文章编号:1000-0887(2012)04-0486-14

耗散的量子 Zakharov 方程解的渐进性行为*

郭艳凤[1,2], 郭柏灵[2], 李栋龙[1]

(1. 广西工学院 信息与计算科学系, 广西 柳州 545006;
2. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 主要研究量子 Zakharov 方程. 在先验估计的基础上通过标准的 Galerkin 逼近方法得到了量子 Zakharov 方程解的存在唯一性. 同时,也讨论了相应的解的渐进性行为,并且构造出在不同的能量空间上弱拓扑意义下的全局吸引子.

关 键 词: 量子 Zakharov 方程; 吸收集; 全局吸引子

中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.04.009

引 言

研究在超小型电子设备[1]、致密天体等离子系统[2]、激光等离子体[3]中的量子效应是很重要的. 近年来,人们对古典等离子体物理现象中相应的量子效应的研究越来越感兴趣. 例如,带电粒子系统的量子流体动力学模型,在 Manfredi 和 Haas 的封闭假设下[4]成功地描述了量子耗散现象[5]. 在量子离子声波的情况下[6],对于线性的、弱非线性的和完全非线性波的纯量子起源的几个特性被得到. 完全非线性的量子离子声波可能有连贯的周期的模式,这是在古典的情况下没有的. 然而,可以通过进一步研究由量子离子声波和量子 Langmuir 波之间的非线性耦合[7],来研究完全非线性波的情况.

在古典的情况下,描述高频 Langmuir 波和低频离子声波之间的相互作用时产生的一系列耦合的非线性波方程,首先是由 Zakharov 提出来的[8]. Zakharov 方程(在标准化单位下)可以被写为

$$\mathrm{i}E_t + \Delta E - nE = 0, \tag{1}$$

$$n_{tt} - \Delta n - \Delta |E|^2 = 0, \tag{2}$$

其中, $E:\Omega \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{C}$ 是高频电场的包络, $n:\Omega \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ 是相对于平衡值所测量的离子密度. Zakharov 方程在等离子体波和类似于非线性 Schrödinger 方程的扰动理论中起着重要的作用. 由于它的重要性,Zakharov 方程引起了许多数学家和物理学家的注意,并且在理论上和数值分析上进行了广泛的研究. Zakharov 方程以及耗散 Zakharov 方程在一维情况下的解的存在唯一

* 收稿日期: 2011-05-09; 修订日期: 2012-02-02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11061003)
作者简介: 郭艳凤(1976—),女,河南新乡人,副教授,博士(联系人. Tel: +86-772-2687015-802; E-mail: guoyan_feng@yahoo.com.cn).

性和渐进性行为已经被研究[9-14]. 二维的古典 Zakahrov 方程的解的适定性和吸引子也被许多作者研究[15-17].

进一步, 如果研究量子离子声波和量子 Langmuir 波之间的非线性耦合情况,那么利用量子流体方法[7]可以得到带量子纠正的修正 Zakharov 方程,也就是量子 Zakharov 方程. 量子 Zakharov 方程具有下面形式:

$$iE_t + \Delta E - H^2\Delta^2 E - nE = 0, \tag{3}$$

$$n_{tt} - \Delta n + H^2\Delta^2 n - \Delta |E|^2 = 0, \tag{4}$$

其中, $H > 0$ 是量子参数,它表示等离子体能量和热电子能量之间的比率. 大值 H 的存在指出了在致密等离子体,尤其是在天体等离子体中,离子声波和 Langmuir 波之间耦合的作用下量子效应的实验结果. 最近几十年来,关于量子 Zakharov 方程几乎没有什么结果. 目前,对于量子 Zakharov 方程有一些重要的性质需要研究,例如,需要研究量子 Zakharov 方程量子孤立波解和量子空洞以及热化和复发的相关非线性分析之间的一致连贯性[7]. 因此,在数学上和物理上研究量子 Zakharov 方程都是有意义的.

为了得到更好的定性研究,我们需要包括量子 Zakharov 方程由于阻尼效应和能量损失效应失去的力,这样我们就得到了耗散的量子 Zakharov 方程. 本文的主要目的是研究耦合的非线性耗散的 Zakharov 方程:

$$iE_t + \Delta E - H^2\Delta^2 E - nE + i\gamma E = 0, \tag{5}$$

$$n_{tt} + \alpha n_t - \Delta n + H^2\Delta^2 n - \Delta |E|^2 = 0, \tag{6}$$

其中, $\alpha > 0, \gamma > 0, H > 0$. 众所周知,当 $H = 0$ 时,耗散的 Zakharov 方程的渐进性行为在一维情况下,被 Flahaut[9], Goubet 和 Moise[12] 研究过;在二维的情况下,被 Chueshov 和 Shcherbina[17]研究过. 然而,由于本文考虑的是在量子效应下的量子 Zakharov 方程(5)和(6). 因此,我们可以得到它在 1 ~ 3 维数情况下的渐进性行为. 更精确地讲,在 1 ~ 3 维的情况下,利用一些估计技巧和选择合适的函数空间,我们可以得到带量子纠正项的系统(5)和(6)的解的存在唯一性和渐进性行为. 解的存在唯一性是在先验估计的基础上通过标准的 Galerkin 逼近得到的. 同时,解的渐进性行为被研究,并且构造出了解系统在空间 V_1 和 V_2 中的带弱拓扑的最大吸引子,其中空间 V_1 和 V_2 是第 1 节中定义的空间.

本文结构如下:第 1 节,给出了预备知识;第 2 节,给出了隐含有界吸收集的存在性的关于时间一致的先验估计;第 3 节,利用标准的 Galerkin 逼近得到耗散系统的解的存在唯一性;第 4 节,讨论有界吸收集的 ω 极限集的最大吸引子的构造. 全文中字母 c, c' 和 $c_i (i = 1,2)$ 表示一般的正常数,它们可能在每一项中代表不同的值.

1　预备知识

首先在 $\mathbb{R}^d (d = 1,2,3)$ 空间中定义有界集 $\Omega = [0, L]^d$. 在 Ω 上考虑下面耦合非线性耗散量子 Zakharov 方程:

$$iE_t + \Delta E - H^2\Delta^2 E - nE + i\gamma E = 0,$$

$$n_{tt} + \alpha n_t - \Delta n + H^2\Delta^2 n - \Delta |E|^2 = 0,$$

它满足周期边界条件

$$E(x + Le_j) = E(x),\ n(x + Le_j) = n(x), \qquad j = 1,2,3$$

和初始条件

$$n(x,0) = n_0(x),\ n_t(x,0) = n_1(x),\ E(x,0) = E_0(x), \qquad x \in \Omega,$$

并且假设

$$\int_{\Omega} E(x)\mathrm{d}x = 0,\ \int_{\Omega} n(x)\mathrm{d}x = 0,$$

这里，$\alpha > 0, \gamma > 0, H > 0$.

由 $(u,v) = \int_{\Omega} u(x)\,\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x$ 定义周期空间 $L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 上的内积，并且定义空间 $L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 上的范数为

$$\| u \| = \| u \|_{L^2_{\mathrm{per}}} = \left(\int_{\Omega} | u |^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

空间 $L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 上一般的 p- 范数定义为

$$\| u \|_{L^p} = \| u \|_{L^p_{\mathrm{per}}} = \left(\int_{\Omega} | u |^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

当 $k \in \mathbf{Z}^+$ 时，在周期空间 $H^k_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 上的范数定义为

$$\| u \|_k = \| u \|_{H^k_{\mathrm{per}}} = \left(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k} \| D^{\alpha} u \|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2},$$

在周期空间 $\dot{H}^k_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 上的范数定义为

$$\| u \|_{\dot{H}^k_{\mathrm{per}}} = \left(\sum_{|\alpha| = k} \| D^{\alpha} u \|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

我们的工作空间是满足零积分条件 $\int_{\Omega} u\mathrm{d}x = 0$ 的 L 周期空间，即空间 $\dot{L}^p_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 和 $\dot{H}^k_{\mathrm{per}}(\Omega)$. 零积分条件 $\int_{\Omega} u\mathrm{d}x = 0$ 允许我们应用 Poincaré 不等式 $\| u \| \leqslant \lambda_1^{-1/2} \| \nabla u \|$，其中 $\lambda_1 = 4\pi^2/L^2$. 我们知道只要零积分条件成立，空间 $\dot{H}^k_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 上的范数和空间 $H^k_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 的范数就是等价的. 另外，周期空间 $\dot{H}^{-k}_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 定义为空间 $\dot{H}^k_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 的对偶空间.

对于非线性波方程，我们设 $m = n_t + \varepsilon n$，其中 $\varepsilon > 0$ 足够小[18]，并在后面给出选择. 于是我们有 3 个未知变量满足下面的方程组：

$$\mathrm{i}E_t + \Delta E - H^2 \Delta^2 E - nE + \mathrm{i}\gamma E = 0, \tag{7}$$

$$m = n_t + \varepsilon n, \tag{8}$$

$$m_t + (\alpha - \varepsilon)m - \varepsilon(\alpha - \varepsilon)\,n - \Delta n + H^2 \Delta^2 n - \Delta |E|^2 = 0, \tag{9}$$

其中，$\alpha > 0, \gamma > 0, H > 0, \varepsilon > 0$. 相应的初始化条件为

$$m(x,0) = n_1(x) + \varepsilon n_0(x) = m_0(x),\ n(x,0) = n_0(x),\ E(x,0) = E_0(x).$$

对于系统(7)～(9)来讲，我们定义乘积空间 V_0, V_1 和 V_2 如下：

$$V_0 = \dot{H}^{-1}_{\mathrm{per}}(\Omega) \times \dot{H}^1_{\mathrm{per}}(\Omega) \times H^2_{\mathrm{per}}(\Omega),$$

$$V_1 = \dot{H}^1_{\mathrm{per}}(\Omega) \times \dot{H}^3_{\mathrm{per}}(\Omega) \times H^4_{\mathrm{per}}(\Omega),$$

$$V_2 = \dot{H}^3_{\mathrm{per}}(\Omega) \times \dot{H}^5_{\mathrm{per}}(\Omega) \times H^6_{\mathrm{per}}(\Omega),$$

其中，乘积空间 V_k 的前两个子空间是实空间，V_k 的第 3 个空间是复空间，$(k = 0,1,2)$. 我们给乘积空间 $V_k (k = 0, 1, 2)$ 赋予通常意义下的乘积空间的范数，它们有如下紧嵌入关系 $V_2 \subset V_1 \subset V_0$. 为方便起见，本文我们使用积分 $\int u\mathrm{d}x$ 表示积分 $\int_{\Omega} u\mathrm{d}x$. $\dot{L}^2_{\mathrm{per}}$ 和 $\dot{H}^k_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 可以分别被看作空间 $L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 和 $H^k_{\mathrm{per}}(\Omega)$，因为在零积分条件下空间 $\dot{H}^k_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 上的范数等价于空间 $H^k_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 上的范数.

下面我们给出在本文中要用到的一系列不等式. 由 Gagliardo-Nirenberg 不等式，我们可以

得到

$$\|u\|_{L^4} \leqslant c\|u\|_{L^2}^{1-d/4}\|u\|_{H^1}^{d/4}, \qquad u \in H^1(\Omega),\ d=1,2,3,$$

$$\|u\|_{L^4} \leqslant c\|u\|_{L^2}^{1-d/8}\|u\|_{H^2}^{d/8}, \qquad u \in H^2(\Omega),\ d=1,2,3,$$

$$\|u\|_{L^\infty} \leqslant c\|u\|_{L^2}^{1-d/4}\|u\|_{H^2}^{d/4}, \qquad u \in H^2(\Omega),\ d=1,2,3.$$

2 先验估计

2.1 在空间 $V_0=\dot{H}_{\mathrm{per}}^{-1}(\Omega)\times\dot{H}_{\mathrm{per}}^{1}(\Omega)\times H_{\mathrm{per}}^{2}(\Omega)$ 中的先验估计

性质 1 如果 $E_0 \in L_{\mathrm{per}}^2(\Omega)$，那么 $E \in L^\infty(\mathbf{R}^+;L_{\mathrm{per}}^2(\Omega))$.

证明 式(7)与 E 在 Ω 上取内积后取虚部可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|E\|^2+\gamma\|E\|^2=0.$$

于是我们有

$$\|E\|^2=\mathrm{e}^{-2\gamma t}\|E_0\|^2 \leqslant M_{00}, \tag{10}$$

其中 M_{00} 是独立于时间 t 的正常数. □

性质 2 如果 $(m_0,n_0,E_0) \in \dot{H}_{\mathrm{per}}^{-1}(\Omega)\times\dot{H}_{\mathrm{per}}^{1}(\Omega)\times H_{\mathrm{per}}^{2}(\Omega)$，那么 $(m,n,E) \in L^\infty(\mathbf{R}^+;\dot{H}_{\mathrm{per}}^{-1}(\Omega)\times\dot{H}_{\mathrm{per}}^{1}(\Omega)\times H_{\mathrm{per}}^{2}(\Omega))$.

证明 式(7)与 E 在 Ω 上取内积后取实部可得

$$\|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2-\mathrm{Re}\int \mathrm{i}E_t\bar{E}\mathrm{d}x+\int n|E|^2\mathrm{d}x=0. \tag{11}$$

式(7)与 E_t 在 Ω 上取内积后取实部可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2)-\mathrm{Re}\int \mathrm{i}\gamma E\bar{E}_t\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int n(|E|^2)_t\mathrm{d}x=0. \tag{12}$$

从式(11)$\times\gamma$+式(12)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2)+\gamma(\|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2)+$$
$$\frac{1}{2}\int n(|E|^2)_t\mathrm{d}x+\gamma\int n|E|^2\mathrm{d}x=0. \tag{13}$$

式(9)与 $(-\Delta)^{-1}m$ 在 Ω 上取内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|m\|_{-1}^2+(\alpha-\varepsilon)\|m\|_{-1}^2+$$
$$\int(mn-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)(-\Delta)^{-1}mn-H^2m\Delta n+m|E|^2)\mathrm{d}x=0.$$

注意到

$$\int mn\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|^2+\varepsilon\|n\|^2,\ -\int m\Delta n\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla n\|^2+\varepsilon\|\nabla n\|^2.$$

于是我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|m\|_{-1}^2+\|n\|^2+H^2\|\nabla n\|^2)+(\alpha-\varepsilon)\|m\|_{-1}^2-$$
$$\varepsilon(\alpha-\varepsilon)\int(-\Delta)^{-1}mn\mathrm{d}x+\varepsilon\|n\|^2+\varepsilon H^2\|\nabla n\|^2+$$
$$\int n_t|E|^2\mathrm{d}x+\varepsilon\int n|E|^2\mathrm{d}x=0. \tag{14}$$

选取 $\varepsilon \leqslant \min\{\alpha/4, 2\lambda_1/\alpha\}$,其中 λ_1 是 Laplace 算子 $-\Delta$ 的第一特征值,于是可以得到

$$(\alpha-\varepsilon)\|m\|_{-1}^2-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)\int(-\Delta)^{-1}mn\mathrm{d}x+\varepsilon\|n\|^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}(\|m\|_{-1}^2+\|n\|^2).$$

从式(14)可以导出

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|m\|_{-1}^2+\|n\|^2+H^2\|\nabla n\|^2)+\frac{\varepsilon}{2}(\|m\|_{-1}^2+\|n\|^2)+ \varepsilon H^2\|\nabla n\|^2+\int n_t|E|^2\mathrm{d}x+\varepsilon\int n|E|^2\mathrm{d}x \leqslant 0. \tag{15}$$

由式(13)×2+式(15)并取正常数 $\eta_0=\min\{\varepsilon/8,\gamma\}$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}(\|m\|_{-1}^2+\|n\|^2+H^2\|\nabla n\|^2)+\|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2+ \int n|E|^2\mathrm{d}x\right)+\frac{\varepsilon}{2}(\|m\|_{-1}^2+\|n\|^2+H^2\|\nabla n\|^2)+ 2\gamma(\|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2)+\eta_0\int n|E|^2\mathrm{d}x \leqslant -(2\gamma+\varepsilon-\eta_0)\int n|E|^2\mathrm{d}x. \tag{16}$$

此外,当 $d=1,2,3$ 时,有下面不等式:

$$-(2\gamma+\varepsilon-\eta_0)\int n|E|^2\mathrm{d}x \leqslant c\|n\|\|E\|_{L^4}^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\|n\|^2+c\|E\|_{L^4}^4 \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\|n\|^2+\gamma H^2\|\Delta E\|^2+c, \tag{17}$$

其中应用了 Hölder 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 不等式.

设

$$H_0(t)=\frac{1}{2}(\|m\|_{-1}^2+\|n\|^2+H^2\|\nabla n\|^2)+ \|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2+\int n|E|^2\mathrm{d}x.$$

取 $\alpha_0=\eta_0$, 把式(17)代入式(16)中可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_0(t)+\alpha_0 H_0(t) \leqslant \kappa_0, \tag{18}$$

其中 κ_0 是依赖于 $\|E_0\|$ 的正常数.

根据 Gronwall 引理,从式(18)可以得到

$$H_0(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha_0 t}H_0(0)+\frac{\kappa_0}{\alpha_0}(1-\mathrm{e}^{-\alpha_0 t}) \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha_0 t}H_0(0)+\frac{\kappa_0}{\alpha_0} \leqslant M_0, \tag{19}$$

其中 M_0 是不依赖于时间的正常数.

然而,我们需要估计在 V_1 中的范数. 注意到当 $d=1,2,3$ 时,有

$$\int n|E|^2\mathrm{d}x \leqslant \|n\|\|E\|_{L^4}^2 \leqslant \frac{1}{4}\|n\|^2+\frac{H^2}{2}\|\Delta E\|^2+c,$$

于是可得

$$H_0(t) \geqslant \frac{1}{4}(\|m\|_{-1}^2+\|n\|^2+H^2\|\nabla n\|^2)+$$

$$\frac{1}{2}\left(\|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2\right)-c.$$

根据式(19)可得

$$\|m\|_{-1}^2+\|n\|^2+H^2\|\nabla n\|^2+\|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2\leqslant$$
$$4H_0(t)+c\leqslant 4M_0+c=N_0,$$

其中 N_0 是不依赖于时间的正常数. 于是可知

$$(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;\dot H_{\mathrm{per}}^{-1}(\Omega)\times\dot H_{\mathrm{per}}^1(\Omega)\times H_{\mathrm{per}}^2(\Omega)).\qquad\square$$

2.2 在空间 $V_1=\dot H_{\mathrm{per}}^1(\Omega)\times\dot H_{\mathrm{per}}^3(\Omega)\times H_{\mathrm{per}}^4(\Omega)$, $V_2=\dot H_{\mathrm{per}}^3(\Omega)\times\dot H_{\mathrm{per}}^5(\Omega)\times H_{\mathrm{per}}^6(\Omega)$ 中的先验估计

利用类似于性质 1 和性质 2 中的估计技巧,我们可以得到下面的分别在空间 V_1 和 V_2 中的性质 3 和性质 4. 因此我们只给出证明的概要.

性质 3　如果 $(m_0,n_0,E_0)\in\dot H_{\mathrm{per}}^1(\Omega)\times\dot H_{\mathrm{per}}^3(\Omega)\times H_{\mathrm{per}}^4(\Omega)$, 那么 $(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;\dot H_{\mathrm{per}}^1(\Omega)\times\dot H_{\mathrm{per}}^3(\Omega)\times H_{\mathrm{per}}^4(\Omega))$.

证明　式(9)与 m 在 Ω 上取内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|m\|^2+(\alpha-\varepsilon)\|m\|^2-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)\int mn\mathrm{d}x-$$
$$\int m\Delta n\mathrm{d}x+H^2\int m\Delta^2n\mathrm{d}x-\int m\Delta|E|^2\mathrm{d}x=0.$$

注意到

$$-\int m\Delta n\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla n\|^2+\varepsilon\|\nabla n\|^2,$$

$$H^2\int m\Delta^2n\mathrm{d}x=\frac{H^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta n\|^2+\varepsilon H^2\|\Delta n\|^2,$$

有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|m\|^2+\|\nabla n\|^2+H^2\|\Delta n\|^2\right)+(\alpha-\varepsilon)\|m\|^2-$$
$$\varepsilon(\alpha-\varepsilon)\int mn\mathrm{d}x+\varepsilon\|\nabla n\|^2+\varepsilon H^2\|\Delta n\|^2-\int m\Delta|E|^2\mathrm{d}x=0.\tag{20}$$

与前面类似,取 $\varepsilon\leqslant\min\{\alpha/4,2\lambda_1/\alpha\}$ 可得

$$(\alpha-\varepsilon)\|m\|^2-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)\int mn\mathrm{d}x+\varepsilon\|\nabla n\|^2\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\left(\|m\|^2+\|\nabla n\|^2\right).$$

从式(20)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|m\|^2+\|\nabla n\|^2+H^2\|\Delta n\|^2\right)+$$
$$\frac{\varepsilon}{2}\left(\|m\|^2+\|\nabla n\|^2+H^2\|\Delta n\|^2\right)\leqslant\int m\Delta|E|^2\mathrm{d}x.\tag{21}$$

此外还有

$$\int m\Delta|E|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon}{8}\|m\|^2+c.$$

类似于前面的估计可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla m\|^2+\|\Delta n\|^2+H^2\|\nabla\Delta n\|^2\right)+$$

$$\frac{\varepsilon}{2}(\|\nabla m\|^2+\|\Delta n\|^2+H^2\|\nabla\Delta n\|^2)\leqslant -\int\Delta m\,\Delta|E|^2\mathrm{d}x. \tag{22}$$

进一步,我们注意到

$$-\int\Delta m\,\Delta|E|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon}{8}\|\nabla m\|^2+\frac{\gamma H^2}{16}\|\Delta^2E\|^2+c.$$

另一方面,式(7)与 Δ^2E_t 在 Ω 上取内积后取实部,利用式(7)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla\Delta E\|^2+H^2\|\Delta^2E\|^2)+\gamma(\|\nabla\Delta E\|^2+H^2\|\Delta^2E\|^2)=$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\int nE\Delta^2\bar{E}\mathrm{d}x-\gamma\mathrm{Re}\int nE\Delta^2\bar{E}\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int(nE)_t\Delta^2\bar{E}\mathrm{d}x.$$

于是取 $\eta_1=\min\{\varepsilon/2,\gamma/2\}$ 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\Delta E\|^2+H^2\|\Delta^2E\|^2+2\mathrm{Re}\int nE\Delta^2\bar{E}\,\mathrm{d}x\right)+$$

$$\frac{\gamma}{2}(\|\nabla\Delta E\|^2+H^2\|\Delta^2E\|^2)+\eta_1\mathrm{Re}\int nE\Delta^2\bar{E}\,\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\mathrm{Re}\int(nE)_t\Delta^2\bar{E}\mathrm{d}x+(\eta_1-\gamma)\mathrm{Re}\int nE\Delta^2\bar{E}\,\mathrm{d}x. \tag{23}$$

我们利用插值不等式及 Young 不等式和 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式,分别对上式右端的每一项进行估计.接着把式(21)~(23)相加,并且设

$$H_1(t)=\frac{1}{2}(\|m\|^2+\|\nabla m\|^2+\|\nabla n\|^2+(H^2+1)\|\Delta n\|^2+$$

$$H^2\|\nabla\Delta n\|^2)+\frac{1}{2}(\|\nabla\Delta E\|^2+H^2\|\Delta^2E\|^2)+\mathrm{Re}\int nE\Delta^2\bar{E}\mathrm{d}x,$$

只要 $\alpha_1=\eta_1$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(t)+\alpha_1H_1(t)\leqslant\kappa_1,$$

其中 κ_1 是不依赖于时间的正常数.于是根据 Gronwall 引理可得

$$H_1(t)\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha_1t}H_1(0)+\frac{\kappa_1}{\alpha_1}(1-\mathrm{e}^{-\alpha_1t})\leqslant M_1, \tag{24}$$

其中 M_1 是独立于时间的正常数.

然而,我们需要估计在空间 V_1 中的范数.注意到

$$\mathrm{Re}\int nE\Delta^2\bar{E}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{H^2}{4}\|\Delta^2E\|^2+c,$$

从 $H_1(t)$ 和式(24)可得

$$\|m\|^2+\|\nabla m\|^2+\|\nabla n\|^2+(H^2+1)\|\Delta n\|^2+$$

$$H^2\|\nabla\Delta n\|^2+\|\nabla\Delta E\|^2+H^2\|\Delta^2E\|^2\leqslant N_1,$$

其中 N_1 是独立时间的正常数.于是我们可以得到

$$(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;\dot{H}^1_{\mathrm{per}}(\Omega)\times\dot{H}^3_{\mathrm{per}}(\Omega)\times H^4_{\mathrm{per}}(\Omega)).$$

证明完成. □

现在我们给出性质 4 的证明概要.

性质 4 如果 $(m_0,n_0,E_0)\in\dot{H}^3_{\mathrm{per}}(\Omega)\times\dot{H}^5_{\mathrm{per}}(\Omega)\times H^6_{\mathrm{per}}(\Omega)$,那么 $(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;\dot{H}^3_{\mathrm{per}}(\Omega)\times\dot{H}^5_{\mathrm{per}}(\Omega)\times H^6_{\mathrm{per}}(\Omega))$.

证明　式(9)与 $\Delta^2 m$ 在 Ω 上取内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\Delta m\|^2+\|\nabla\Delta n\|^2+H^2\|\Delta^2 n\|^2)+$$

$$\frac{\varepsilon}{2}(\|\Delta m\|^2+\|\nabla\Delta n\|^2+H^2\|\Delta^2 n\|^2)\leqslant\int\Delta^2 m\Delta|E|^2\mathrm{d}x. \tag{25}$$

式(9)与 $\Delta^3 m$ 在 Ω 上取内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla\Delta m\|^2+\|\Delta^2 n\|^2+H^2\|\nabla\Delta^2 n\|^2)+$$

$$\frac{\varepsilon}{2}(\|\nabla\Delta m\|^2+\|\Delta^2 n\|^2+H^2\|\nabla\Delta^2 n\|^2)\leqslant-\int\Delta^3 m\Delta|E|^2\mathrm{d}x. \tag{26}$$

另一方面,式(7)与 $\Delta^4 E_t$ 在 Ω 上取内积后取实部可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\Delta^2 E\|^2+H^2\|\Delta^3 E\|^2+2\mathrm{Re}\int nE\Delta^4\bar{E}\,\mathrm{d}x\right)+$$

$$\frac{\gamma}{2}(\|\nabla\Delta^2 E\|^2+H^2\|\Delta^3 E\|^2)+2\mathrm{Re}\int nE\Delta^4\bar{E}\,\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\mathrm{Re}\int(nE)_t\Delta^4\bar{E}\mathrm{d}x.$$

取 $\eta_2=\min\{\varepsilon/2,\gamma/4\}$, 从上面的不等式可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\Delta^2 E\|^2+H^2\|\Delta^3 E\|^2+2\mathrm{Re}\int nE\Delta^4\bar{E}\,\mathrm{d}x\right)+$$

$$\frac{\gamma}{2}(\|\nabla\Delta^2 E\|^2+H^2\|\Delta^3 E\|^2)+\eta_2\mathrm{Re}\int nE\Delta^4\bar{E}\,\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\mathrm{Re}\int(nE)_t\Delta^4\bar{E}\mathrm{d}x+(\eta_2-\gamma)\mathrm{Re}\int nE\Delta^4\bar{E}\,\mathrm{d}x. \tag{27}$$

现在我们设

$$H_2(t)=\|\Delta m\|^2+\|\nabla\Delta m\|^2+\|\nabla\Delta n\|^2+(H^2+1)\|\Delta^2 n\|^2+$$

$$H^2\|\nabla\Delta^2 n\|^2+\|\nabla\Delta^2 E\|^2+H^2\|\Delta^3 E\|^2+2\mathrm{Re}\int nE\Delta^4\bar{E}\,\mathrm{d}x.$$

取适当足够小的正数 $\alpha_2=\eta_2$, 类似于前面利用 Young 不等式和 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式,从式(25)~(27)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(t)+\alpha_2 H_2(t)\leqslant\kappa_2,$$

其中 κ_2 是独立于时间却依赖于初值的正常数. 根据 Gronwall 引理可得

$$H_2(t)\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha_2 t}H_2(0)+\frac{\kappa_2}{\alpha_2}(1-\mathrm{e}^{-\alpha_2 t})\leqslant M_2, \tag{28}$$

其中 M_2 是独立于时间却依赖于初值的正常数. 然而,我们需要估计空间 V_2 中的范数. 注意到

$$2\mathrm{Re}\int nE\Delta^4\bar{E}\,\mathrm{d}x=2\mathrm{Re}\int(E\Delta n+n\Delta E+2\nabla n\nabla E)\Delta^3\bar{E}\leqslant$$

$$\frac{H^2}{2}\|\Delta^3 E\|^2+c. \tag{29}$$

从 $H_2(t)$ 和式(29)可得

$$\|\Delta m\|^2+\|\nabla\Delta m\|^2+\|\nabla\Delta n\|^2+(H^2+1)\|\Delta^2 n\|^2+$$

$$H^2\|\nabla\Delta^2 n\|^2+\|\nabla\Delta^2 E\|^2+\frac{H^2}{2}\|\Delta^3 E\|^2\leqslant H_2(t)+c\leqslant N_2, \tag{30}$$

其中 N_2 是独立于时间却依赖于初值的正常数. 于是可知 $(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;\dot{H}^3_{per}(\Omega)\times\dot{H}^5_{per}(\Omega)\times H^6_{per}(\Omega))$. 证明完毕. □

3 解的存在唯一性

我们将应用标准的 Galerkin 逼近方法来证明量子 Zakharov 方程解的存在唯一性.

3.1 Galerkin 逼近

设 $\{w_j(x)\}$ 是 Laplace 算子的特征值对应的特征向量构成的一组正交基. 我们知道 $\{w_j(x)\}$ 也是 Hilbert 空间 $L^2_{per}(\Omega)$ 的一组基. 逼近解 (m^k,n^k,E^k) 定义为

$$m^k=\sum_{j=1}^{k}m_{jk}(t)w_j(x),\ n^k=\sum_{j=1}^{k}n_{jk}(t)w_j(x),\ E^k=\sum_{j=1}^{k}E_{jk}(t)w_j(x),$$

$$m^k(0)=P^km_0=m_0^k,\ n^k(0)=P^kn_0=n_0^k,\ E^k(0)=P^kE_0=E_0^k,$$

它是下面逼近问题的解:

$$\mathrm{i}E_t^k+\Delta E^k-H^2\Delta^2E^k-P^k(n^kE^k)+\mathrm{i}\gamma E^k=0,\tag{31}$$

$$m^k=n_t^k+\varepsilon n^k,\tag{32}$$

$$m_t^k+(\alpha-\varepsilon)m^k-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)n^k-\Delta n^k+H^2\Delta^2n^k-P^k\Delta|E^k|^2=0,\tag{33}$$

其中, P^k 是在前 k 个特征向量构成的空间上的投影算子,算子 P^k 可以和算子 Δ 互换. 于是我们知道系统(31) ~ (33) 在区间 $t\in[0,T_k]$ 有正则解. 因此,第 2 节中的先验估计对 (m^k,n^k,E^k) 都是成立的. 这就为解的存在唯一性和连续性提供了依据.

3.2 在空间 V_0 中弱解的存在性

定理 1 如果 $(m_0,n_0,E_0)\in V_0$,那么式(7) ~ (9) 有弱解 $(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V_0)$.

证明 根据性质 2,我们可以得到 (m^k,n^k,E^k) 属于 $L^\infty(\mathbf{R}^+;V_0)$ 中的一个有界集. 因此 $T^k=+\infty$,我们可以从中抽取一个序列仍然记为 (m^k,n^k,E^k).

从而知道它们分别在空间 $L^\infty(0,T;\dot{H}^{-1}_{per})$, $L^\infty(0,T;\dot{H}^1_{per})$ 和 $L^\infty(0,T;H^2_{per})$ 中弱星收敛且满足 $m^k\to m$, $n^k\to n$ 和 $E^k\to E$.

这些弱星收敛对于线性部分来说可以直接应用到极限上去,但对于非线性部分来讲,我们需要有强收敛才可以应用到极限上去. 为了得到强收敛,我们需要用文献[19]中的紧性结果. 由于 $E^k\in L^\infty(0,T;H^2_{per})$ 且 $n^k\in L^\infty(0,T;\dot{H}^1_{per})$,我们可得 $\Delta^2E^k\in L^\infty(0,T;\dot{H}^{-2}_{per})$ 和 $n^kE^k\in L^\infty(0,T;H^1_{per})$. 因此有

$$E_t^k=\mathrm{i}(\Delta E^k-H^2\Delta^2E^k-P^k(n^kE^k)+\mathrm{i}\gamma E^k)\in L^\infty(0,T;\dot{H}^{-2}_{per}).$$

注意到 $H^2_{per}\hookrightarrow L^2_{per}\hookrightarrow\dot{H}^{-2}_{per}$ 和 $H^2_{per}\hookrightarrow H^1_{per}\hookrightarrow\dot{H}^{-2}_{per}$,我们可以从 $\{E^k\}$ 中抽取序列 $\{E^{k_n}\}$,它被重新定义为 $\{E^k\}$,对任意 $T\geqslant 0$,有 $\{E^k\}$ 在空间 $L^2(0,T;H^1_{per})$ 中强收敛且满足 $E^k\to E$. 另外我们还可以得到 $E\in C(\mathbf{R}^+;H^1_{per})$, $m\in C(\mathbf{R}^+;\dot{H}^{-2}_{per})$, $n\in C(\mathbf{R}^+;L^2_{per})$.

现在,我们考虑每一项的极限情况. 固定 $M>0$ 和 $k\geqslant M$,式(31) ~ (33) 的 3 个方程分别与 $\phi^1(t)w^1(x)$, $\phi^2(t)w^2(x)$, $\phi^3(t)w^3(x)$ 作乘积,其中 $\phi^i(t)\in C^1[0,T]$, $\phi^i(T)=0$ 且 $w^i(x)\in\mathrm{span}(w_j)_{j=1}^M$. 那么我们分别在 $\mathbf{R}^+\times\mathbb{R}^d$ 上积分可得

$$(m^k,\phi^1w^1)=(n_t^k,\phi^1w^1)+\varepsilon(n^k,\phi^1w^1),\tag{34}$$

$$(m_t^k,\phi^2w^2)+(\alpha-\varepsilon)(m^k,\phi^2w^2)-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)(n^k,\phi^2w^2)-\Delta(n^k,\phi^2w^2)+H^2(\Delta^2n^k,\phi^2w^2)-(P^k\Delta|E^k|^2,\phi^2w^2)=0,\tag{35}$$

$$\mathrm{i}(E_t^k,\phi^3w^3)+(\Delta E^k,\phi^3w^3)-H^2(\Delta^2E^k,\phi^3w^3)-$$

$$(P^k(n^kE^k),\phi^3w^3)+\mathrm{i}(\gamma E^k,\phi^3w^3)=0. \tag{36}$$

对于式(34)~(36)中的线性部分,当 $k\to\infty$ 时,根据弱拓扑收敛可知极限存在.然而对于非线性部分来说,其收敛情况如下.因为 $n^k\to n$ 弱收敛,我们有

$$\int_0^\infty\int_\Omega(n^k-n)E\phi^3w^3\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to 0.$$

由于 $\|E^k-E\|_{L^2(0,T;L^2_{\mathrm{per}}(\Omega))}$ 强收敛,$\|n^k\phi^3w^3\|_{L^2(0,T;L^2_{\mathrm{per}}(\Omega))}$ 是有界的,根据

$$\int_0^\infty\int_\Omega n^k(E^k-E)\phi^3w^3\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\|E^k-E\|_{L^2(0,T;L^2_{\mathrm{per}}(\Omega))}\|n^k\phi^3w^3\|_{L^2(0,T;L^2_{\mathrm{per}}(\Omega))}\to 0,$$

我们可以得到非线性部分的收敛性

$$\begin{aligned}&(P^k(n^kE^k),\phi^3w^3)-(nE,\phi^3w^3)=\\&\quad(n^kE^k,P^k(\phi^3w^3))-(nE,\phi^3w^3)=(n^kE^k-nE,\phi^3w^3)=\\&\quad\int_0^\infty\int_\Omega n^k(E^k-E)\phi^3w^3\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^\infty\int_\Omega(n^k-n)E\phi^3w^3\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to 0.\end{aligned}$$

同样的讨论,我们可以得到其他非线性部分的收敛性.

因此,根据 E^k 和∇E^k 在空间 $L^2(0,T;L^2_{\mathrm{per}})$ 中的强收敛可得非线性项当 $k\to\infty$ 时的极限也存在.另一方面,$(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;\dot{H}^{-2}_{\mathrm{per}}\times L^2_{\mathrm{per}}\times H^1_{\mathrm{per}})$ 隐含了 $(m,n,E)\in C(\mathbf{R}^+;\dot{H}^{-2}_{\mathrm{per}}\times L^2_{\mathrm{per}}\times H^1_{\mathrm{per}})$,这就使初值条件 $m(x,0)=m_0(x)$,$n(x,0)=n_0(x)$,$E(x,0)=E_0(x)$ 有意义.证明完毕. □

定理 2　解 (m,n,E) 在空间 V_0 中存在一个有界吸收集 B_0.也就是说,对 V_0 中的每一个有界集 B 来说,对任意的 $(m_0,n_0,E_0)\in B$,存在 $t_0>0$,对所有 $t>t_0$ 都有 $(m,n,E)\in B_0$.

证明　假设

$$\|m_0\|^2_{-1}+\|n_0\|^2+\|\nabla n_0\|^2+\|E_0\|^2+\|\nabla E_0\|^2+\|\Delta E_0\|^2\leqslant R^2.$$

特别地有 $\|E_0\|^2\leqslant R^2/\lambda_1$.由式(10)可得

$$\|E\|^2=\exp(-2\gamma t)\|E_0\|^2\leqslant M_{00}.$$

显然对所有的 $\rho>0$,存在 $t_0'>0$,对任意 $t\geqslant t_0'$,我们有 $\|E(t)\|^2\leqslant\rho$.设 t_0' 给定,固定 ρ 使满足对任意 $t\geqslant t_0'$ 有 $\|E(t)\|^2\leqslant\rho$.

由式(19)可得

$$H_0(t)\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha_0(t-t_0')}H_0(t_0')+\frac{\kappa_0}{\alpha_0}(1-\mathrm{e}^{-\alpha_0(t-t_0')})\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha_0(t-t_0')}H_0(t_0')+\frac{\kappa_0}{\alpha_0},$$

其中 κ_0 是依赖于 $\|E_0\|$ 和 t_0' 的一个正常数.由

$$\|m\|^2_{-1}+\|n\|^2+H^2\|\nabla n\|^2+\|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2\leqslant 4H_0(t)+c,$$

可得

$$\|m\|^2_{-1}+\|n\|^2+H^2\|\nabla n\|^2+\|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2\leqslant 4\mathrm{e}^{-\alpha_0(t-t_0')}H_0(t_0')+\kappa_0',$$

其中 κ_0' 依赖于 t_0' 和初始条件.显然存在 $t_0(R)>0$ 满足对任意 $t\geqslant t_0(R)$ 有

$$\|m\|^2_{-1}+\|n\|^2+H^2\|\nabla n\|^2+\|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2\leqslant 2\kappa_0'.$$

于是可得对空间 V_0 中的任意有界的 (m_0,n_0,E_0),存在 $t_0>0$,对所有 $t>t_0$ 有 $(m,n,E)\in B_0$,其中 B_0 是空间 V_0 中以原点为中心 $\sqrt{2\kappa_0'}$ 为半径的圆域.证明完毕. □

3.3　在空间 V_1 中解的存在唯一性和连续性

定理 3　如果 $(m_0,n_0,E_0)\in V_1$,那么式(7)~(9)存在唯一解 $(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V_1)$ 且 $(m,n,E)\in C(\mathbf{R}^+,V_1)$.

证明 假设$(m_0,n_0,E_0)\in V_1$. 由性质 3 可知逼近解$(m^{k'},n^{k'},E^{k'})\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V_1)$. 通过求极限推出存在一个解$(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V_1)$. 于是存在性得到.

下面考虑连续性. 从最初的方程组可得

$$n_{tt}+H^2\Delta^2 n=\Delta n-\alpha n_t+\Delta|E|^2.$$

如果$(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V_1)$, 那么$\Delta|E|^2\in L^\infty(\mathbf{R}^+;H^2_{\text{per}})$. 所以$n_{tt}+H^2\Delta^2 n\in L^\infty(\mathbf{R}^+;\dot{H}^1_{\text{per}})$. 于是可得$n\in C(\mathbf{R}^+;\dot{H}^3_{\text{per}})$且$n_t\in C(\mathbf{R}^+;\dot{H}^1_{\text{per}})$. 此外由$E_t=-\mathrm{i}(H^2\Delta^2E-\mathrm{i}\gamma E-\Delta E+nE)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2_{\text{per}})$可得$E\in C(\mathbf{R}^+;H^4_{\text{per}})$.

接下来证明解在空间V_1中的唯一性. 假设有两个解(m_1,n_1,E_1)和(m_2,n_2,E_2). 设$m=m_1-m_2$, $n=n_1-n_2$, $E=E_1-E_2$. 于是有

$$\mathrm{i}E_t+\Delta E-H^2\Delta^2E-(n_1E_1-n_2E_2)+\mathrm{i}\gamma E=0, \tag{37}$$

$$m=n_t+\varepsilon n, \tag{38}$$

$$m_t+(\alpha-\varepsilon)m-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)n-\Delta n+H^2\Delta^2n-\Delta(|E_1|^2-|E_2|^2)=0. \tag{39}$$

式(37)与E作内积后取虚部可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|E\|^2=\mathrm{Im}\int(n_1E+nE_2)\bar{E}\mathrm{d}x+\int\gamma|E|^2\mathrm{d}x\leqslant c(\|n\|^2+\|E\|^2). \tag{40}$$

式(37)与ΔE作内积后取虚部可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla E\|^2&=-\mathrm{Im}\int(n_1E+nE_2)\Delta\bar{E}\mathrm{d}x=\\&\mathrm{Im}\int(E\nabla n_1+E_2\nabla n+n\nabla E_2)\nabla\bar{E}\mathrm{d}x\leqslant\\&c(\|E\|^2+\|\nabla E\|^2+\|n\|^2+\|\nabla n\|^2).\end{aligned} \tag{41}$$

式(37)与Δ^2E作内积后取虚部可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta E\|^2\leqslant\\&C(\|E\|^2+\|\nabla E\|^2+\|\Delta E\|^2+\|n\|^2+\|\nabla n\|^2+\|\Delta n\|^2).\end{aligned} \tag{42}$$

式(37)对t求导可得

$$\mathrm{i}E_{tt}+\Delta E_t-H^2\Delta^2E_t-(n_1E_1-n_2E_2)_t+\mathrm{i}\gamma E_t=0. \tag{43}$$

式(43)与E_t作内积后取虚部可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|E_t\|^2&=\mathrm{Im}\int((n_1E)_t+(nE_2)_t)\bar{E}_t\mathrm{d}x=\\&\mathrm{Im}\int(n_{1t}E_t+n_tE_2+nE_{2t})\bar{E}_t\mathrm{d}x\leqslant\\&c(\|E\|^2+\|\Delta E\|^2+\|E_t\|^2+\|n_t\|^2+\|n\|^2+\|\Delta n\|^2).\end{aligned} \tag{44}$$

式(39)与$(-\Delta)^{-1}m$作内积, 取足够小的$\varepsilon>0$可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|m\|^2_{-1}+\|n\|^2+H^2\|\nabla n\|^2)\leqslant\\&c(\|m\|^2_{-1}+\|n\|^2+H^2\|\nabla n\|^2+\|E\|^2+\|\nabla E\|^2+\|\Delta E\|^2).\end{aligned} \tag{45}$$

同样, 式(39)与m作内积可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|m\|^2+\|\nabla n\|^2+H^2\|\Delta n\|^2)\leqslant\\&c(\|m\|^2+\|\nabla n\|^2+H^2\|\Delta n\|^2+\|E\|^2+\|\nabla E\|^2+\|\Delta E\|^2).\end{aligned} \tag{46}$$

把式(40)~(46)相加可导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|m\|_{-1}^2+\|m\|^2+\|n\|^2+(H^2+1)\|\nabla n\|^2+H^2\|\Delta n\|^2+\|E\|^2+\|\nabla E\|^2+H^2\|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2+\|E_t\|^2)\leqslant c(\|m\|_{-1}^2+\|m\|^2+\|n\|^2+(H^2+1)\|\nabla n\|^2+H^2\|\Delta n\|^2+\|E\|^2+\|\nabla E\|^2+H^2\|\nabla E\|^2+H^2\|\Delta E\|^2+\|E_t\|^2). \tag{47}$$

于是由式(47)可得解的唯一性. □

定理 4　(m,n,E) 在空间 V_1 中存在一个有界吸收集 B_1. 也就是说,对于空间 V_1 中的每一个有界集 B' 来说,对任意 $(m_0,n_0,E_0)\in B'$,存在 $t_1>0$,对任意 $t>t_1$ 都有 $(m,n,E)\in B_1$.

证明　事实上,如果 $(m_0,n_0,E_0)\in B'$ 是空间 V_1 中的一个有界集,那么根据定理 2,存在一个 $t_0>0$,对任意 $t\geqslant t_0$,有 $(m(t),n(t),E(t))$ 属于空间 V_0 中的有界集 B_0. 由性质 3 容易导出存在 $t_1(R)\geqslant t_0>0$ 满足

$$\|m(t)\|^2+\|\nabla n(t)\|^2+H^2\|\Delta n(t)\|^2+\|\nabla\Delta E(t)\|^2+H^2\|\Delta^2 E\|^2\leqslant 2\kappa_1'.$$

于是对 (m,n,E) 来说,在空间 V_1 中存在一个不依赖于初值的有界吸收集 B_1. 证明完毕. □

3.4　在空间 V_2 中的解的存在唯一性和连续性

和第 3.3 节中一样的讨论,由性质 4,我们容易证明下面的结论. 证明省略.

定理 5　如果 $(m_0,n_0,E_0)\in V_2$,那么式(7)~(9)存在唯一解 $(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V_2)$ 且 $(m,n,E)\in C(\mathbf{R}^+,V_2)$.

定理 6　在空间 V_2 中 (m,n,E) 存在一个有界吸收集 B_2. 即对空间 V_2 中的每一个有界集 B'' 来说,对所有 $(m_0,n_0,E_0)\in B''$,存在 $t_2>0$,对任意 $t>t_2$ 都有 $(m,n,E)\in B_2$.

4　最大吸引子的构造

下面我们考虑系统(7)~(9). 根据定理 3 和定理 5 可知,如果 $(m_0,n_0,E_0)\in V_1$(或 $(m_0,n_0,E_0)\in V_2$),那么此系统有唯一解 $(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V_1)$(或 $(m,n,E)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V_2)$)且 $(m,n,E)\in C(\mathbf{R}^+,V_1)$(或 $(m,n,E)\in C(\mathbf{R}^+,V_2)$). 对任意 $t\geqslant 0$,设 $S(t)(m_0,n_0,E_0)=(m,n,E)$. 由于考虑的系统式自治的. 因此, $\{S(t)\}_{t\in\mathbf{R}^+}$ 形成了解半群.

性质 5　$S(t)$ 在空间 V_2 是弱连续的.

证明　考虑到序列 (m^k,n^k,E^k) 在空间 V_2 中弱收敛到 (m,n,E). 因此,可以知道 (m^k,n^k,E^k) 在空间 V_2 中是有界的. 由 V_2 紧嵌入到 V_1 可知 (m^k,n^k,E^k) 在空间 V_1 中强收敛到 (m,n,E). 然而 $S(t)$ 根据 V_1 范数连续. 因此,可知 $S(t)(m^k,n^k,E^k)$ 在空间 V_1 中强收敛到 $S(t)(m,n,E)$.

另一方面, $S(t)(m^k,n^k,E^k)$ 在空间 V_2 中也是有界的. 因此,我们可以在空间 V_2 中抽取一个序列仍记为 $S(t)(m^k,n^k,E^k)$,它弱收敛到 (m_1,n_1,E_1),然而这个序列在空间 V_1 中强收敛到 (m_1,n_1,E_1). 因此有 $(m_1,n_1,E_1)=S(t)(m,n,E)$.

根据极限的唯一性可知,此序列在空间 V_2 中弱收敛到 $S(t)(m,n,E)$. 证明完毕. □

下面我们考虑此系统的弱吸引子. 首先我们定义弱拓扑意义下的 ω-极限集. 从第 3 节可知, $S(t)$ 在空间 V_2 中存在一个有界吸收集 B_2. 因此,设 $\omega(B_2)=\cap_{s\geqslant 0}\overline{\cup_{t\geqslant s}S(t)B_2}$,其中闭包是关于空间 V_2 中的弱拓扑的闭包. 由文献[19]可知,此 ω 极限集满足下面的性质.

性质 6 对任意 $t \in \mathbf{R}^+$，下列关系成立：

$$\omega(B_2) \subset B_2,\ S(t)\omega(B_2) = \omega(B_2). \tag{48}$$

定理 7 集合 $Q = \omega(B_2)$ 满足下列性质：

(i) $S(t)Q = Q,\ \forall t \in \mathbf{R}^+$；

(ii) 对空间 V_2 中的每个有界集 B 来讲，$\lim_{t\to+\infty} d_w(S(t)B, Q) = 0$，其中 d_w 是空间 V_2 中赋予的弱拓扑距离；

(iii) Q 是满足前面的性质(i)和(ii)的最大集合；

(iv) Q 关于空间 V_2 中的弱拓扑是连通的；

(v) Q 关于 V_1 范数是紧的，在空间 V_2 中的每一个有界集 B，有集合 $S(t)B$ 关于 V_1 范数收敛到 Q.

证明 由性质 6，我们可知(i)成立. 我们通过紧性来证明(ii). 假设(ii)不成立. 那么在空间 V_2 中存在一个有界集 B，一个实数 $\delta > 0$ 和序列 $\{t_n\}$，满足当 $t_n \to +\infty$ 时，$d_w(S(t_n)B, Q) \geqslant \delta > 0$. 另一方面，由于 B_2 是一个有界吸收集，于是如果 n 足够大，则当 $t_n \geqslant t_2$ 时有 $\{S(t_n)b_n\}$ 属于 B_2. 因此我们可以抽取序列 n_k 使得 $\{S(t_{n_k})b_{n_k}\}$ 在 V_2 中弱收敛. 于是有

$$\beta = \lim_{k\to+\infty} S(t_{n_k})b_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} S(t_{n_k} - t_2)S(t_2)b_{n_k}.$$

因为 $S(t_2)b_{n_k} \in B_2$，根据 $\omega(B_2)$ 的定义，显然有 $\beta \in \omega(B_2) = Q$. 这就产生了矛盾. 因此(ii)成立. 根据文献[19]可知(iii)和(iv)也成立. 由于 V_2 到 V_1 的嵌入是紧的，因此(v)成立. 证明完毕. □

于是，我们得到了耗散的量子 Zakharov 方程的解在空间 V_1 和 V_2 中的存在唯一性，以及在能量空间 V_1 和 V_2 中弱拓扑的全局吸引子的存在性.

致谢 作者感谢编辑和审稿人对本文的仔细阅读和提供的有价值的建议.

参考文献(References)：

[1] Markowich P A, Ringhofer C A, Schmeiser C. *Semiconductor Equations*[M]. Vienna: Springer, 1990.

[2] Jung Y D. Quantum-mechanical effects on electron-electron scattering in dense high-temperature plasmas[J]. *Phys Plasmas*, 2001, **8**(8): 3842-3844.

[3] Kremp D, Bornath Th, Bonitz M, Schlanges M. Quantum kinetic theory of plasmas in strong laser fields[J]. *Phys Rev E*, 1999, **60**(4): 4725-4732.

[4] Manfredi G, Haas F. Self-consistent fluid model for a quantum electron gas[J]. *Phys Rev B*, 2001, **64**(7): 075316.

[5] Haas F, Garcia L G, Goedert J, Manfredi G. Quantum ion-acoustic waves[J]. *Phys Plasmas*, 2003, **10**(10): 3858-3866.

[6] López J L. Nonlinear Ginzburg-Landau-type approach to quantum dissipation[J]. *Phys Rev E*, 2004, **69**(2): 026110.

[7] Garcia L G, Haas F, de Oliveira L P L, Goedert J. Modified Zakharov equations for plasmas with a quautum correction[J]. *Phys Plasmas*, 2005, **12**(1): 012302-8.

[8] Zakharov V E. Collapse of Langmuir waves[J]. *Sov Phys JETP*, 1972, **35**: 908-914.

[9] Flahaut I. Attactors for the dissipative Zakharov system[J]. *Nonlinear Analysis*, *TMA*, 1991, **16**(7/8): 599-633.

[10] Guo B, Shen L. The global existence and uniqueness of classical solutions of periodic initial boundary problems of Zakharov equations[J]. *Acta Math Appl Sin*, 1982, **5**(2): 310-324.

[11] 郭柏灵. 某些多维的更广泛的 3AXAPOB 方程组的初边值问题[J]. 数学杂志, 1987, **7**(3): 267-275. (GUO Bo-ling. On the IBVP for some more extensive Zakharov equations[J]. *J Math*, 1987, **7**(3): 267-275. (in Chinese))

[12] Goubet O, Moise I. Attractors for dissipative Zakharov system[J]. *Nonlinear Analysis, TMA*, 1998, **31**(7): 823-847.

[13] Li Y. On the initial boundary value problems for two dimensional systems of Zakharov equations and of complex-Schrödinger-real-Boussinesq equations[J]. *J P Diff Eq*, 1992, **5**(2): 81-93.

[14] Bourgain J. On the Cauchy and invariant measure problem for the periodic Zakharov system [J]. *Duke Math J*, 1994, **76**(1): 175-202.

[15] Bourgain J, Colliander J. On wellposedness of the Zakharov system[J]. *Internat Math Res Notices*, 1996, **11**: 515-546.

[16] Bejenaru I, Herr S, Holmer J, Tataru D. On the 2D Zakharov system with L^2 Schrödinger data[J]. *Nonlinearity*, 2009, **22**(5): 1063-1089.

[17] Chueshov I D, Shcherbina A S. On 2D Zakharov system in a bounded domain[J]. *Diff Int Eq*, 2005, **18**(7): 781-812.

[18] Ghidaglia J M, Temam R. Attractors for damped nonlinear hyperbolic equations[J]. *J Math Pure Appl*, 1987, **66**(3): 273-319.

[19] Temam R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*[M]. New York: Springer-Verlag, 1988.

Asymptotic Behavior of the Solutions for Dissipative Quantum Zakharov Equations

GUO Yan-feng[1,2], GUO Bo-ling[2], LI Dong-long[1]

(1. *Department of Information and Computation of Science, Guangxi University of Technology, Guangxi Liuzhou* 545006, *P. R. China*;
2. *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing* 100088, *P. R. China*)

Abstract: The dissipative quantum Zakharov equations were mainly studied. The existence and uniqueness of the solutions for dissipative quantum Zakharov equations were proved by the standard Galerkin approximation method on the basis of a priori estimates. Meanwhile, the asymptotic behavior of solutions and the global attractor which was constructed in energy space equipped with weak topology were also investigated.

Key words: quantum Zakharov equations; absorbing set; global attractor