

# 纳米流体流经热分层线性多孔伸展平面时的 MHD 自然对流及其 Lie 对称群变换\*

A·K·罗斯米拉, R·坎达沙密, I·姆哈敏

(马来西亚敦胡先翁大学 计算数学研究中心, PSTPi, 柔佛, 马来西亚)

**摘要:** 就不可压缩粘性纳米流体,流经半无限垂直伸展平面并计及热分层时,研究该流体的 MHD 自然对流和热交换.通过特定形式的 Lie 对称群变换,即单参数群变换,将所考虑问题的偏微分控制方程变换为常微分方程组.然后,使用基于打靶法的 Runge Kutta Gill 法进行数值求解.最后得出结论:流场、温度和纳米颗粒体积率受热分层和磁场的影响很显著.

**关键词:** Lie 对称群变换; 纳米流体; 多孔介质; 热分层; 磁场

**中图分类号:** O361.3; O357.3; O357.4 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.05.005

## 引 言

多孔伸展平面中的纳米流体显示出一些新的特点,热交换中的纳米流体有着众多潜在的、有益的应用,包括微电子、燃料电池、医药制造和混合动力机车等.实际上,纳米颗粒是粒状材料和原子/分子结构之间的有效桥梁,在科学上有着重要的研究价值.纳米流体是一种基础流体和纳米颗粒组合的工程胶体.与基础流体相比较,纳米流体有着更高的热交换率和单相热交换系数.近年来,多孔介质中的对流得到了广泛的研究,这是因为其在工程中有着广泛的应用,如核反应堆的后续热移动、太阳能吸收器、干燥处理、热交换器、地热和油的回收、建筑结构,等等.特别是纳米流体流经多孔的伸展平面问题,是应用工业的许多工艺中的一个重要问题,如挤压、融解-纺纱、热轧、抽丝、玻璃纤维的生产、塑料和橡胶板的制造、熔炉(也可能是电解液)中大块金属板的冷却,等等.

纳米流体在磁场作用下的研究,在物理、化学和工程方面有着重要的应用.近年来我们发现,纳米流体在聚合物工业(处理塑料平板的伸展)和冶金工业(利用水力-磁技术)中有一些应用.可以更具体地指出,很多冶金加工,包括连续带或丝的冷拉加工,就是通过纳米流体在拉曳过程中得以伸长.需要拉曳加工的如铜材的退火和碾压.在所有这些情况中,最终产品的特性很大程度上依赖于冷却率,连续条带在导电的流体中,在磁场作用下拉伸,最终产品达到期望的特性.纳米流体因其增强了材料的性能,独特的热交换方法,受到了非常广泛的关注.在计算机和其他场合,纳米流体还被用于微芯片的冷却.它们还被用于微流体的其他电子应用产品

\* 收稿日期: 2011-03-23; 修订日期: 2011-12-21

作者简介: Ramasamy Kandasamy, 教授, 博士(联系人. E-mail: future990@gmail.com).

本文原文为英文,黄雅意译,张禄坤校.

中,含磁纳米颗粒的纳米流体作为超顺磁流体,在电磁场的交互作用中吸收能量控制高温,在小尺寸、布线更合理的散热器中,纳米流体被作为冷却剂使用。纳米流体是一种在普通流体中细微固体颗粒(纳米颗粒)的悬浮液。这种说法首先由 Choi<sup>[1]</sup>提出。纳米流体的特点是热交换性得到增强,该现象由 Masuda 等<sup>[2]</sup>发现。这个现象暗示着在先进的原子能系统中利用纳米流体的可能性(参见文献[3])。Buongiorno<sup>[4]</sup>对纳米流体中对流性传输作了广泛的研究,他们合理地解释了热交换性能出现反常的提高,而粘性还有待进一步研究。他们聚焦于对流情况下热交换性能的增强。最近,Kuznetsov 等<sup>[5]</sup>研究了纳米颗粒流过垂直平板时的自然对流边界层的影响。Nield 等<sup>[6]</sup>进一步在充满纳米流体的多孔介质中,研究 Cheng-Minkowycz<sup>[7]</sup>问题:流过垂直平板的自然对流问题。不同的学者提出,用 Lie 群变换来研究纳米流体的对流,本文我们将提到 Birkoff<sup>[8-9]</sup>, Moran 等<sup>[10-11]</sup>, Ibrahim 等<sup>[12]</sup>, Yurusoy 等<sup>[13-14]</sup>, Yurusoy 等<sup>[15]</sup>, Makinde 等<sup>[16]</sup>及 Hassanien 等<sup>[17]</sup>的文献。本文的目的是,利用 Lie 对称群变换,即单参数变换群,在不同参数下的纳米流体中,分析流过伸展表面时稳定边界层流动、热交换和纳米颗粒体积率的发展变化。

## 1 数学分析

考虑不可压缩粘性纳米流体,在线性多孔半无限伸展平面上,作二维的、稳定的层流。同时考虑有一强度为  $B_0$  的常磁场,垂直作用于无限伸展的平面。无限伸展平面的温度为常数  $T_w$ ,当  $y$  趋于无穷时,环境温度为常数  $T_\infty$ 。进一步假设,与外加磁场相比,感应磁场可以忽略不计(因为磁 Reynolds 数很小)。流体是以水为基础的纳米流体,含不同形式的纳米颗粒:Cu,  $Al_2O_3$ , Ag 或  $TiO_2$ 。假设基础流体和纳米颗粒处于热平衡,且两者之间不发生相对滑动。表 1 给出了纳米流体的热物理性能(参见文献[18])。基于上述假设,流动场和浓度场边界层的控制方程,可以用以下有量纲形式表示:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\rho_{nf}} \left[ \mu_{nf} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + (\rho\beta)_{nf} \bar{g} (T - T_\infty) - \left( \sigma B_0^2 + \frac{\nu_f}{K} \rho_{nf} \right) \bar{u} \right], \quad (2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \alpha_{nf} \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2}. \quad (3)$$

上述方程对应的边界条件为

$$\begin{cases} \bar{u} = U = a\bar{x}, \bar{v} = -V_0, T = T_w, & \bar{y} = 0, \\ \bar{u} \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty \rightarrow (1-n)T_0 + nT_w, & \bar{y} \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4)$$

表 1 流体和纳米颗粒的热物理特性

Table 1 Thermophysical properties of fluid and nanoparticles

	$\rho / (\text{kg}/\text{m}^3)$	$c_p / (\text{J}/\text{kg} \cdot \text{K})$	$k / (\text{W}/\text{m} \cdot \text{K})$	$\beta \times 10^5 / \text{K}^{-1}$
pure water ( $\zeta = 0.0$ )	997.1	4 179	0.613	21
copper (Cu) ( $\zeta = 0.05$ )	8 933	385	401	1.67
silver (Ag) ( $\zeta = 0.1$ )	10 500	235	429	1.89
alumina ( $Al_2O_3$ ) ( $\zeta = 0.15$ )	3 970	765	40	0.85
titanium ( $TiO_2$ ) ( $\zeta = 0.2$ )	4 250	686.2	8.953 8	0.9

这里,  $n$  为常数,满足  $0 \leq n < 1$ 。上面定义的  $n$ ,与文献[19]中的  $m_1/(1+m_1)$  相等,其中  $m_1$  为常数,  $n$  用来表示热分层的参数。  $T_0$  为一常数,表示参考温度  $T_\infty(0)$ 。下角  $w$  和  $\infty$  分别表示

壁面条件和环境条件.  $a$  为一常数,  $\bar{u}$  和  $\bar{v}$  分别为  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$  方向的速度分量,  $T$  为纳米流体的局部温度,  $\bar{g}$  为重力加速度,  $V_0$  为壁面的吸入/吹出速度,  $K$  为多孔介质的渗透率,  $\sigma$  为电导率,  $B_0$  为均匀的磁场强度,  $\rho_{nf}$  为纳米流体的有效密度,  $\mu_{nf}$  为纳米流体的有效动粘度,  $\alpha_{nf}$  为纳米流体的热扩散率, 它们的定义可参见文献[20]:

$$\rho_{nf} = (1 - \zeta)\rho_f + \zeta\rho_s, \mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \zeta)^{2.5}},$$

$$(\rho\beta)_{nf} = (1 - \zeta)(\rho\beta)_f + \zeta(\rho\beta)_s, \alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho c_p)_{nf}},$$

这里,  $\zeta$  为固体的体积率,  $\mu_f$  为基础流体的动粘度,  $\beta_f$  和  $\beta_s$  分别为基础流体和纳米颗粒的热膨胀系数,  $\rho_f$  和  $\rho_s$  分别为基础流体和纳米颗粒的密度,  $k_{nf}$  为纳米流体的热交换率,  $(\rho c_p)_{nf}$  为纳米流体的热容量, 定义为

$$(\rho c_p)_{nf} = (1 - \zeta)(\rho c_p)_f + \zeta(\rho c_p)_s,$$

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{k_s + 2k_f - 2\zeta(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f + 2\zeta(k_f - k_s)}, \quad (5)$$

其中,  $k_f$  和  $k_s$  分别为基础流体和纳米颗粒的热交换率.

引入如下的无量纲变量:

$$x = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\nu_f/a}}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\sqrt{\nu_f/a}}, \quad u = \frac{\bar{u}}{\sqrt{a\nu_f}}, \quad v = \frac{\bar{v}}{\sqrt{a\nu_f}}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad (6)$$

方程(1) ~ (4) 的无量纲形式为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 - \zeta + \zeta\rho_s/\rho_f} \left[ \frac{1}{(1 - \zeta)^{2.5}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left\{ \left( 1 - \zeta + \zeta \frac{(\rho\beta)_s}{(\rho\beta)_f} \right) \gamma \theta \right\} - (M + \lambda) u \right], \quad (8)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{1 - \zeta + \zeta(\rho c_p)_s/(\rho c_p)_f} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (9)$$

其边界条件为

$$\begin{cases} u = ax, \quad v = -\frac{V_0}{av_f}, \quad T = T_w, & y = 0; \\ u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty \rightarrow (1 - n)T_0 + nT_w, & \bar{y} \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $Pr = \nu_f/\alpha_{nf}$  为 Prandtl 数,  $\lambda = \nu_f/(aK)$  为多孔介质参数,  $\gamma = g(T_w - T_\infty)(\rho\beta)_f/(\rho_f a U)$  为浮力参数或自然对流参数,  $M = \sigma B_0^2/(a\rho_f)$  为磁场参数.

值得一提的是,  $\gamma > 0$  表示促进流体的流动,  $\gamma < 0$  表示阻碍流体的流动, 而  $\gamma = 0$ , 即  $(T_w - T_\infty)$ , 代表强迫对流的情况. 另一方面, 如果  $\gamma$  比单位 1 大得多, 这时浮力占主导地位. 因此, 当  $\gamma = O(1)$  时, 表示组合的对流流动.

引入流函数  $\psi$ , 定义  $u = \partial\psi/\partial y$  和  $v = -\partial\psi/\partial x$ , 则方程组(7) ~ (9) 变为

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{1}{1 - \zeta + \zeta\rho_s/\rho_f} \left[ \frac{1}{(1 - \zeta)^{2.5}} \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} + \right.$$

$$\left[ \left( 1 - \zeta + \zeta \frac{(\rho\beta)_s}{(\rho\beta)_f} \right) \gamma\theta \right] - (M + \lambda) \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{1 - \zeta + \zeta(\rho c_p)_s/(\rho c_p)_f} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}, \quad (12)$$

其边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{V_0}{av_f}, \quad T = T_w, & y = 0; \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty \rightarrow (1 - n)T_0 + nT_w, & \bar{y} \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (13)$$

利用经典的 Lie 群变换, 计算方程(11)和(12)的对称群. 转换成分离方程(11)和(12)不变量的单参数无穷小 Lie 群可以定义为

$$\begin{cases} x^* = x + \varepsilon\xi_1(x, y, \psi, \theta), \quad y^* = y + \varepsilon\xi_2(x, y, \psi, \theta), \\ \psi^* = \psi + \varepsilon\mu_1(x, y, \psi, \theta), \quad \theta^* = \theta + \varepsilon\mu_2(x, y, \psi, \theta). \end{cases} \quad (14)$$

由代数方法, 上式也可以用如下无穷小形式表示:

$$\xi_1 = c_1x + c_2, \quad \xi_2 = g(x), \quad \mu_1 = c_3\psi + c_4, \quad \mu_2 = c_5\theta, \quad (15)$$

其中  $g(x)$  为一任意函数.

无穷小生成元定义为

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + g(x) \frac{\partial}{\partial y} + \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + g(x) \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = g(x) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \psi}. \quad (16)$$

前面所考虑问题的偏微分控制方程, 通过一个特殊形式的 Lie 对称群变换, 即单参数的无穷小 Lie 群变换, 变成一个常微分的方程组, 生成元  $X_1$  可取  $g(x) = 0$ . 特征方程为

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{d\psi}{\psi} = \frac{d\theta}{\theta}, \quad (17)$$

求解上述方程, 得到

$$\eta = y, \quad \psi = x f(\eta), \quad \theta = x \theta(\eta). \quad (18)$$

利用上述关系式, 式(11)和(12)变为

$$f''' + (1 - \zeta)^{2.5} \left[ \left( 1 - \zeta + \zeta \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) (ff'' - f'^2) - \frac{(M + \lambda)f' - \left\{ 1 - \zeta + \zeta(\rho\beta)_s/(\rho\beta)_f \right\} \gamma\theta}{1 - \zeta + \zeta\rho_s/\rho_f} \right] = 0, \quad (19)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{1}{1 - \zeta + \zeta(\rho c_p)_s/(\rho c_p)_f} \frac{k_{nf}}{k_f} \theta'' + f\theta' - \left[ \theta + \frac{n}{1 - n} \right] f' = 0. \quad (20)$$

边界条件取如下形式:

$$\begin{cases} f' = 1, \quad f = S, \quad \theta = 1, & \eta = 0, \\ f' \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0, & \eta \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (21)$$

其中,  $S = -V_0/(av_f)$ ,  $S > 0$  对应于吸入,  $S < 0$  对应于吹出.

出于实用目的, 分别用函数  $f(\eta)$  和  $\theta(\eta)$  来定义表面摩擦因数

$$C_f = \frac{\mu_{nf}}{\rho_f U^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = - \frac{1}{(1 - \zeta)^{2.5}} (Re_x)^{-1/2} f''(0) \quad (22)$$

和 Nusselt 数

$$Nu_x = \frac{xk_{nf}}{k_f(T_w - T_\infty)} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = - (Re_x)^{1/2} \frac{k_{nf}}{k_f} \theta'(0), \quad (23)$$

这里  $Re_x = Ux/\nu_f$  为局部的 Reynolds 数.

## 2 一些特殊情况下的精确解

我们给出某些特殊情况下的精确解. 这样的解是有用的, 可以作为与数值解比较时的基准.

### 2.1 无自由对流的流动, 且无纳米颗粒 ( $\gamma = 0, \zeta = 0$ )

在  $\gamma = 0, \zeta = 0$  的极限情况, 纳米边界层流动和传热问题得以退化. 这时候, 速度场的解, 最早由 Crane<sup>[21]</sup> 给出, 即

$$f(\eta) = 1 - e^{-\eta}, \quad (24)$$

而温度场的解, 可以根据带两个参数的合流超几何级数解, 即 Kummer 函数  $M_k$  来表示, 记

$$\theta(\eta) = \exp\left(-\frac{(Pr + b_0)\eta}{2}\right) \frac{M_k(a_1, b_1, -Pre^{-\eta})}{M_k(a_1, b_1, -Pr)}, \quad (25)$$

其中

$$b_0 = Pr \sqrt{1 - \frac{4\beta_1}{Pr}}, \quad a_1 = \frac{Pr + b_0 - 2}{2}, \quad b_1 = 1 + b_0. \quad (26)$$

### 2.2 无自由对流的流动, 但有纳米流体颗粒 ( $\gamma = 0, \zeta \neq 0$ )

当  $\gamma = 0, \zeta \neq 0$  时, 纳米边界层流动与传热现象不再耦合. 方程(19)满足所必需条件时的精确解为  $f'(\eta) = e^{-\delta\eta}$ , 其中

$$\delta = \sqrt{(1 - \zeta)^{2.5} \left[ 1 + \zeta + \zeta \frac{\rho_s}{\rho_f} \right]} > 0.$$

现在能量方程(20)是一个含可变系数的 2 阶常微分方程. 方程(20)满足边界条件(21)的解, 可以用 Kummer 函数来表达. 早期有很多学者 (如 Vajravelu<sup>[22]</sup>, Abel 等<sup>[23]</sup>, Abel 等<sup>[24]</sup>) 在不同的物理条件下, 不考虑纳米颗粒的体积率, 推导并讨论了 Newton 流体和非 Newton 流体的解析解.

## 3 数值解

非线性常微分方程组(19)和(20), 在边界条件(21)下的解, 可以用 Runge Kutta Gill 算法<sup>[25]</sup>求解, 结合打靶法, 系统地猜测  $f''(0)$  和  $\theta'(0)$ , 直到在无穷远处的边界条件  $f'(\infty)$  和  $\theta'(\infty)$  呈指数衰减到 0. 使用符号计算机语言 Matlab 程序进行计算. 用步长  $\Delta\eta = 0.001$  求数值解  $\eta_{\max}$ , 精度达到小数点后面 5 位时认为是收敛的. 通过赋值  $\eta_\infty = \eta_\infty + \Delta\eta$ , 得到每个循环迭代的  $\eta_\infty$  值. 对于每组参数  $Pr, \zeta, n, \lambda$  和  $M$ , 当  $\eta = 0$  处未知边界条件的值, 在下一个循环时不发生变化 (误差小于  $10^{-7}$ ), 确定  $\eta_\infty$  的最大值. 当纳米流体流过垂直多孔伸展平面时, 对于不同的热分层参数、多孔性参数、磁场参数和纳米颗粒体积率参数, 研究它们对稳定边界层流动的发展和热交换, 以及对纳米颗粒体积率的影响. 下一节将对结果进行详细讨论.

## 4 结果和讨论

用打靶法和 Runge Kutta Gill 算法, 对一些控制参数  $Pr, \zeta, n, \lambda$  和  $M$  值, 在满足边界条件(21)时, 数值地求解方程(19)和(20). 表 2 就不同的  $Pr$  值, 不考虑热分层的影响, 将  $-f''(0)$  和

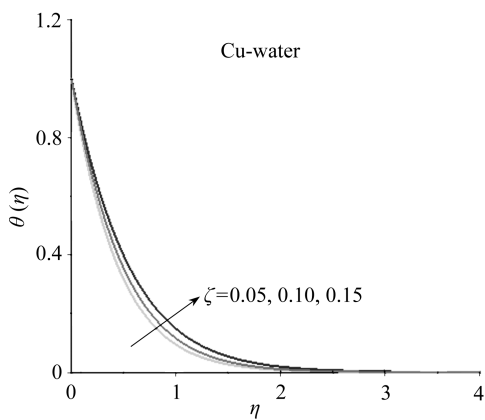
$-\theta'(0)$  的结果,与 Grubka 等<sup>[26]</sup>, Ali<sup>[27]</sup>, Ishak 等<sup>[28]</sup> 和 Vajravelu 等<sup>[29]</sup> 得到的结果进行比较. 比较结果表明,对于每一个  $Pr$  值显示出良好的一致性. 因此,确认本文的结果是非常准确的.

表2 数值结果  $-\theta'(0)$  与先前报道结果的比较

Table 2 Comparison of results for  $-\theta'(0)$  with previous published works

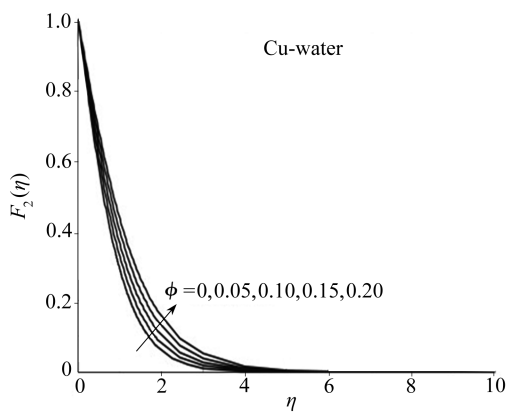
$Pr$	Grubka et al <sup>[26]</sup>	Ali <sup>[27]</sup>	Ishak et al <sup>[28]</sup>	Vajravelu et al <sup>[29]</sup>	present work
					$\zeta = 0, M = n = S = \lambda = 0$
0.01	0.019 7	—	0.019 7	0.019 723	0.019 726 71
0.72	0.808 6	0.805 8	0.808 6	0.808 681	0.808 679 91
1.00	1.000 0	0.996 1	1.000 0	1.000 000	1.000 000 00
3.00	1.923 7	1.914 4	1.923 7	1.923 687	1.923 688 91
7.00	3.720 7	3.700 6	3.720 7	3.720 788	3.720 779 27
10.00	12.294 0	—	12.294 1	12.294 100	12.294 132 80

为了确定本文数值结果的精度,将本文所得到的结果,与文献中可利用的精确解进行对比. 图1(a)和图1(b)分别给出了本文 Prandtl 数  $Pr$  对应的温度分布曲线,与 Hamad 等<sup>[30]</sup> 得到的精确解进行比较. 可以看出,温度分布曲线的数值解与理论解有着很好的一致性. 显然可以看到,对于一个给定的  $\zeta$ , 温度随着纳米颗粒体积率参数的增加而下降. 这是因为随着纳米颗粒体积率参数的增加,热边界层厚度将会减小,这从图1(a)和图1(b)中  $\zeta = 0.05, 0.10$  和  $0.15$  时曲线的对比中可以看到.



(a) 本文无量纲温度分布曲线

(a) Present result



(b) Hamad 的精确解<sup>[30]</sup>

(b) Reference [30]

图1 本文得到的温度曲线与文献[30]的对比 ( $M = 1.0, Pr = 6.2, \lambda = n = 0$ )

Fig. 1 Comparison of the temperature profiles (present result) with

Hamad et al<sup>[30]</sup> ( $M = 1.0, Pr = 6.2, \lambda = n = 0$ )

图2至图5分别就纯水和铜-水这两种情况,对于不同的磁场参数,绘出了典型的速度和温度分布曲线. 由于均匀的热分层效应,可以清楚地看到,在这两种情况下,随着磁场强度的增加,流体的速度在减小而温度在上升. 横向磁场对导电流体产生了一个称之为 Lorentz 力的阻力. Lorentz 力使流体的运动减缓,同时使流体的温度上升. 这样一个定性结果也是预料之中的,因为磁场对自然对流的流动施加了阻力. 运动中的自由流在磁场作用下,有促进原动力的倾向,使流体的运动减缓,同时使其边界层增加. 注意到,对于特定的  $M$  值,并在每个位置上,有纳米颗粒存在时的速度,比相应纯流体时的速度要小,而温度值刚好相反. 物理上是非常有趣的,纳米流体(铜-水)的温度增加显著,这是因为流体中的铜纳米颗粒,在磁场作用下的热交

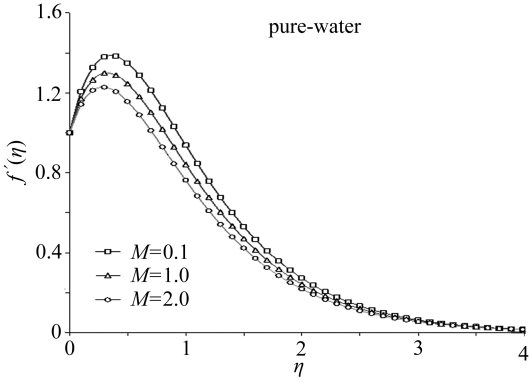


图2 当  $Pr = 6.2$ ,  $\zeta = 0$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$  时,  $M$  取不同值时的速度分布曲线

Fig.2 Velocity profiles for various values of  $M$  ( $Pr = 6.2$ ,  $\zeta = 0$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$ )

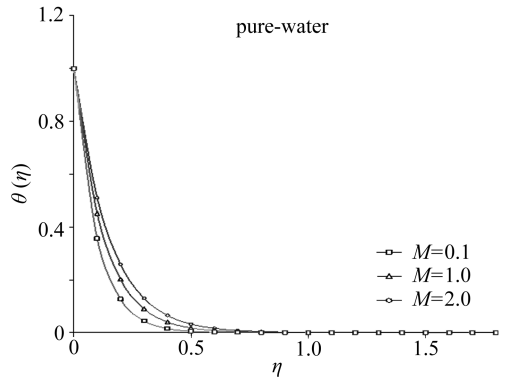


图3 当  $Pr = 6.2$ ,  $\zeta = 0$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$  时,  $M$  取不同值时的温度分布曲线

Fig.3 Temperature profiles for various values of  $M$  ( $Pr = 6.2$ ,  $\zeta = 0$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$ )

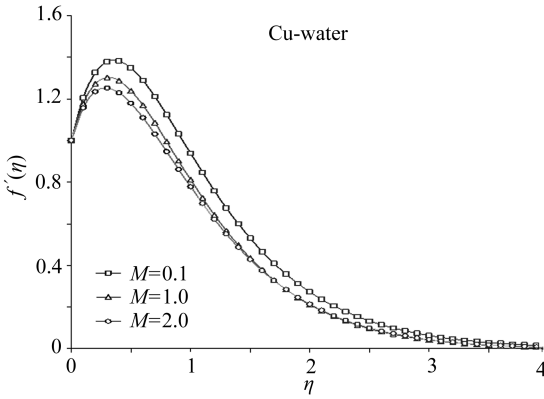


图4 当  $Pr = 6.2$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$  时,  $M$  取不同值时的速度分布曲线

Fig.4 Velocity profiles for various values of  $M$   $Pr = 6.2$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$

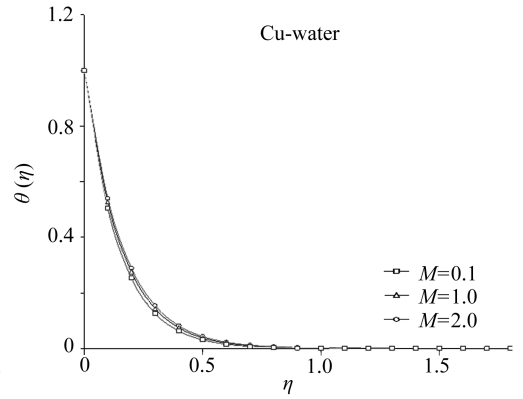


图5 当  $Pr = 6.2$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$  时,  $M$  取不同值时的温度分布曲线

Fig.5 Temperature profiles for various values of  $M$   $Pr = 6.2$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$

换率要高些。

图6和图7分别给出了纳米颗粒体积率对速度和温度分布的影响。图6和图7描绘出  $M = 1$  和  $Pr = 6.2$  时的流线。可以发现,有均匀磁场存在时,随着纳米颗粒体积率参数的增加,流体的速度在减小,而流体的温度在增加。还可以发现,随着纳米颗粒体积率的增加,热边界层厚度在增加。它和物理特性相一致,铜体积率的增加,导致热交换率的增加,从而使热边界层厚度增加。所有这些图形,描述了不同类型纳米流体速度和温度的变化,意味着纳米流体在冷却和加热工艺中将发挥重要作用。

图8至图11分别就纯水和铜-水这两种情况,在不同的热分层参数下,绘出了典型的速度和温度分布曲线。热分层均匀时,可以清楚地看到,在这两种情况下,随着热分层强度的增加,流体的速度和温度都在减小。特别地,只有当热分层强度高于纳米颗粒体积率参数时,流体的温度才逐渐从高值向低值变化。就热交换特征机理来看,当  $0.9 \leq n < 1$  时,温度场引起大的变化。当  $n = 0.9$  时,外边界区域将出现负温度。所有这些物理特性,都是由于纳米颗粒体积率和热分层强度的综合效应。

图12和图13分别给出了多孔性对无量纲速度和温度曲线的影响。可以看出,纳米流体

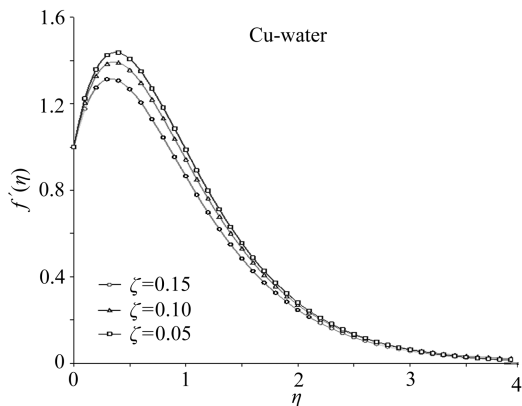


图6 当  $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$  时,  $\zeta$  取不同值时的速度分布曲线

Fig. 6 Velocity profiles for various values of  $\zeta$   
( $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$ )

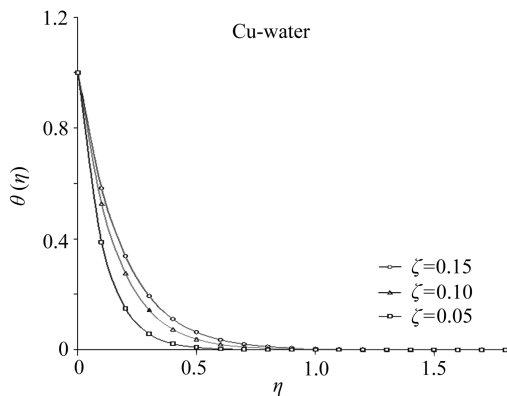


图7 当  $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$  时,  $\zeta$  取不同值时的温度分布曲线

Fig. 7 Temperature profiles for various values of  $\zeta$   
( $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$ )

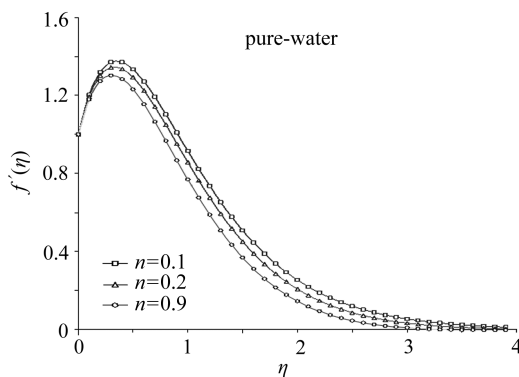


图8 当  $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $\zeta = 0$ ,  $S = 1.0$  时,  $n$  取不同值时的速度分布曲线

Fig. 8 Velocity profiles for various values of  $n$   
( $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $\zeta = 0$ ,  $S = 1.0$ )

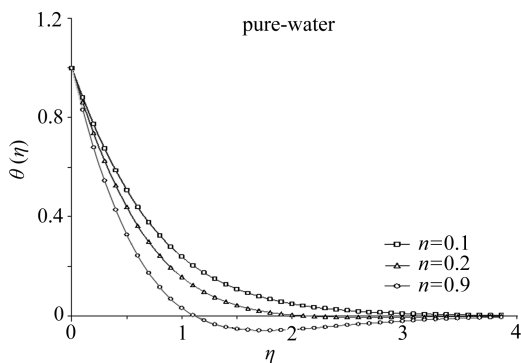


图9 当  $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $\zeta = 0$ ,  $S = 1.0$  时,  $n$  取不同值时的温度分布曲线

Fig. 9 Temperature profiles for various values of  $n$   
( $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $\zeta = 0$ ,  $S = 1.0$ )

(铜-水)的速度和温度随着平板多孔性的增加而减小。这是因为伸展表面壁面的吸入作用,对流体的流动机理有附加影响,使得流体的运动减缓,流体的温度下降。出现这样的特点可以解释如下:对于壁面的吸入作用,使得流体紧靠壁面流动,同时使得热边界层厚度减小。同样地,由于壁面的吸入作用,除了使得热边界层厚度减小,即纳米流体(铜-水)的热边界层变稀以外,还使得速度边界层厚度减小,图12和图13正显示这样的特性。

表3 当  $S = 1.0$  时,不同参数值所对应的  $f''(0)$  和  $-\theta'(0)$  值

Table 3 Values of  $f''(0)$  and  $-\theta'(0)$  for various values of parameters when  $S = 1.0$

$Pr$	$n$	$M$	$\zeta$	$\lambda$	$f''(0)$	$-\theta'(0)$
6.2	0.5	0.0	0.05	0.5	0.539 231	0.987 654
6.2	0.5	0.5	0.05	0.5	0.517 865	0.964 371
6.2	0.5	1.5	0.05	0.5	0.387 645	0.932 647
6.2	0.5	0.0	0.10	1.0	0.356 217	0.896 732
6.2	0.5	0.5	0.10	1.0	0.326 874	0.861 729
6.2	0.5	1.5	0.10	1.0	0.296 982	0.849 752



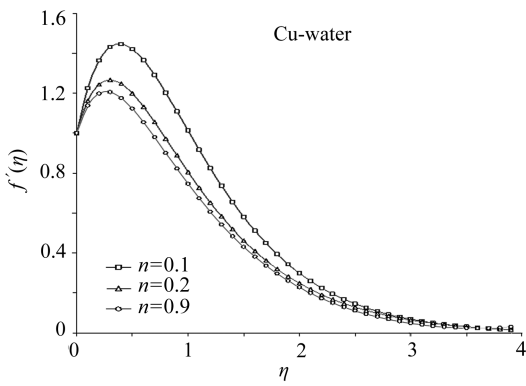


图 10 当  $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $S = 1.0$  时,  $n$  取不同值时的速度分布曲线

Fig. 10 Velocity profiles for various values of  $n$   
( $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $S = 1.0$ )

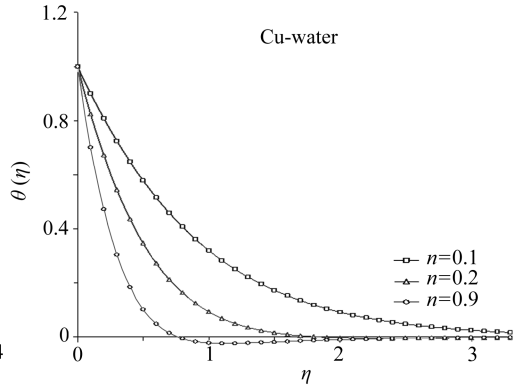


图 11 当  $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $S = 1.0$  时,  $n$  取不同值时的温度分布曲线

Fig. 11 Temperature profiles for various values of  $n$   
( $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $S = 1.0$ )

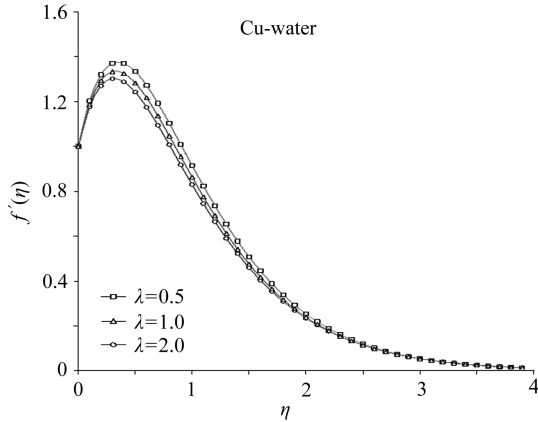


图 12 当  $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$  时,  $\lambda$  取不同值时的速度分布曲线

Fig. 12 Velocity profiles for various values of  $\lambda$   
( $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  
 $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$ )

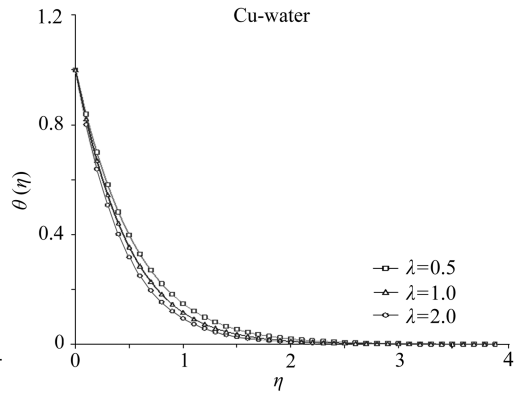


图 13 当  $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$  时,  $\lambda$  取不同值时的温度分布曲线

Fig. 13 Temperature profiles for various values of  $\lambda$   
( $Pr = 6.2$ ,  $M = 1.0$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  
 $n = 0.5$ ,  $S = 1.0$ )

表 3 就  $Pr = 6.2$  和  $n = 0.5$  时,给出了  $M, \zeta$  和  $\lambda$  的不同参数值,  $f''(0)$  和  $-\theta'(0)$  相应的数值解. 从表 3 可以看出,对于不同类型的纳米流体,随着  $M, \zeta$  和  $\lambda$  的增加,  $|f''(0)|$  和  $|\theta'(0)|$  值在下降,这蕴含着平板上表面摩擦因数和温度比在下降.

## 5 结 论

本模型就有磁场存在时,讨论纳米流体中热分层的参与所带来的影响. 我们发现,纳米颗粒对流场影响的研究中,纳米颗粒的体积率是一个关键的参数. 利用 Lie 对称群变换,将质量、动量和能量守恒的、偏微分的控制方程,变换为常微分方程. 利用基于打靶法的 Runge Kutta 法,数值地求解了这些方程. 在不同的参数条件下,用图形给出了温度和速度的数值结果. 基于所得到的图形结果,可以得到以下结论:

· 有磁场作用时,计及热分层的冲击,对流场以至于对从壁面到流体的热交换有着显著的影响.对3种类型的纳米流体,即铜(Cu)、银(Ag)和铝( $Al_2O_2$ ),考虑热分层后的纳米颗粒,在确定热交换特性中有着显著的影响.

· 温度场分布随着纳米颗粒体积率的增加而增加,这表明依次用银(Ag)和铝( $Al_2O_2$ )取代铜(Cu),温度将逐渐下降.还可以看出,随着纳米流体类型的变化,速度和温度也发生变化,这就意味着磁场作用下的纳米流体,在冷却和加热工艺中上将起重要作用.进一步地可以看到,与基础流体相比,纳米流体温度的下降更显著.

· 可以看到,随着平板多孔性的增加,纳米流体(铜-水)的速度和温度在下降.这是因为多孔伸展表面的吸入作用,为流体流动机理提供附加效应,使得流体的运动减缓温度下降.

· 由于均匀的热分层效应,可以清楚地看到,在这两种情况(纯水和铜-水)中,随着磁场强度的增加,流体的速度在减小,而流体的温度在上升,因为其阻碍运动的力,有减缓流体运动,同时提高流体温度的倾向.

· 还可以发现,对于这种多孔伸展的平板问题,铜纳米颗粒的冷却性能最高,而铝纳米颗粒最低.这是因为Cu的热传导性高,而 $Al_2O_3$ 的热传导性低.

纳米流体的重要性体现在它们可以有着众多应用,包括热传导以及其他应用,如净化.近年来,纳米颗粒特别是在不同的领域中,如医学、生物医学中得到了广泛的关注.纳米流体在多孔介质中的流动,在工程中的应用起着重要的作用,如核反应堆中后续的热移动、太阳能吸收器、干燥处理、热交换,等等.纳米流体研究的跨学科特性,为纳米技术前沿的探索和发现提供巨大的机遇.因此,纳米流体课题的研究,对于基础研究和应用研究都有非常重要的意义.

**致谢** 作者衷心地感谢马来西亚敦胡先翁大学 FSTPi 的副校长和系主任的鼓励.

## 参考文献(References):

- [1] Choi S. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticle[C]//Siginer D A, Wang H P. *Developments and Applications of Non-Newtonian Flows. ASME MD Vol 231*, New York and FED, 1995, **66**(1): 99-105.
- [2] Masuda H, Ebata A, Teramae K, Hishinuma N. Alteration of thermal conductivity and viscosity of liquid by dispersing ultra-fine particles[J]. *Netsu Bussei*, 1993, **7**(2): 227-233.
- [3] Buongiorno J, Hu W. Nanofluid coolants for advanced nuclear power plants[C]//*Proceedings of ICAPP'05*, Paper no 5705. Seoul: Curran Associates, May, 2005: 15-19.
- [4] Buongiorno J. Convective transport in nanofluids[J]. *ASME Journal of Heat Transfer*, 2006, **128**(2): 240-250.
- [5] Kuznetsov A V, Nield D A. Natural convective boundary-layer flow of a nanofluid past a vertical plate[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2010, **49**(2): 243-247.
- [6] Nield D A, Kuznetsov A V. The Cheng-Minkowycz problem for natural convective boundary layer flow in a porous medium saturated by a nanofluid[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2009, **52**(9): 5792-5795.
- [7] Cheng P, Minkowycz W J. Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike[J]. *Journal of Geophysics Research*, 1977, **82**(6): 2040-2044.
- [8] Birkhoff G. Mathematics for engineers[J]. *Electrical Engineering*, 1948, **67**(5): 1185-1188.
- [9] Birkhoff G. *Hydrodynamics*[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1960.

- [10] Moran M J, Gaggioli R A. Similarity analysis via group theory[J]. *AIAA Journal*, 1968, **6** (8): 2014-2016.
- [11] Moran M J, Gaggioli R A. Reduction of the number of variables in systems of partial differential equations with auxiliary conditions[J]. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1968, **16** (2): 202-215.
- [12] Ibrahim F S, Hamad M A A. Group method analysis of mixed convection boundary layer flow of a micropolar fluid near a stagnation point on a horizontal cylinder[J]. *Acta Mechanica*, 2006, **181**(1): 65-81.
- [13] Yurusoy M, Pakdemirli M. Symmetry reductions of unsteady three-dimensional boundary layers of some non-Newtonian fluids[J]. *International Journal of Engineering Sciences*, 1997, **35**(2): 731-740.
- [14] Yurusoy M, Pakdemirli M. Exact solutions of boundary layer equations of a special non-Newtonian fluid over a stretching sheet[J]. *Mechanics Research Communications*, 1999, **26** (1): 171-175.
- [15] Yurusoy M, Pakdemirli M, Noyan O F. Lie group analysis of creeping flow of a second grade fluid[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2001, **36**(8): 955-960.
- [16] Makinde O D, Aziz A. Boundary layer flow of a nanofluid past a stretching sheet with a convective boundary condition[J]. *International Journal of Thermal Science*, 2011, **50**(5): 1326-1332.
- [17] Hassanien I A, Hamad M A A. Group theoretic method for unsteady free convection flow of a micropolar fluid along a vertical plate in a thermally stratified medium[J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2008, **32**(6): 1099-1114.
- [18] Oztop H F, Abu-Nada E. Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2008, **29** (6): 1326-1336.
- [19] Nakayama A, Koyama H. Similarity solutions for buoyancy induced flows over a non-isothermal curved surface in a thermally stratified porous medium[J]. *Applied Scientific Research*, 1989, **46**(2): 309-314.
- [20] Aminossadati S M, Ghasemi B. Natural convection cooling of a localized heat source at the bottom of a nanofluid-filled enclosure[J]. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 2009, **28**(4): 630-640.
- [21] Crane L J. Flow past a stretching plate[J]. *Z Angew Mathematik und Physik (ZAMP)*, 1970, **21**(4): 645-647.
- [22] Vajravelu K. Flow and heat transfer in a porous medium over a stretching surface[J]. *Z Angew Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, 1994, **74**(12): 605-614.
- [23] Abel M S, Veena P H. Visco-elastic fluid flow and heat transfer in a porous media over a stretching sheet[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1998, **33**(3): 531-540.
- [24] Abel M S, Khan S K, Prasad K V. Momentum and heat transfer in visco-elastic fluid in a porous medium over a non-isothermal stretching sheet[J]. *International Journal of Numerical Methods and Heat Fluid Flow*, 2000, **10**(3): 786-801.
- [25] Gill S. A process for the step-by-step integration of differential equations in an automatic digital computing machine[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1951, **47**(1): 96-108.
- [26] Grubka L G, Bobba K M. Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface with

- variable temperature[J]. *ASME J Heat Transfer*, 1985, **107**(2): 248-250.
- [27] Ali M E. Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface[J]. *Heat and Mass Transfer*, 1994, **29**(4): 227-234.
- [28] Ishak A, Nazar R, Pop I. Boundary layer flow and heat transfer over an unsteady stretching vertical surface[J]. *Meccanica*, 2009, **44**(2): 369-375.
- [29] Vajravelu K, Prasad K V, Lee J, Lee C, Pop I, Van Gorder R A. Convective heat transfer in the flow of viscous Ag-water and Cu-water nanofluids over a stretching surface[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2011, **50**(5): 843-851.
- [30] Hamad M A A, Pop I, Ismail Md A I. Magnetic field effects on free convection flow of a nanofluid past a vertical semi-infinite flat plate[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2011, **12**(3): 1338-1346.

## Lie Symmetry Group Transformation for MHD Natural Convection Flow of a Nanofluid Over a Linearly Porous Stretching Sheet in the Presence of Thermal Stratification

Abdul-Kahar Rosmila, Ramasamy Kandasamy, Ismoen Muhaimin  
(*Research Centre for Computational Mathematics, Faculty of Science,  
Technology and Human Development(FSTPi),  
Universiti Tun Hussein Onn Malaysia, Johor 86400, Malaysia*)

**Abstract:** The MHD convective flow and heat transfer of an incompressible viscous nanofluid past a semi infinite vertical stretching sheet in the presence of thermal stratification were examined. The partial differential equations governing the problem under consideration were transformed by a special form of Lie symmetry group transformations viz one-parameter group of transformation into a system of ordinary differential equations which were solved numerically using Runge Kutta Gill based shooting method. The conclusion is drawn that the flow field and temperature and nanoparticle volume fraction profiles are significantly influenced by thermal stratification and magnetic field.

**Key words:** Lie symmetry group transformation; nanofluids; porous media; thermal stratification; magnetic field