

分数阶 Duffing 混沌系统的动力性态 及其由单一主动控制的混沌同步*

何桂添, 罗懋康

(四川大学 数学系, 成都 610064)

摘要: 随着物理与技术的深入研究,分数阶非线性系统的动力性态及其分数阶混沌系统的同步成为研究的焦点.研究了分数阶 Duffing 系统的动力性态包括混沌性质,并且由分数阶非线性稳定性准则得到了分数阶非自治系统的混沌同步.特别地,研究了由单一主动控制的分数阶 Duffing 系统的同步.相应的数值结果演示了方法的有效性.

关键词: Caputo 分数阶微分; 分数阶 Duffing 系统; 同步

中图分类号: O415.5;O151;O369;O193 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.05.003

引 言

分数阶微积分的历史已经超过 300 年了,但是直到最近几十年应用科学家和工程师们才认识到分数阶微分方程提供了更好的刻画复杂现象的方法.例如,分数阶微分方程能更好地描述非 Brown 运动、信号处理、模式识别、控制、粘性材料等.与整数阶模型相比较,分数阶微分提供了刻画具有记忆性和遗传性的各种材料及过程的良好工具^[1-3].

研究分数阶动力系统中的混沌及其相关现象成为关注对象^[4,9].例如,分数阶单摆 Duffing 系统^[4]、分数阶改进 Duffing 系统^[6]、分数阶 Lorenz 系统^[9].混沌同步是非线性的另外一个重要课题,在过去 20 年,混沌同步在各个研究领域吸引了广泛的关注^[10-16].混沌同步在物理和工程科学具有广泛的应用,特别地,保密通信吸引了很大的兴趣.因此,分数阶混沌系统的应用开始吸引研究者的关注.由于分数阶混沌系统在保密通信和过程控制具有潜在的应用而成为很有兴趣的问题^[17-21].

Duffing 系统具有广泛的应用.由于 Duffing 系统对弱信号敏感,弱信号检测是最重要的应用之一^[22-24].我们的工作将研究分数阶 Duffing 系统的动力性质,并得到分数阶 Duffing 系统的存在性和唯一性.同时,分析平衡点的稳定性.本文最重要的工作是研究分数阶 Duffing 系统的同步.

本文结构如下.第 1 节给出分数阶微积分的定义,一些基本的性质和分数阶系统的数值算

* 收稿日期: 2011-08-30; 修订日期: 2012-02-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171238);教育部长江学者和创新团队发展计划基金资助项目(IRTO0742)

作者简介: 何桂添(1983—),男,江西赣州人,博士生(E-mail: heguitian100@163.com);
罗懋康(1956—),男,重庆人,教授(联系人. E-mail: makaluo@scu.edu.cn).

法;第2节引入分数阶 Duffing 系统;第3节分析分数阶 Duffing 系统的解的存在性以及平衡点处的稳定性;第4节研究非自治系统的同步;主动控制技术将应用于分数阶非自治系统的同步.特别地,单一主动控制技术将应用于分数阶 Duffing 系统的同步;第5节为结论.

1 预备知识

1.1 分数阶微积分

在几个分数阶微分/积分中^[1-3],可能最常见的定义是 Caputo 定义和 Riemann-Liouville 定义.

定义 1 函数 $f(t), t > 0$ 称为在空间 $C_\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$ 中,如果存在实数 $p (> \alpha)$,使得 $f(t) = t^p f_1(t)$,其中 $f_1(t) \in C[0, \infty]$.

定义 2 函数 $f(t), t > 0$ 称为在空间 $C_\alpha^m, m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ 中,如果 $f^{(m)} \in C_\alpha$.

定义 3 设 $f \in C_\alpha$ 且 $\alpha \geq -1$,则 $\mu (\mu > 0)$ 阶 Riemann-Liouville 积分由下式给出:

$$I^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t - \tau)^{\mu-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad (1)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数.

定义 4 $f, f \in C_\alpha^m, m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ 的 Caputo 微分定义为

$$D_*^q f(t) = I^{m-q} f^{(m)}(t), \quad q > 0, \quad (2)$$

其中, $m = [q], m$ 为第 1 个大于 q 的整数.

Caputo 分数阶微分算子 D_*^q 是可交换的

$$D_*^p D_*^q f(x) = D_*^q D_*^p f(x) = D_*^{p+q} f(x), \quad \forall p, q \in \mathbf{R}_+,$$

如果 $f(x)$ 是充分光滑的.

定义 5 Caputo 分数阶微分的 Laplace 变换是

$$L\{D_*^q f(t)\} = s^q L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{q-1-k} f^{(k)}(0), \quad (3)$$

其中, L 表示 Laplace 变换,且 s 是复变量.

如果考虑初始条件为 0,式(3)变为

$$L\{D_*^q f(t)\} = s^q L\{f(t)\}. \quad (4)$$

1.2 解的存在性和稳定性定理

分数阶微分方程的初值问题是

$$\begin{cases} D_*^q x(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (5)$$

命题 1^[1,25] 假设 $\mathcal{D}: [0; T^*] \times [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,其中, $T^* > 0, \delta > 0$ 且设 $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ 在 \mathcal{D} 上有界且满足关于第 2 变量的 Lipschitz 条件,即存在独立于 t, x, y 的常数 $L > 0$ 使得

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L |x - y|,$$

则存在唯一的函数 $x: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ 是初值问题的解,其中

$$T := \min \{ T^*, (\delta \Gamma(q + 1) / \|f\|)^{1/q} \}.$$

定义 6^[26] 系统(5)是渐近稳定的当且仅当 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.

命题 2^[27-28] 对于给定的分数阶线性自治系统

$$D_*^q X(t) = AX(t), X(0) = X_0, \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{X}(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n, \mathbf{A} = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$$

且 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$, 及 $0 < q_i \leq 2 (i = 1, 2, \dots, n)$. 假设 m 是分母 u_i 的最小公倍数, 而且 $q_i = v_i/u_i, (u_i, v_i) = 1, u_i, v_i \in \mathbf{Z}_+$ 并令 $\gamma = 1/m$. 定义特征方程

$$\det(\text{diag}([\lambda^{mq_1} \lambda^{mq_2} \dots \lambda^{mq_n}]) - \mathbf{A}) = 0,$$

如果特征方程的所有根 λ_i 满足

$$|\arg(\lambda_i)| > \pi\gamma/2, \quad \text{对任意的 } i,$$

则系统(6)的 0 解是渐近稳定的.

定义 7 分数阶方程(5)是相称分数阶系统, 如果条件 $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$ 满足. 分数阶方程(5)是不相称分数阶系统, 如果条件 $q_1 \neq q_2 \neq \dots \neq q_n$ 成立.

命题 3^[26,28] 对于给定不相称分数阶非线性系统

$$\begin{cases} D_*^{q_i} x_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ x_i(0) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (7)$$

其中, $0 < q_i \leq 2 (i = 1, 2, \dots, n)$. 假定 m 是 u_i 的最小公倍数, 及 $q_i = v_i/u_i, (u_i, v_i) = 1, u_i, v_i \in \mathbf{Z}_+$ 且令 $\gamma = 1/m$.

$$\det(\text{diag}([\lambda^{mq_1} \lambda^{mq_2} \dots \lambda^{mq_n}]) - \mathbf{J}) = 0,$$

其中, $\mathbf{J} = \partial f / \partial \mathbf{x}$, 如果上面特征方程的所有根 λ 满足 $|\arg(\lambda)| > \pi\gamma/2$, 则系统(7)是渐近稳定的.

1.3 分数阶微分方程的数值算法

分数阶微分方程的数值算法由 Diethelm 等^[29-30] 提出. 该算法是预解-校正方法, 是 Adams-Bashforth-Moulton 方法的推广. 分数阶方程的初值问题是

$$\begin{cases} D_*^q y(t) = f(t, y(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (8)$$

方程(8)等价于 Voltergral 积分方程

$$y(t) = \sum_{k=0}^{[q]-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds. \quad (9)$$

令 $h = T/N, t_n = nh, n = 0, 1, 2, \dots, N$, 则方程(9)可以如下离散化:

$$\begin{aligned} y_h(t_{n+1}) = & \sum_{k=0}^{[q]-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) + \\ & \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)), \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\alpha_{j,n+1} = \begin{cases} n^{q+1} - (n-q)(n+1)^q, & j=0, \\ (n-j+2)^{q+1} + (n-j)^{q+1} - 2(n-j+1)^{q+1}, & 1 \leq j \leq n, \\ 1, & j=n+1. \end{cases} \quad (11)$$

初步逼近 $y_h^p(t_{n+1})$ 称为校正且由如下给出:

$$y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[q]-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)), \quad (12)$$

其中

$$\beta_{j,n+1} = \frac{h^q}{q} ((n+1) - j)^q - (n-j)^q. \quad (13)$$

这种方法的误差估计有

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |y(t_j) - y_h(t_j)| = O(h^p), \quad (14)$$

其中, $p = \min(2, 1 + q)$.

2 分数阶 Duffing 系统

常见的 Duffing 系统^[22]是

$$\ddot{x} + k\dot{x} - ax + bx^3 = r \cos(\omega t), \quad (15)$$

其中, k, a, b, r 及 ω 是正常数.

上式可以写成 2 个微分方程的形式

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ky + ax - bx^3 + r \cos(\omega t). \end{cases} \quad (16)$$

现在我们考虑分数阶 Duffing 系统

$$D_*^\alpha x + kD_*^\beta x + ax - bx^3 = r \cos(\omega t), \quad 1 < \alpha \leq 2, 0 < \beta < \alpha, \quad (17)$$

则它可以写成两个分数阶微分方程

$$\begin{cases} D_*^\beta x = y, \\ D_*^{\alpha-\beta} y = -ky + ax - bx^3 + r \cos(\omega t). \end{cases} \quad (18)$$

令 $q_1 = \beta, q_2 = \alpha - \beta$, 则式(18)等价于

$$\begin{cases} D_*^{q_1} x = y, & 0 < q_1 < 2, \\ D_*^{q_2} y = -ky + ax - bx^3 + r \cos(\omega t), & 0 < q_2 < 2. \end{cases} \quad (19)$$

3 解的存在性及稳定性

定理 1 分数阶 Duffing 系统的初值问题可以表示成如下形式:

$$\begin{cases} D_*^q \mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t) + x_1^2(t)\mathbf{B}\mathbf{X}(t), & t \in [0, M], \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \end{cases} \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2, \mathbf{X}_0 = (x_{10}, x_{20})^T, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -k \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$ 和某个常数 $M > 0$, 则系统(20)具有唯一解.

证明 令 $\mathbf{G}(t, \mathbf{X}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + x_1^2(t)\mathbf{B}\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t)$, 显然它是连续的且在区间 $[\mathbf{X}_0 - \delta, \mathbf{X}_0 + \delta]$ 上有界, 对任意的 $\delta > 0$. 因为

$$\begin{aligned} |x_1^2(t)\mathbf{B}\mathbf{X}(t) - y_1^2(t)\mathbf{B}\mathbf{Y}(t)| &= \\ \left| \begin{pmatrix} 0 \\ b(y_1 - x_1)(y_1^2 + x_1y_1 + x_1^2) \end{pmatrix} \right| &\leq b |y_1^2 + x_1y_1 + x_1^2| |x_1 - y_1| \leq \\ 3b(|\mathbf{X}_0| + \delta)^2 |x_1 - y_1| &\leq 3b(|\mathbf{X}_0| + \delta)^2 |\mathbf{X}(t) - \mathbf{Y}(t)|, \end{aligned}$$

进一步, 我们有

$$|\mathbf{G}(t, \mathbf{X}(t)) - \mathbf{G}(t, \mathbf{Y}(t))| \leq$$

$$| \mathbf{A}(\mathbf{X}(t) - \mathbf{Y}(t)) | + | x_1^2(t)\mathbf{B}\mathbf{X}(t) - y_1^2(t)\mathbf{B}\mathbf{Y}(t) |,$$

则

$$| \mathbf{G}(t, \mathbf{X}(t)) - \mathbf{G}(t, \mathbf{Y}(t)) | \leq L | \mathbf{X}(t) - \mathbf{Y}(t) |,$$

其中, $L = \| \mathbf{A} \| + 3b(| \mathbf{X}_0 | + \delta)^2, \mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}^2, |\cdot|$ 与 $\| \cdot \|$ 分别表示向量的模和矩阵的模. 上面的不等式表示 $\mathbf{G}(t, \mathbf{X}(t))$ 满足 Lipschitz 条件. 基于命题 1, 我们得到分数阶 Duffing 系统的初值问题具有唯一解.

我们容易看到系统(19)具有 3 个不动点 $O(0,0)$ 和 $P_{\pm}(\pm \sqrt{a/b}, 0)$.

定理 2 关于系统(19), 我们有

- (i) 平衡点 O 是不稳定的.
- (ii) 平衡点 P_+ 和 P_- 都是渐近稳定的, 如果

$$a \leq \frac{k^2}{8} \text{ 或 } \begin{cases} a > \frac{k^2}{8}, \\ \frac{\sqrt{8a - k^2}}{k} > \tan\left(\frac{\pi}{2} \gamma\right) \end{cases}$$

满足.

证明 (i) $\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -k \end{pmatrix}$ 是系统(19)在平衡点 O 的 Jacobi 矩阵, 它相应的特征值是

$$\lambda_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4a}}{2}, \lambda_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 + 4a}}{2}.$$

我们知道 $\lambda_1 > 0$, 则 $|\arg \lambda_1| = 0 < \pi\gamma/2$. 因此, 平衡点 O 是不稳定的.

(ii) 系统在点 P_{\pm} 具有相同的 Jacobi 矩阵 $\mathbf{J}_{P_{\pm}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2a & -k \end{pmatrix}$, 则特征方程是

$$\lambda^2 + k\lambda + 2a = 0.$$

如果 $a \leq k^2/8$, 相应的特征值是 $\lambda_{1,2} = (-k \pm \sqrt{k^2 - 8a})/2$, 我们有 $\lambda_{1,2} < 0$, 所以 $|\arg \lambda_{1,2}| = \pi > \pi\gamma/2$. 因此, 系统(19)是渐近稳定的.

如果 $a > k^2/8$, 相应的特征值是 $\lambda_{1,2} = (-k \pm i\sqrt{8a - k^2})/2$. 则 P_{\pm} 是渐近稳定的当且仅当 $\sqrt{8a - k^2}/k > \tan(\pi\gamma/2)$ 满足.

注 1 如果满足条件 $\tan(\pi\gamma/2) \geq \sqrt{8a - k^2}/k$, 平衡点 P_+ 和 P_- 是不稳定的. 因此, 系统(19)出现分岔或混沌吸引子的必要条件是它满足上面不等式.

4 分数阶非自治系统的同步

考虑 2 个分数阶非自治系统的主-从(启动-响应)同步结构:

$$\begin{cases} D_*^q \mathbf{X}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}(t)), \\ D_*^q \mathbf{Y}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{Y}(t)) + \mathbf{U}(t), \end{cases} \quad (21)$$

其中, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ 分别表示启动和响应系统的状态. $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 分别表示启动和响应的向量场. 我们的目的就是选择合适的控制函数 $\mathbf{U}_i = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 使得启动和响应系统的状态同步(也就是, $\lim_{t \rightarrow \infty} \| \mathbf{Y}(t) - \mathbf{X}(t) \| = \mathbf{0}$, 其中 $\| \cdot \|$ 为 Euclidean 模).

4.1 分数阶 Duffing 系统的同步

在这小节,我们的目的是通过主动控制分数阶(包括相称阶和不相称阶) Duffing 系统达到混沌同步. 主动和响应系统由如下给出:

$$\begin{cases} D_*^{q_1} x_1 = y_1, \\ D_*^{q_2} y_1 = -ky_1 + ax_1 - bx_1^3 + r \cos(\omega t) \end{cases} \quad (22)$$

和

$$\begin{cases} D_*^{q_1} x_2 = y_2 + u_1, \\ D_*^{q_2} y_2 = -ky_2 + ax_2 - bx_2^3 + r \cos(\omega t) + u_2. \end{cases} \quad (23)$$

未知项 u_1 和 u_2 是待定的主动控制函数. 定义误差函数为

$$\begin{cases} e_1 = x_2 - x_1, \\ e_2 = y_2 - y_1. \end{cases} \quad (24)$$

通过式(23)减去式(22)并利用式(24), 我们得到

$$\begin{cases} D_*^{q_1} e_1 = e_2 + u_1, \\ D_*^{q_2} e_2 = -ke_2 + ae_1 - b(x_2^3 - x_1^3) + u_2. \end{cases} \quad (25)$$

令

$$\begin{cases} u_1 = -e_2 - e_1, \\ u_2 = -ae_1 + b(x_2^3 - x_1^3). \end{cases} \quad (26)$$

误差动力系统可写成

$$\begin{cases} D_*^{q_1} e_1 = -e_1, \\ D_*^{q_2} e_2 = -ke_2. \end{cases} \quad (27)$$

定理 3 对任意的初始条件, 控制律(28)使得两个系统(式(22)和式(23))是全局渐近同步的.

证明 假定 $q_i \in (1, 2)$, $i = 1, 2$ (对于其他情况, 证明与前者类似). 在式(25)两边通过 Laplace 变换, 令 $E_i(s) = L\{(e_i)\}$ ($i = 1, 2$) 并且应用式(3), 我们得到

$$\begin{cases} s^{q_1} E_1(s) - s^{q_1-1} e_1(0) - s^{q_1-2} e_1^{(1)}(0) = -E_1(s), \\ s^{q_2} E_2(s) - s^{q_2-1} e_2(0) - s^{q_2-2} e_2^{(1)}(0) = -kE_2(s). \end{cases} \quad (28)$$

由式(28), 容易得到

$$\begin{cases} E_1(s) = \frac{s^{q_1-1} e_1(0) + s^{q_1-2} e_1^{(1)}(0)}{s^{q_1} + 1}, \\ E_2(s) = \frac{s^{q_2-1} e_2(0) + s^{q_2-2} e_2^{(1)}(0)}{s^{q_2} + k}. \end{cases} \quad (29)$$

根据 Laplace 的终值定理, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} s E_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s^{q_1} e_1(0) + s^{q_1-1} e_1^{(1)}(0)}{s^{q_1} + 1} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} s E_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s^{q_2} e_2(0) + s^{q_2-1} e_2^{(1)}(0)}{s^{q_2} + k} = 0. \end{aligned}$$

因此, 在控制律(28)下, 主动系统(22)和响应系统(23)达到同步.

4.1.1 仿真结果

为了证明和展示同步方法的有效性和可行性, 我们将给出相称阶和不相称阶 Duffing 系统

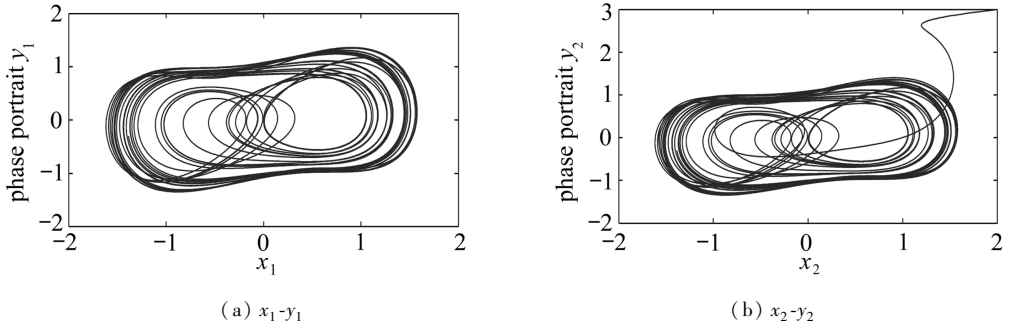


图 1 系统(22)和系统(23)的相位图

Fig.1 Phase portraits of eq. (22) and (23)

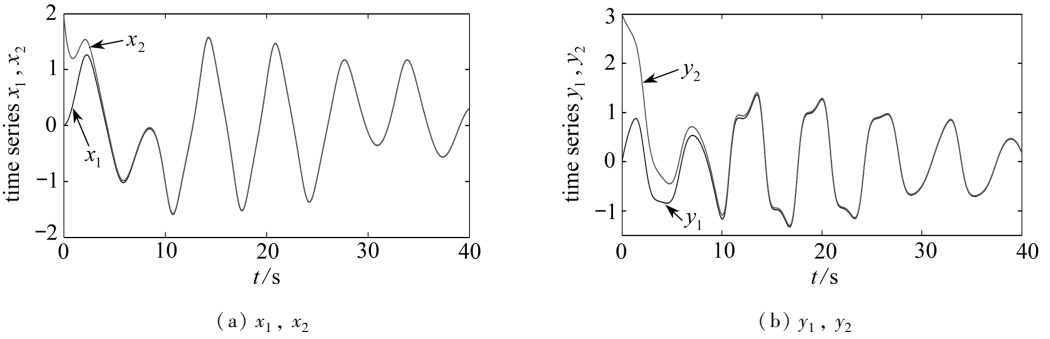


图 2 启动系统(22)和响应系统(23)的时间序列

Fig.2 The time series of drive system (22) and response system (23)

的同步仿真结果. 为了方便起见, 在全文中式 (19) 的参数指定为 $k=0.5$, $a=b=1$, $\omega=1$. 主动系统(22)和响应系统(23)的初始条件分别为 $x_1(0)=0, y_1(0)=0$ 和 $x_2(0)=2, y_2(0)=3$. 因此, 误差系统的初始条件为 $e_1(0)=2, e_2(0)=3$. 图 1 给出了式(22)和(23) ($q_1=q_2=0.95, r=1$) 的相位图. 图 2 和图 3 展示了相称阶系统 ($q_1=q_2=0.95, r=1$) 的同步. 图 4 展示了式(22)和(23) ($q_1=0.95, q_2=0.98, r=0.95$) 的相位图. 图

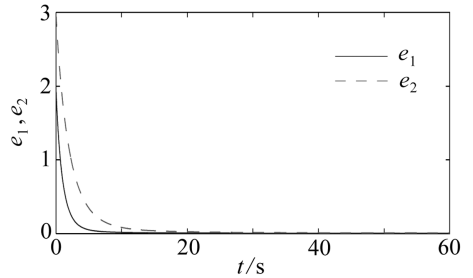


图 3 误差函数的演变

Fig.3 The evolution of the error functions

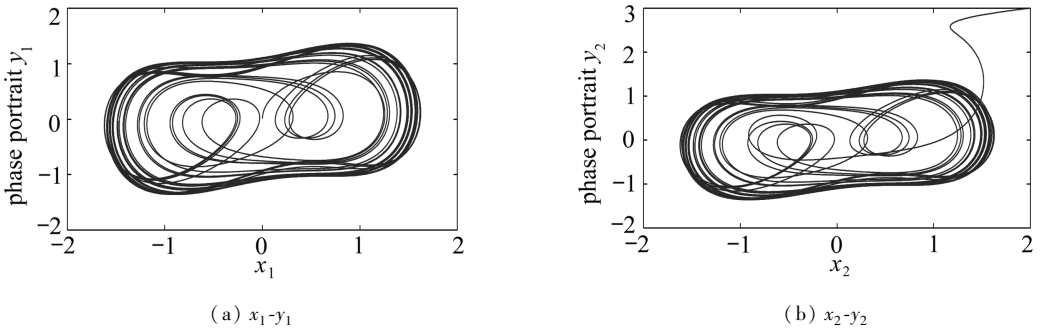
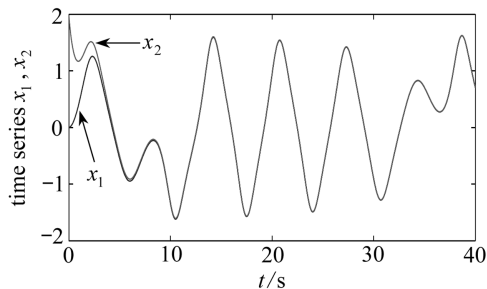
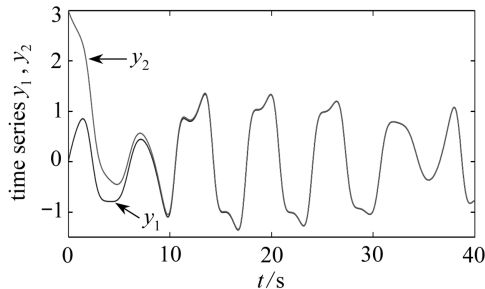


图 4 系统(22)和系统(23)的相位图

Fig.4 Phase portraits of eq. (22) and (23)



(a) x_1, x_2



(b) y_1, y_2

图 5 启动系统(22)和响应系统(23)的时间序列

Fig.5 The time series of drive system (22) and response system (23)

5 和图 6 展示了不相称解系统($q_1 = 0.95, q_2 = 0.98, r = 0.95$) 的同步。

4.2 由单一控制函数控制的分数阶 Duffing 系统的同步

在这小节,我们的目的是通过单一控制函数来研究分数阶 Duffing 系统的混沌同步. 主动系统和响应系统如下:

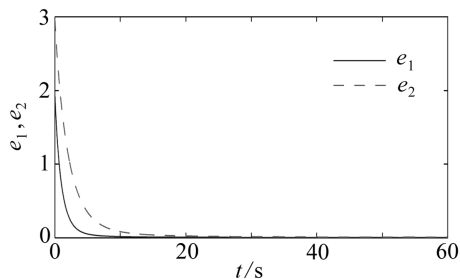


图 6 误差函数的演变

Fig.6 The evolution of the error functions

$$\begin{cases} D_*^{q_1} x_1 = y_1, \\ D_*^{q_2} y_1 = -ky_1 + ax_1 - bx_1^3 + r \cos(\omega t) \end{cases} \quad (30)$$

和

$$\begin{cases} D_*^{q_1} x_2 = y_2, \\ D_*^{q_2} y_2 = -ky_2 + ax_2 - bx_2^3 + r \cos(\omega t) + v_2. \end{cases} \quad (31)$$

误差变量由式(24)定义. 通过式(31)减去式(30)并利用式(24), 我们得到

$$\begin{cases} D_*^{q_1} e_1 = e_2, \\ D_*^{q_2} e_2 = -ke_2 + ae_1 - b(x_2^3 - x_1^3) + v_2. \end{cases} \quad (32)$$

定理 4 系统(30)和(31)在下面的控制律下对于任意的初始条件达到全局同步:

$$v_2 = -(1 + a)e_1 + b(x_2^3 - x_1^3). \quad (33)$$

如果满足条件

$$k \geq 2 \text{ 或 } \begin{cases} 0 < k < 2, \\ \frac{\sqrt{4 - k^2}}{k} > \tan\left(\frac{\pi}{2} \gamma\right). \end{cases} \quad (34)$$

证明 将式(33)代入式(32)并得到

$$\begin{cases} D_*^{q_1} e_1 = e_2, \\ D_*^{q_2} e_2 = -e_1 - ke_2. \end{cases} \quad (35)$$

相应的特征方程是

$$\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0.$$

如果 $k \geq 2$, 相应的特征值是 $\lambda_{1,2} = (-k \pm \sqrt{k^2 - 4})/2$, 我们得到 $\lambda_{1,2} < 0$. 如果满足条件(34), 根据命题 2, 容易看出系统(35)是全局渐近稳定的. 因此, 启动系统(30)和响应系统

(31) 同步.

如果 $k < 2$, 相应的特征值是 $\lambda_{1,2} = (-k \pm i\sqrt{4 - k^2})/2$. 则 $|\arg(\lambda_{1,2})| > \pi\gamma/2$ 当且仅当满足 $\sqrt{4 - k^2}/k > \tan(\pi\gamma/2)$. 如果满足条件(34), 根据命题 2, 直接看出系统(35) 是全局渐近稳定的. 因此, 启动系统(30) 和响应系统(31) 达到同步. 证毕.

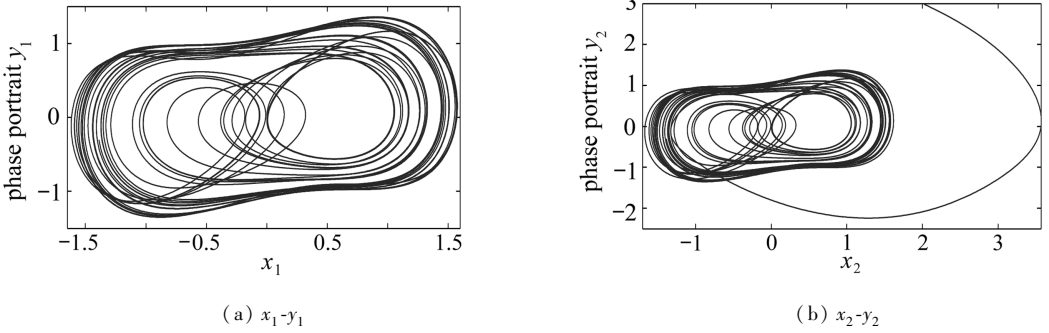


图 7 系统(30) 和系统(31) 的相位图
Fig. 7 Phase portraits of eq. (30) and (31)

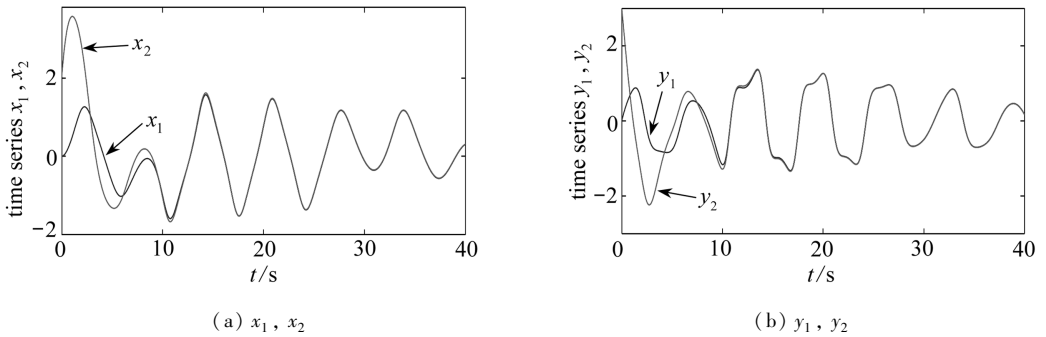


图 8 启动系统(30) 和响应系统(31) 的时间序列图
Fig. 8 The time series of drive system (30) and response system (31)

4.2.1 仿真结果

下面的数值仿真可以展示定理 4 的有效性. 分数阶 Duffing 方程的参数取为 $k = 0.5, a = b = \omega = 1$. 启动系统和响应系统的初值条件分别为 $x_1(0) = 0, y_1(0) = 0$ 和 $x_2(0) = 2, y_2(0) = 3$.

(i) 相称的情况: $(q_1, q_2) = (0.95, 0.95), r = 1$, 图 7 给出了式(30) 和(31) 的相位图. 图 8 和图 9 展示了相称阶 Duffing 系统的同步;

(ii) 不相称的情况: $(q_1, q_2) = (0.95, 0.98), r = 0.95$, 图 10 展现了式(30) 和(31) 的相位图. 图 11 和图 12 展示了不相称阶 Duffing 系统的同步.

4.3 分数阶 Duffing 与分数阶 van der Pol-Duffing 系统之间的同步

在这小节将研究分数阶 Duffing 与分数阶 van der Pol-Duffing 系统之间的同步. 假定分数阶 van der Pol-Duffing 系统被分数阶 Duffing 系统同步, 启动系统定义为

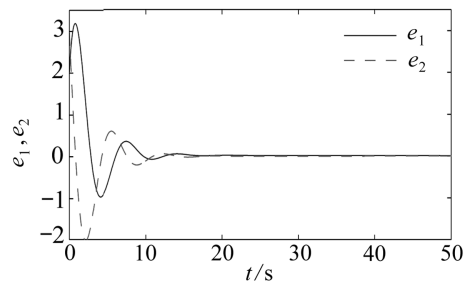


图 9 误差函数的演变
Fig. 9 The evolution of the error functions

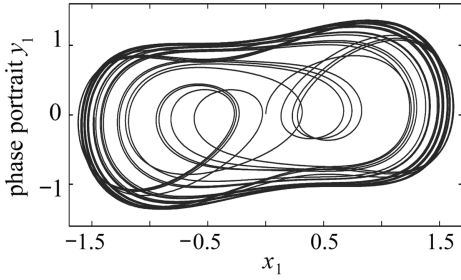
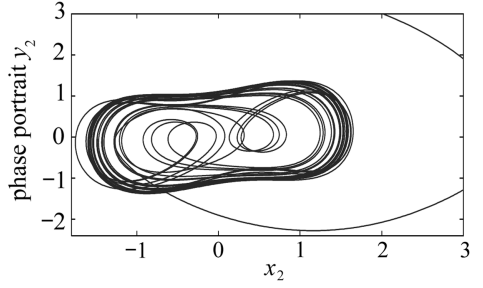
(a) x_1-y_1 (b) x_2-y_2

图 10 系统(30)和系统(31)的相位图

Fig. 10 Phase portraits of eq. (30) and (31)

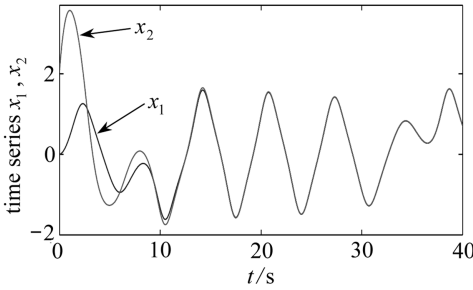
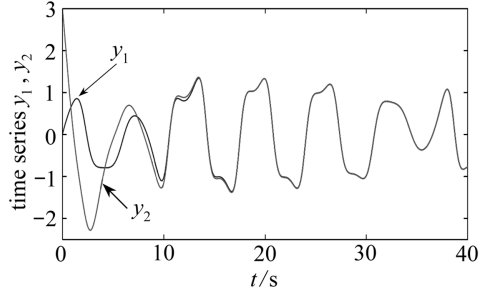
(a) x_1, x_2 (b) y_1, y_2

图 11 启动系统(30)和响应系统(31)的时间序列

Fig. 11 The time series of drive system (30) and response system (31)

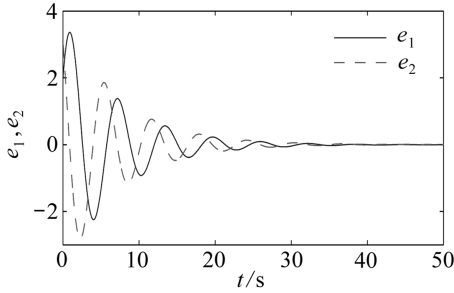


图 12 误差函数的演变

Fig. 12 The evolution of the error functions

$$\begin{cases} D_*^{q_1} x_1 = y_1, \\ D_*^{q_2} y_1 = \mu(1 - x_1^2)y_1 + \tilde{a}x_1 - \\ \tilde{b}x_1^3 + R \cos(\Omega t) \end{cases} \quad (36)$$

和响应系统定义为

$$\begin{cases} D_*^{q_1} x_2 = y_2 + u_1, \\ D_*^{q_2} y_2 = -ky_2 + ax_2 - bx_2^3 + \\ r \cos(\omega t) + u_2. \end{cases} \quad (37)$$

误差变量定义为式(24)。同步则误差 $e_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$), $t \rightarrow \infty$ 。注意到

$$\begin{cases} D_*^{q_1} e_1 = e_2 + u_1, \\ D_*^{q_2} e_2 = -ky_2 + ax_2 - bx_2^3 + r \cos(\omega t) - \mu(1 - x_1^2)y_1 - \\ \tilde{a}x_1 + \tilde{b}x_1^3 - R \cos(\Omega t) + u_2. \end{cases} \quad (38)$$

控制函数 u_i 定义为

$$\begin{cases} u_1 = V_1(t), \\ u_2 = (k + \mu)y_1 - \mu x_1^2 y_1 - (a - \tilde{a})x_1 + bx_2^3 - \\ \tilde{b}x_1^3 - r \cos(\omega t) + R \cos(\Omega t) + V_2(t). \end{cases} \quad (39)$$

$V_i(t)$ 是误差项 $e_i(t)$ 的线性函数。 $u_i(t)$ 由式(39)给出,则误差系统(38)成为

$$\begin{cases} D_*^{q_1} e_1 = e_2 + V_1(t), \\ D_*^{q_2} e_2 = -ke_2 + ae_1 + V_2(t). \end{cases} \quad (40)$$

控制项 $V_i(t)$ 的选择必须使得系统(40)稳定. 这样的函数并没有唯一的选择. 我们选择

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

其中, \mathbf{A} 是 2×2 的实矩阵, 如果选择合适则系统(40)的所有特征值满足条件

$$|\arg(\lambda_i)| > \pi/(2\gamma). \quad (42)$$

如果我们选择

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -a & k-1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

则线性系统(40)的所有特征值是 -1 . 所以系统(40)是稳定的并且式(36)和(37)同步.

4.3.1 仿真结果

分数阶 Duffing 系统的参数取为 $k = 0.5, a = b = \omega = 1, r = 0.95$, 并且分数阶 van der Pol-Duffing 系统的参数取为 $\mu = 0.1, \tilde{a} = \tilde{b} = 0.5, R = 0.75, \Omega = 2$. 分数阶取为 $q_1 = 0.96, q_2 = 0.98$. 系统(36)和(37)的初值条件分别为 $x_1(0) = 0, y_1(0) = 0$ 和 $x_2(0) = 2, y_2(0) = 3$. 则误差系统(40)的初始条件自然为 $e_1(0) = 2, e_2(0) = 3$. 图 13 展示了式(36)和(37)的相位图. 同步的仿真结果由图 14 和图 15 展现. 容易看出随着时间趋于无穷, 系统同步. 图 15 展示了误差动力系统(40)的所有变量迅速地趋于 0, 从而蕴含混沌同步.

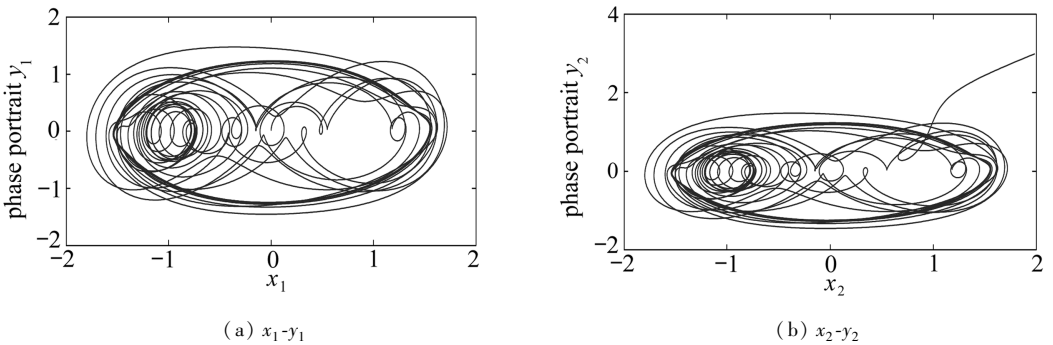


图 13 系统(36)和系统(37)的相位图

Fig. 13 Phase portraits of eq. (36) and (37)

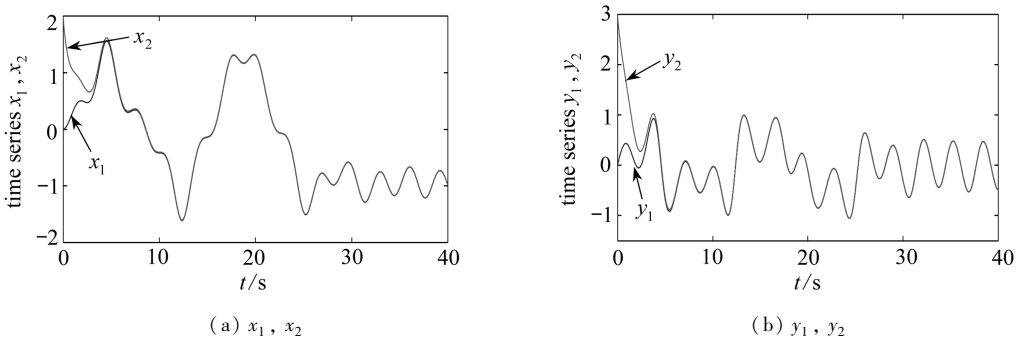


图 14 启动系统(36)和响应系统(37)的时间序列

Fig. 14 The time series of drive system (36) and response system (37)

4.4 在保密通信中的潜在应用

当科学家和工程师寻求实际应用时,引发了人们充分挖掘分数阶混沌系统在保密通信中的应用的想法.混沌同步在通信中的大致结构由图 16 展示.我们可以划分 3 个潜在的应用领域,其中包括如下 3 个方面.

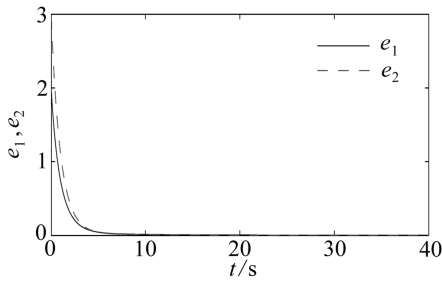


图 15 误差函数的演变

Fig. 15 The evolution of the error functions

1) 宽带方面:混沌信号本质是非周期的并且拥有连续的频谱.在通信中,宽带信号被用来袭击信道的不完善.分数阶混沌信号自然成为扩频通信的候选.

2) 复杂性方面:由于分数阶系统比整数阶系统具有更多的参数(分数阶也可看成是参数),因此分数阶混沌系统比整数阶混沌系统具有更大的密钥空间.因此,分数阶混沌信号具有更复杂的结构.在长时间内就很难猜测发生器的结构和预测信号.

3) 正交性方面:分数阶混沌信号是非周期的.因

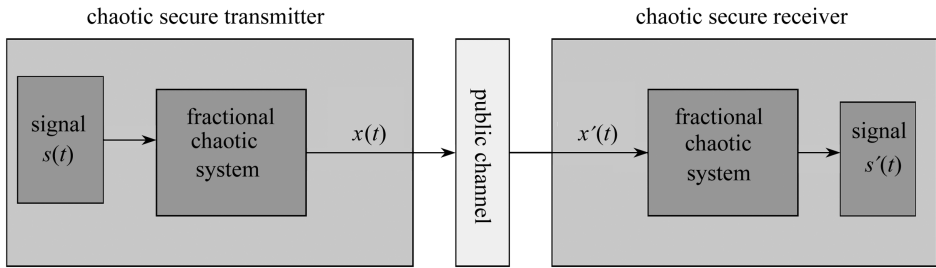


图 16 分数阶混沌的通信结构

Fig. 16 Structure of fractional chaos communication scheme

此,自相关函数具有截尾性.正交性可应用于多用户通信.

5 结 论

在当前的工作,充分研究了分数阶 Duffing 系统的动力性态.分数阶 Duffing 系统解的存在性和唯一性和平衡点处的稳定性得到了证明.文章最重要的工作是研究分数阶非自治系统的同步.特别地,应用单一控制技术使得分数阶 Duffing 系统同步.并且相应数值仿真结果展现了所提同步技术的有效性.我们相信我们的工作为分数阶非线性振子的理论研究提供了丰富的材料,并且给出了在保密通讯中的潜在应用.

参考文献(References):

- [1] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*[M]. New York: Academic Press, 1999.
- [2] Kilbas A A, Sarivastava H M, Trujillo J J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*[M]. New York: Elsevier, 2006.
- [3] Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*[M]. London: Imperial College Press, 2010.
- [4] Sheu L J, Chen H K, Chen J H, Tam L M. Chaotic dynamics of the fractionally damped Duffing equation[J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2007, **32**(4): 1459-1468.
- [5] Wang Z H, Hu H Y. Stability of a linear oscillator with damping force of the fractional-order

- derivative[J]. *Science China*, 2010, **53**(2): 345-352.
- [6] Ge Z M, Ou C Y. Chaos synchronization of fractional order modified Duffing systems with parameters excited by a chaotic signal[J]. *Chaos, Solitons Fractals*, 2008, **35**(2): 705-717.
- [7] Xin G, Yu J B. Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators [J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2005, **24**(4): 1097-1104.
- [8] Chen J H, Chen W C. Chaotic dynamics of the fractionally damped van der Pol equation[J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2008, **35**(1): 188-198.
- [9] Yu Y G, Li H X, Wang S, Yu J Z. Dynamic analysis of a fractional-order Lorenz chaotic system[J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2009, **42**(2): 1181-1189.
- [10] C · K · 阿衡. 基于混沌同步化的广义无源性[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(8): 961-970. (Choon Ki Ahn. Generalized passivity-based chaos synchronization[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2010, **31**(8): 1009-1018.)
- [11] 柴元, 吕翎, 赵鸿雁. 异结构离散型混沌系统的延迟同步[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(6): 703-709. (CHAI Yuan, LÜ Ling, ZHAO Hong-yan. Lag synchronization between discrete chaotic systems with diverse structure[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2010, **31**(6): 733-738.)
- [12] 刘艳, 吕翎. N 个异结构混沌系统的环链耦合同步[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(10): 1181-1190. (LIU Yan, LÜ Ling. Synchronization of N different coupled chaotic systems with ring and chain connections[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2008, **29**(10): 1299-1308.)
- [13] Albert C J L, Fuhong M. Synchronization dynamics of two different dynamical systems[J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2011, **44**(6): 362-380.
- [14] Albert C J L. A theory for synchronization of dynamical systems[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2009, **14**(5): 1901-1951.
- [15] Habib D, Antonio L. Adaptive unknown-input observers-based synchronization of chaotic systems for telecommunication[J]. *IEEE Trans Circuits Sys I Reg Papers*, 2011, **58**(4): 800-812.
- [16] Olga I M, Alexey A K, Alexander E H. Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise[J]. *Phys Lett A*, 2010, **374**(29): 2925-2931.
- [17] Wang X Y, He Y J, Wang M J. Chaos control of a fractional order modified coupled dynamo system[J]. *Nonlinear Anal*, 2009, **71**(12): 6126-6134.
- [18] Sachin B, Varsha D G. Synchronization of different fractional order chaotic systems using active control[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2010, **15**(11): 3536-3546.
- [19] Wu X J, Lu Y. Generalized projective synchronization of the fractional-order Chen hyperchaotic system[J]. *Nonlinear Dyn*, 2009, **57**(1/2): 25-35.
- [20] Matouk A E. Chaos, feedback control and synchronization of a fractional-order modified Autonomous van der Pol-Duffing circuit[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2011, **16**(2): 975-986.
- [21] Abel A, Schwarz W. Chaos communications-principles, schemes, and system analysis[J]. *P IEEE*, 2002, **90**(5): 691-710.
- [22] Hu N Q, Wen X S. The application of duffing oscillator in characteristic signal detection of early fault[J]. *J Sound Vib*, 2003, **268**(5): 917-931.
- [23] Nadakuditi R R, Silverstein J W. Fundamental limit of sample generalized eigenvalue based detection of signals in noise using relatively few signal-bearing and noise-only samples[J].

- IEEE Trans Ind Electron*, 2010, **4**(3): 468-480.
- [24] Zhao Z, Wang F L, Jia M X, Wang S. Intermittent-chaos-and-cepstrum-analysis-based early fault detection on shuttle valve of hydraulic tube tester[J]. *IEEE Trans Ind Electron*, 2009, **56**(7): 2764-2770.
- [25] Diethelm K, Ford N J. Analysis of fractional differential equations[J]. *J Math Anal Appl*, 2002, **265**(2): 229-248.
- [26] Li C P, Zhang F R. A survey on the stability of fractional differential equations[J]. *Eur Phys J Special Topics*, 2011, **193**(1): 27-47.
- [27] Sabattier J, Moze M, Farges C. LMI stability conditions for fractional order system[J]. *Comput Math Appl*, 2010, **59**(5): 1594-1609.
- [28] Thavazoei M S, Haeri M. A note on the stability of fractional order system[J]. *Math Comput Simul*, 2009, **79**(5): 1566-1576.
- [29] Diethelm K, Ford N J. Multi-order fractional differential equations and their numerical solution[J]. *Appl Math Comput*, 2004, **154**(3): 621-640.
- [30] Diethelm K, Ford N J, Freed A D, Luchko Y. Algorithms for the fractional calculus; a selection of numerical method[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2005, **194**(6/8): 743-773.

Dynamic Behavior of Fractional Order Duffing Chaotic System and Its Synchronization Via Singly Active Control

HE Gui-tian, LUO Mao-kang

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P. R. China*)

Abstract: Along with the deepening of research on physics and technology, dynamics of fractional order nonlinear systems and synchronization of fractional order chaotic systems focus strong attention on itself. The dynamic behavior including chaotic properties of fractional order Duffing systems was extensively investigated and, via the stability criterion of linear fractional systems, the synchronization of a fractional non-autonomous system was obtained. Especially, a kind of effective singly active control was proposed and applied to synchronize the fractional order Duffing system. The corresponding numerical results demonstrated the effectiveness of the proposed methods.

Key words: caputo fractional derivative; fractional order duffing system; synchronization