpha = 0.1$, $R = 1.3$, $m_1 = 1$ and $K = 1.5$

图9显示了粘度参数 β_1 对微旋转分布曲线 $-g(\eta)$ 的影响.注意到对于喷出和吸入两种情形,粘度参数的增大,都会导致微旋转的减小.图10中描绘了材料参数 K 对微旋转分布曲线 $-g(\eta)$ 的影响.可以发现,对于喷出和吸入两种情形,微旋转都随着材料参数 K 的增大而减小.对一个给定的 f_w (吸入或喷出),微旋转随不同数值浮力参数 m_1 的变化如图11所示.从

图中可以发现,微旋转分布曲线随着 m_1 的增大而增大.图 12 中描绘出不同数值 f_w 时的微旋转分布曲线.可以发现, f_w 从吸入($f_w = -0.8$) 增大到喷出($f_w = 0.8$),微旋转在减小.图 13 描绘出微旋转随着热传导率 β_2 的变化.可以发现,对于喷出和吸入两种情形,微旋转都随着热传导率 β_2 的增大而增大.图 14 描述了辐射参数 R 对微旋转的影响.从图 14 可以发现,对于喷出和吸入两种情形,微旋转都随着辐射参数 R 的增大而增大.

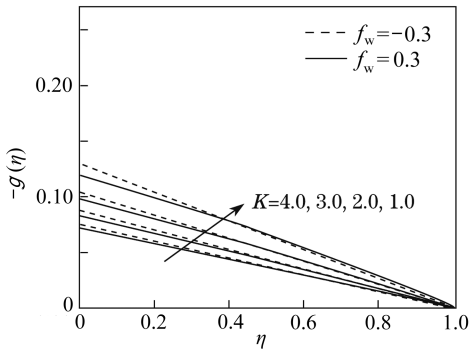


图 10 微旋转分布曲线随 K 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$, $m_1 = 1$)

Fig. 10 Microrotation profiles for various value of K with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$ and $m_1 = 1$

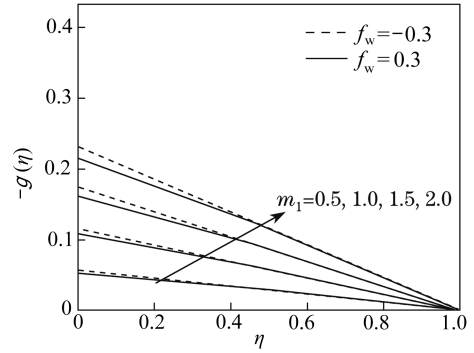


图 11 微旋转分布曲线随 m_1 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$, $K = 1.5$)

Fig. 11 Microrotation profiles for various value of m_1 with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$ and $K = 1.5$

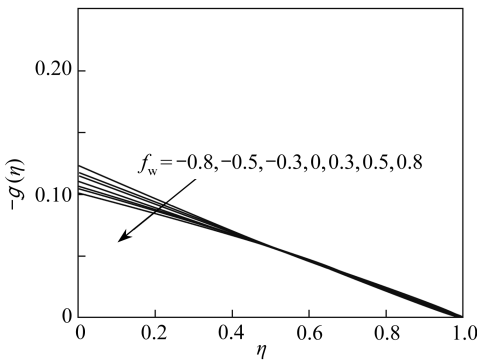


图 12 微旋转分布曲线随 f_w 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$, $m_1 = 1$, $K = 1.5$)

Fig. 12 Microrotation profiles for various value of f_w with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$, $m_1 = 1$ and $K = 1.5$

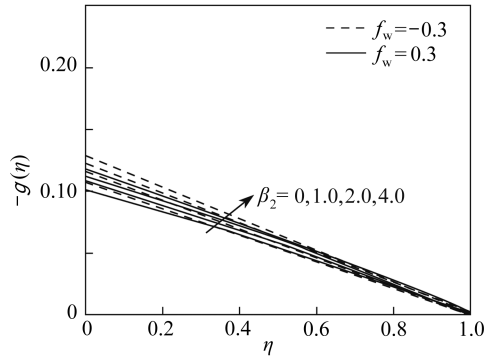


图 13 微旋转分布曲线随 β_2 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $Pr = 0.72$, $m_1 = 1$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$, $K = 1.5$)

Fig. 13 Microrotation profiles for various value of β_2 with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $Pr = 0.72$, $m_1 = 1$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$ and $K = 1.5$

温度分布曲线 $\theta(\eta)$ 随 f_w 值的变化如图 15 所示.可以发现,随着 f_w 从吸入增大到喷出,热边界层中温度水平均更高.图 6,12,15 清楚地表明,壁面蒸发(喷出或吸入)为我们控制流动和热传导特性提供了一个有效途径.图 16 描绘出热传导率 β_2 对无量纲温度的影响.可以发现,对于喷出和吸入两种情形,温度分布曲线都随着热传导率 β_2 的增大而增大.图 17 对一个给定的 f_w (吸入或喷出),描绘出温度分布曲线随着辐射参数 R 的变化.可以发现,温度分布曲线都

随着 R 的增大而增大. 这是因为如下事实, 辐射导致微极流体温度的增大, 同时, 无辐射时定义小的温度.

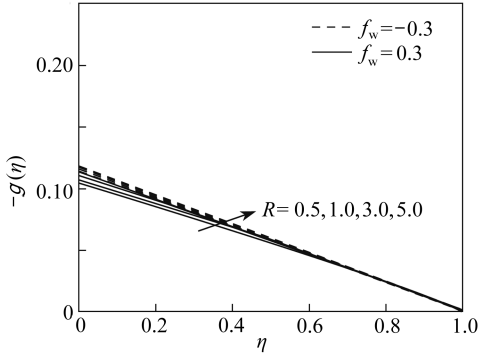


图 14 微旋转分布曲线随 R 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $m_1 = 1$, $\alpha = 0.1$, $K = 1.5$)

Fig. 14 Microrotation profiles for various value of R with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $m_1 = 1$, $\alpha = 0.1$ and $K = 1.5$

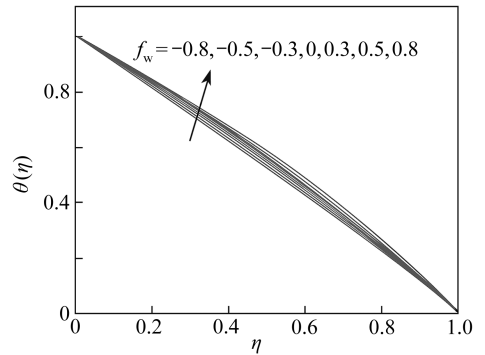


图 15 温度分布曲线随 f_w 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $m_1 = 1$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$, $K = 1.5$)

Fig. 15 Temperature profiles for various value of f_w with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $m_1 = 1$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$ and $K = 1.5$

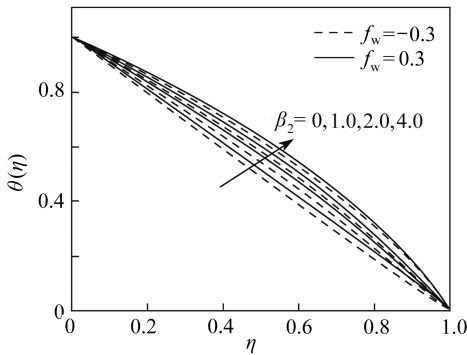


图 16 温度分布曲线随 β_2 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $Pr = 0.72$, $m_1 = 1$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$, $K = 1.5$)

Fig. 16 Temperature profiles for various value of β_2 with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $Pr = 0.72$, $m_1 = 1$, $R = 1.3$, $\alpha = 0.1$ and $K = 1.5$

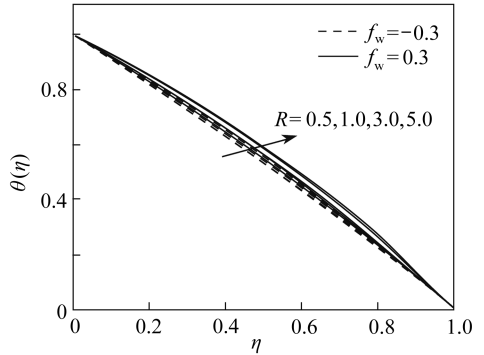


图 17 温度分布曲线随 R 的变化 ($n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $m_1 = 1$, $\alpha = 0.1$, $K = 1.5$)

Fig. 17 Temperature profiles for various value of R with $n = 0.5$, $\beta_1 = -0.5$, $\beta_2 = 1$, $Pr = 0.72$, $m_1 = 1$, $\alpha = 0.1$ and $K = 1.5$

图 18 至图 21 给出了 β_1 , m_1 , K , R , β_2 , f_w 和 α 对表面摩擦因数的影响. 当其他参数固定时, 图 18 给出了表面摩擦因数随着 m_1 和 β_1 的变化. 可以发现, 对于喷出和吸入两种情形, 对于一个固定的 m_1 , 表面摩擦因数都随着 β_1 的增大而增大. 还可以发现, 对于吸入 ($f_w > 0$) 和喷出 ($f_w < 0$) 两种情形, 当 β_1 值固定时, 表面摩擦因数随着 m_1 的增大而增大. 当其他参数固定, m_1 取不同数值时, 图 19 显示表面摩擦因数随着 K 的变化情况. 可以发现, 对于一个给定的 f_w (吸入或喷出), 当 m_1 固定一个数值时, 表面摩擦因数随着 K 的增大而减小.

当其他参数固定时, 图 20 显示出表面摩擦因数随着 β_2 和 R 的变化. 可以发现, 当 R 固定一个数值时, 对于 $f_w > 0$ 和 $f_w < 0$ 两种情况, 表面摩擦因数随着 β_2 的增大而增大. 还可以发现,

β_2 固定一个数值时,对于流体喷出和吸入两种情形,表面摩擦因数也随着 R 的增大而增大. 其他参数固定时, f_w 和 α 对表面摩擦因数的影响如图 21 所示. 可以发现,当 α 固定一个数值时,随着 f_w 从吸入($f_w = -0.5$) 增加到喷出($f_w = 0.5$),表面摩擦因数亦随之增大. 对一个给定的 f_w (吸入或喷出),同时其他参数固定时,图 22 描绘出 β_2 和 R 对 Nusselt 数的影响. 从图 22 可以发现,当 R 固定一个数值时,Nusselt 数随着 β_2 的增大而减小. 还可以发现,当 β_2 固定时,Nusselt 数也随着 R 的增大而减小. 吸入(喷出)参数 f_w 和 α 对 Nusselt 数的影响如图 23 所示. 从图 23 可以发现,对一个固定的 α 值,平板的蒸发率从吸入($f_w = -0.5$) 增加到喷出($f_w = 0.5$) 时, Nusselt 数也随之增大. 从图 21 和图 23 可以发现,对固定值 f_w ,滑移参数 α 对表面摩擦因数和 Nusselt 数没有影响.

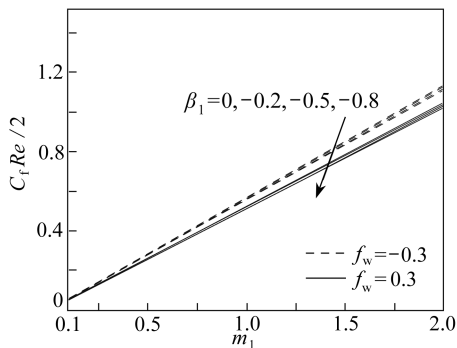


图 18 表面摩擦因数作为 m_1 的函数,随 β_1 的变化 ($n = 0.5, Pr = 0.72, R = 1.3, \beta_2 = 1, \alpha = 0.1, K = 1.5$)

Fig. 18 Skin friction coefficient as a function of m_1 for various value of β_1 when $n = 0.5, Pr = 0.72, R = 1.3, \beta_2 = 1, \alpha = 0.1, K = 1.5$

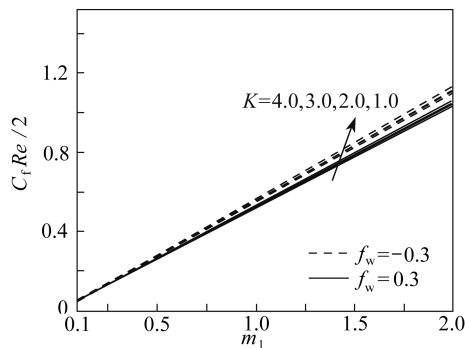


图 19 表面摩擦因数作为 m_1 的函数,随 K 的变化 ($n = 0.5, R = 1.3, \beta_1 = -0.5, \beta_2 = 1, Pr = 0.72, \alpha = 0.1$)

Fig. 19 Skin friction coefficient as a function of m_1 for various value of K when $n = 0.5, R = 1.3, \beta_1 = -0.5, \beta_2 = 1, Pr = 0.72, \alpha = 0.1$

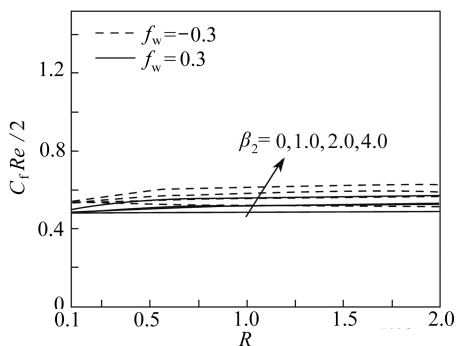


图 20 表面摩擦因数作为 R 的函数,随 β_2 的变化 ($n = 0.5, m_1 = 1, Pr = 0.72, \beta_1 = -0.5, \alpha = 0.1, K = 1.5$)

Fig. 20 Skin friction coefficient as a function of R for various value of β_2 when $n = 0.5, m_1 = 1, Pr = 0.72, \beta_1 = -0.5, \alpha = 0.1$ and $K = 1.5$

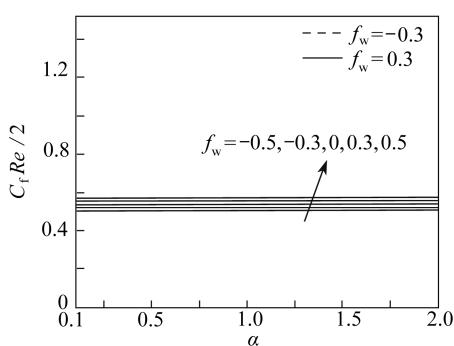


图 21 表面摩擦因数作为 α 的函数,随 f_w 的变化 ($n = 0.5, m_1 = 1, K = 1.5, R = 1.3, \beta_1 = -0.5, \beta_2 = 1, Pr = 0.72$)

Fig. 21 Skin friction coefficient as a function of f_w for various value of α when $n = 0.5, m_1 = 1, K = 1.5, R = 1.3, \beta_1 = -0.5, \beta_2 = 1$ and $Pr = 0.72$

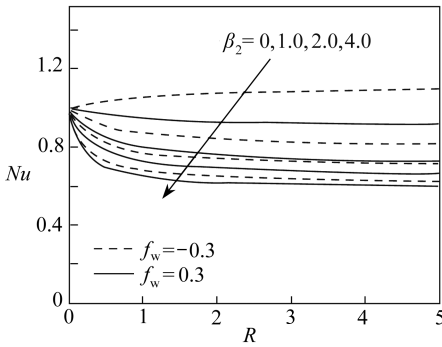


图22 Nusselt 数作为 R 的函数,随 β_2 的变化
($n = 0.5, m_1 = 1, Pr = 0.72,$
 $\beta_1 = -0.5, \alpha = 0.1, K = 1.5$)

Fig. 22 Nusselt number as a function of R for various value of β_2 when $n = 0.5, m_1 = 1, Pr = 0.72,$
 $\beta_1 = -0.5, \alpha = 0.1, K = 1.5$

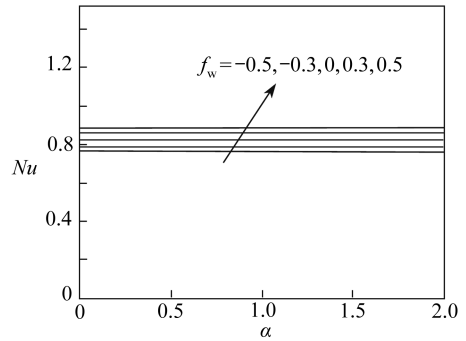


图23 Nusselt 数作为 α 的函数,随 f_w 的变化
($n = 0.5, m_1 = 1, K = 1.5, R = 1.3,$
 $\beta_1 = -0.5, \beta_2 = 1, Pr = 0.72$)

Fig. 23 Nusselt number as a function of f_w for various value of α when $n = 0.5, m_1 = 1, K = 1.5,$
 $R = 1.3, \beta_1 = -0.5, \beta_2 = 1, Pr = 0.72$

4 结 论

微极流体流过可移动、可渗透无限平板,计及辐射影响和滑移速度,以及流体特性参数的变化,从理论上研究了混合对流薄膜层流动及其热传导问题.应用 Chebyshev 谱方法,数值地求解了该问题的常微分控制方程.数值分析了不同参数,如粘度参数、材料参数、浮力参数、吸入(喷出)参数、热传导率参数和辐射参数的影响,得到以下结论:

(i) 表面摩擦因数随着粘度参数、浮力参数、热传导率参数和辐射参数的增大而增大,但随着材料参数的增大而减小.

(ii) Nusselt 数随着热传导率参数和辐射参数的增大而减小.

(iii) 表面喷出时,表面摩擦因数和 Nusselt 数在减小;表面吸入时,它们在增大.

(iv) 滑移参数对表面摩擦因数和 Nusselt 数没有影响.

(v) 在特殊情形下,本文得到的数值解与文献[33]的精确解是一致的.

致谢 作者衷心感谢审稿人给本文提出的宝贵意见.

参考文献 (References):

- [1] Sakiadis B C. Boundary layer behavior on continuous solid surface—II: the boundary layer on a continuous flat surface[J]. *AIChE J*, 1961, 7(2): 221-225.
- [2] Tsou F K, Sparrow E M, Goldstein K J. Flow and heat transfer in the boundary layer on a continuous moving surface[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 1967, 10(2): 219-235.
- [3] Erickson L E, Fan L T, Fox V G. Heat and mass transfer on a moving continuous flat plate with suction or blowing[J]. *Ind Engng Chem Fund*, 1966, 5: 19-25.
- [4] Griffin J F, Thorne J L. On the thermal boundary layer growth on continuous moving belts [J]. *AIChE J*, 1967, 13(6): 1210-1211.
- [5] Moutsoglou A, Chen T S. Buoyancy effects in boundary layers on inclined continuous moving sheets[J]. *J Heat Transfer*, 1980, 102(2): 171-173.
- [6] Jeng D R, Chang T C A, DeWitt K J. Momentum and heat transfer on a continuous moving

- surface[J]. *J Heat Transfer*, 1986, **108**(3): 532-537.
- [7] Takhar H S, Chamkha A J, Nath G. Effect of buoyancy forces on the flow and heat transfer over a continuous moving vertical or inclined surface[J]. *Int J Thermal Sci*, 2001, **40**(9): 825-833.
- [8] Mahmoud M A A. Variable viscosity effects on hydromagnetic boundary layer flow along a continuously moving vertical plate in the presence of radiation[J]. *Appl Math Sci*, 2007, **1**(17): 799-814.
- [9] Mahmoud M A A, Megahed A M. On steady hydromagnetic boundary-layer flow of a non-Newtonian power-law fluid over a continuously moving surface with suction[J]. *Chem Eng Comm*, 2007, **194**(11): 1457-1469.
- [10] Mahmoud M A A, Megahed A M. Effects of viscous dissipation and heat generation (absorption) in a thermal boundary layer of a non-Newtonian fluid over a continuously moving permeable flat plate[J]. *J Applied Mechanics and Technical Physics*, 2009, **50**(5): 819-825.
- [11] Bar-Cohen A, Sherwood G, Hodes M, Solbreken G L. Gas-assisted evaporative cooling of high density electronic modules[J]. *IEEE Trans CPMT*, Part A, 1995, **18**(3): 502-509.
- [12] Chun K R, Seban R A. Heat transfer to evaporating liquid films[J]. *ASME J Heat Transfer*, 1971, **93**: 391-396.
- [13] Killion J D, Garimella S. Simulation of pendant droplets and falling films in horizontal tube absorbers[J]. *ASME J Heat Transfer*, 2004, **126**(6): 1003-1013.
- [14] Rabani E, Rechman D R, Gelsler P L, Brus L E. Drying mediated self assembly of nano-particles[J]. *Nature*, 2003, **426**: 271-274.
- [15] Calvert P. Ink-jet printing for materials and devices[J]. *Chem Mater*, 2001, **13**(10): 3299-3305.
- [16] Wang C. Liquid film on an unsteady stretching surface[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1990, **48**: 601-610.
- [17] Andersson H I, Aarseth J B, Dandapat B S. Heat transfer in a liquid film on an unsteady stretching surface[J]. *Int J Heat and Mass Transfer*, 2000, **43**(1): 69-74.
- [18] Dandapat B S, Santra B, Andersson H I. Thermocapillarity in a liquid film on an unsteady stretching surface[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2003, **46**(16): 3009-3015.
- [19] Chen C H. Effect of viscous dissipation on heat transfer in a non-Newtonian liquid film over an unsteady stretching sheet[J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2006, **135**(2/3): 128-135.
- [20] Wang C, Pop I. Analysis of the flow of a power-law fluid film on an unsteady stretching surface by means of homotopy analysis method[J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2006, **138**(2/3): 161-172.
- [21] Abbas Z, Hayat T, Sajid M, Asghar S. Unsteady flow of a second grade fluid film over an unsteady stretching sheet[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2008, **48**: 518-526.
- [22] Abel M S, Mahesha N, Tawade J. Heat transfer in a liquid film over an unsteady stretching surface with viscous dissipation in presence of external magnetic field[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, **33**(8): 3430-3441.
- [23] Santra B, Dandapat B S. Unsteady thin-film flow over a heated stretching sheet[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2009, **52**(7/8): 1965-1970.
- [24] Noor N F M, Abdulaziz O, Hashim I. MHD flow and heat transfer in a thin liquid film on an unsteady stretching sheet by the homotopy analysis method[J]. *Int J Numer Meth Fluids*, 2010, **63**: 357-373.

- [25] Siddiqui A M, Mahmood R, Ghori Q K. Homotopy perturbation method for thin film flow of a third grade fluid down an inclined plane[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, **35**(1): 140-147.
- [26] Eringen A C. Theory of micropolar fluids[J]. *J Math Mech*, 1966, **16**: 1-18.
- [27] Eringen A C. Theory of thermomicropolar fluids[J]. *J Math Appl*, 1972, **38**: 480-495.
- [28] Armin T, Turk M A, Sylvester N D. Microcontinuum fluid mechanics a review[J]. *Int J Engng Sci*, 1973, **11**(8): 905-915.
- [29] Armin T, Turk M A, Sylvester N D. Application of microcontinuum fluid mechanics[J]. *Int J Engng Sci*, 1974, **12**(4): 273-279.
- [30] Lukaszewicz G. *Micropolar Fluids; Theory and Application*[M]. Basel: Birkhäuser, 1999.
- [31] Eringen A C. *Microcontinuum Field Theories—II: Fluent Media*[M]. New York: Springer, 2001.
- [32] 乔德哈瑞 R C, 吉哈 A K. 化学反应对竖直平板边界磁流体动力学微极流体滑流的影响[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(9): 1069-1082. (Chaudhary R C, Jha A K. Effects of chemical reactions on MHD micropolar fluid past a vertical plate in slip-flow regime[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2008, **29**(9): 1179-1194.)
- [33] Hayat T, Sajid M, Ali N. On exact solutions for thin film flows of a micropolar fluid[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, **14**(2): 451-461.
- [34] Dandapat B S, Santra B, Vajravelu K. The effects of variable fluid properties and thermocapillarity on the flow of a thin film on an unsteady stretching sheet[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, **50**(5/6): 991-996.
- [35] Nadeem S, Faraz N. Thin film flow of a second grade fluid over a stretching/shrinking sheet with variable temperature-dependent viscosity[J]. *Chinese Phys Lett*, 2010, **27**(3): 034704.
- [36] Makinde O D. Laminar falling liquid film with variable viscosity along an inclined heated plate [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **175**(1): 80-88.
- [37] Mahmoud M A A, Megahed A M. MHD flow and heat transfer in a non-Newtonian liquid film over an unsteady stretching sheet with variable fluid properties[J]. *Can J Phy*, 2009, **87**(10): 1065-1071.
- [38] Hayat T, Javed T, Abbas Z. Slip flow and heat transfer of a second grade fluid past a stretching sheet through a porous space[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2008, **51**(17/18): 4528-4534.
- [39] Asghar S, Gulzar M M, Ayub M. Effects of partial slip on flow of a third grade fluid[J]. *Acta Mech Sin*, 2006, **22**(5): 393-396.
- [40] Mahmoud M A A. Slip effects on flow and heat transfer of a non-Newtonian fluid on a stretching surface with thermal radiation[J]. *Int J Chem React Engng*, 2008, **6**(1): A92.
- [41] Sajid M, Awais M, Nadeem S, Hayat T. The influence of slip condition on thin film flow of a fourth grade fluid by the homotopy analysis method[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2008, **56**(8): 2019-2026.
- [42] 祖额科 J, 阿么德 S. 流经有热源多孔平板并伴有化学反应的传热传质混合对流 MHD 流动[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(10): 1160-1171. (Zueco J, Ahmed S. Combined heat and mass transfer by mixed convection MHD flow along a porous plate with chemical reaction in presence of heat source[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2010, **31**(10): 1217-1230.)
- [43] Chandrakala P. Radiation effects on flow past an impulsively started vertical oscillating plate

- with uniform heat flux[J]. *Int J Dynamics of Fluids*, 2011, **7**(1): 1-8.
- [44] Jena S K, Mathur M N. Similarity solution for laminar free convection flow of thermo-micropolar fluid past a non-isothermal vertical flat plate[J]. *Int J Engng Sci*, 1981, **19**(11): 1431-1439.
- [45] Peddieson J, McNitt R P. Boundary layer theory for a micropolar fluid[J]. *Recent Adv Engng Sci*, 1970, **5**: 405-426.
- [46] Raptis A. Radiation and viscoelastic flow[J]. *Int Comm Heat Mass Transfer*, 1999, **26**(6): 889-895.
- [47] El-Gendi S E. Chebyshev solution of differential, integral and integro-differential equations [J]. *Computer J*, 1969, **12**(3): 282-287.

Variable Fluid Properties and Thermal Radiation Effects on the Flow and Heat Transfer in a Micropolar Fluid Film Past a Moving Permeable Infinite Flat Plate With Slip Velocity

Mostafa A. A. Mahmoud, Shimaa E. Waheed

(*Department of Mathematics, Faculty of Science, Benha University (13518), Egypt*)

Abstract: The influence of thermal radiation on the problem of mixed convection thin film flow and heat transfer of a micropolar fluid past a moving infinite vertical porous flat plate with slip velocity was dealt with. The fluid viscosity and the thermal conductivity were assumed to vary as a function of temperature. The equations governing the flow were solved numerically using the Chebyshev spectral method for some representative value of various parameters. Comparisons with previously published work were performed and found to be in an excellent agreement. The effects of various parameters on the velocity, the microrotation velocity and the temperature profiles as well as the skin-friction coefficient and the Nusselt number were plotted and discussed.

Key words: micropolar fluid; thin film; slip velocity; variable fluid properties; thermal radiation; Chebyshev spectral method