文章编号:1000-0887(2012)03-0366-13

弹性理论中上三角无穷维 Hamilton 算子根向量组的完备性*

王　华[1,2]，阿拉坦仓[1]，黄俊杰[2]

(1. 内蒙古大学 数学科学学院，呼和浩特 010021；
2. 内蒙古工业大学 理学院，呼和浩特 010051)

摘要： 考虑弹性力学中一类上三角无穷维 Hamilton 算子. 首先,给出此类 Hamilton 算子特征值的几何重数和代数指标,进而得到代数重数. 其次,根据 Hamilton 算子特征值的代数重数确定其特征(根)向量组完备的形式,得到此类 Hamilton 算子特征(根)向量组的完备性是由内部算子特征向量组决定. 最后,将所得结果应用到弹性力学问题中.

关 键 词： 上三角无穷维 Hamilton 算子； 特征向量； 根向量； 重数； 完备性

中图分类号： O175.3　　**文献标志码：** A

DOI：10.3879/j.issn.1000-0887.2012.03.010

引　　言

Hilbert-Schmidt 定理,即特征函数展开定理,是传统分离变量法的理论基础,在求解数学物理的自伴问题中起重要作用. 展开定理当中要求之一是算子的自伴性,但很多方程并不满足这一要求. 因此,传统分离变量法失效.

无穷维 Hamilton 算子是一类特殊的非自伴算子,但由于自身的结构特性导致其具有很多好的性质,如特征函数系的辛正交性. 1991 年,钟万勰院士提出了基于 Hamilton 系统的分离变量法[1-2],并将其应用到弹性力学等相关领域[3-5]. 此方法突破了对自伴性的限制,推广了 Hilbert-Schmidt 定理,并提出了很多有待解决的问题[6-10]. 但此方法的数学基础——特征向量组和根向量组的完备性还没有系统解决[11-14]. 此外,我们发现应该先讨论 Hamilton 算子特征值的几何重数和代数重数,这样才能确定出特征(根)向量组完备的形式. 另一方面,弹性理论中的很多问题都可以转化为上三角无穷维 Hamilton 形式(参见例子). 因此,本文考察了一类上三角无穷维 Hamilton 算子特征值的几何重数和代数重数,得到此类 Hamilton 算子特征(根)向量组的完备的充要条件. 最后,将所得结果应用到板弯曲问题和弹性地基上的板弯曲问题.

下面给出文中用到的一些概念.

* **收稿日期：** 2011-05-04；**修订日期：** 2011-12-22

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11061019;10962004;11101200;11026175);教育部"春晖计划"资助项目(Z2009-1-01010);内蒙古自治区自然科学基金资助项目(2010MS0110)

作者简介： 王华(1975—),女,内蒙古人,副教授,博士(E-mail：hjjwh@sina.com);
阿拉坦仓(1963—),男,内蒙古人,教授,博士,博士生导师(联系人. E-mail：alatanca@imu.edu.cn).

定义 1 设 Z 为 Hilbert 空间, $\boldsymbol{H}:\mathscr{D}(\boldsymbol{H}) \subseteq Z\times Z \to Z\times Z$,

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & -\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix} \tag{1}$$

是稠定闭算子. 若 $\boldsymbol{A}$ 是稠定闭线性算子, $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是自伴线性算子, 则称 $\boldsymbol{H}$ 为无穷维 Hamilton 算子, 简称 Hamilton 算子. 这里, T^* 表示算子 T 的伴随算子. 特别地, 当 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ 时, 称为上三角 Hamilton 算子.

定义 2 令 Z 是 Hilbert 空间, 函数$(\cdot,\cdot)$是乘积空间 $Z\times Z$ 上的内积. 称$(\cdot,\boldsymbol{J}\cdot)$是由内积$(\cdot,\cdot)$诱导的辛形式, 其中

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

I 是 Z 上的单位算子.

定义了辛形式的线性空间称为辛空间. 本文中辛空间 $Z\times Z$ 上的辛形式均指$(\cdot,\boldsymbol{J}\cdot)$.

本文考虑 $X\times X\times X\times X$(简记为 X^4) 中的上三角无穷维 Hamilton 算子:

$$\boldsymbol{H_B}=\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & P & B_1 & B_2 \\ Q & 0 & B_2^* & B_4 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -Q^* \\ 0 & 0 & -P^* & 0 \end{array}\right), \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix},\ -\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} 0 & -Q^* \\ -P^* & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^* & B_4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

P,Q,B_1,B_2,B_4 均为稠定线性算子, 且 $B_1=B_1^*,B_4=B_4^*,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^*$.

文中 $\mathbf{R}$ 表示实数集, $\mathrm{i}\mathbf{R}=\{\mathrm{i}b\mid ,b\in\mathbf{R}\}$. $E(\lambda;T)$ 表示算子 T 的特征值 λ 所对应的所有特征向量的集合. 使 $N(T-\lambda)^k=N(T-\lambda)^{k+1}$ 成立的最小的非负整数 k 称为 λ 的代数指标, 其中

$$N(T-\lambda)^k=\{x\in\mathscr{D}(T^k)\mid (T-\lambda I)^k x=0\},\qquad \lambda\in\mathbf{C}.$$

引理 1[9] 上三角无穷维 Hamilton 算子 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$ 的点谱为

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{H})=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{A})\cup\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}^1(-\boldsymbol{A}^*),$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}^1(-\boldsymbol{A}^*)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid \lambda\in\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(-\boldsymbol{A}^*),\mathscr{R}(B_\lambda)\cap\mathscr{R}(\lambda I-\boldsymbol{A})\neq\varnothing\},$$

$$\boldsymbol{B}_\lambda=\boldsymbol{B}|_{(\mathscr{N}(\lambda I+\boldsymbol{A}^*)\cap\mathscr{D}(\boldsymbol{B}))\setminus\{0\}}.$$

定理 1 对于无穷维 Hamilton 算子 $\boldsymbol{H_B}$, 令算子 PQ 和 P^*Q^* 具有可数多非零简单特征值, 设为 $\{\nu_k\mid k\in\Lambda\}$ 和 $\{\mu_k\mid k\in\Lambda\}$, $0\notin\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(QP)\cup\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(Q^*P^*)$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(PQ)=\overline{\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(P^*Q^*)}$, 且 $PB_2^*Q^*e_k=\mu_kB_2e_k(k=1,2,\cdots)$. 假设$(Qf_k,e_k)\neq 0$, 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(g,B_2^*Q^*e_k)}{\nu_k(f_k,Q^*e_k)}Qf_k-\frac{(g,Qf_k)}{\mu_k(Q^*e_k,f_k)}B_2^*Q^*e_k\qquad(\forall g\in X)$$

收敛, 其中, $\mu_k=\bar{\nu}_k$, $e_k\in E(\mu_k;P^*Q^*)$, $f_k\in E(\nu_k;PQ)$.

(i) 若 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}^1(-\boldsymbol{A}^*)=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(-\boldsymbol{A}^*)$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(PQ)\cap\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(P^*Q^*)=\varnothing$, 且$(x_k,Q^*e_j)=0(k\neq j)$, 则 Hamilton 算子 $\boldsymbol{H_B}$ 在辛空间 X^4 具有完备的特征向量组的充要条件为 PQ 和 P^*Q^* 的特征向量

组$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$和$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$都是空间 X 的 Schauder 基,其中 x_k 同式(4).

(ii) 若 $\sigma_p^1(-\boldsymbol{A}^*)=\varnothing,\mu_k\in\mathbf{R},\boldsymbol{H_B}$ 关于$(\lambda_k,\boldsymbol{U}_k)$有一阶根向量 $\boldsymbol{U}_k^1=(x_k^1\quad y_k^1\quad z_k^1\quad w_k^1)^{\mathrm{T}}$,且$(x_k^1,Q^*e_j)=0\ (k\neq j)$, 则 Hamilton 算子 $\boldsymbol{H_B}$ 在辛空间 X^4 具有完备的根向量组的充要条件为 PQ 和 P^*Q^* 的特征向量组$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$和$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$都是空间 X 的 Schauder 基,其中

$$\boldsymbol{U}_k\in E(\lambda_k;\boldsymbol{H_B}),\ \lambda_k=\sqrt{\boldsymbol{\nu}_k}.$$

1 定理 1 的证明

本节首先给出一些基本结论,然后给出本章主要结论的证明.

引理 2[13] 设 λ,μ 是无穷维 Hamilton 算子 $\boldsymbol{H}(1)$ 的两个特征值,相应的特征向量分别为 $\boldsymbol{u}^0=(x^0\quad y^0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}^0=(f^0\quad g^0)^{\mathrm{T}}$,并设 $\boldsymbol{u}^1=(x^1\quad y^1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}^1=(f^1\quad g^1)^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{H}$ 关于$(\lambda,\boldsymbol{u}^0)$, $(\mu,\boldsymbol{v}^0)$ 的一阶根向量. 若 $\lambda+\bar{\mu}\neq 0$, 则

$$(\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{Jv}^0)=\mathbf{0},\ (\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{Jv}^1)=\mathbf{0},\ (\boldsymbol{u}^1,\boldsymbol{Jv}^1)=\mathbf{0}.$$

引理 3 在定理 1(i)的条件下,有如下结论:

(i) $\sigma_p(\boldsymbol{H_B})=\{\lambda_{\pm k},\overline{\lambda_{\pm k}}\mid k=1,2,\cdots\}$,

$$\boldsymbol{U}_k=\begin{pmatrix}f_k & \dfrac{Qf_k}{\lambda_k} & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{U}_{-k}=\begin{pmatrix}-f_k & \dfrac{Qf_k}{\lambda_k} & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

是 Hamilton 算子 $\boldsymbol{H_B}$ 分别关于 λ_k 和 λ_{-k} 的特征向量,其中 $\lambda_k=\sqrt{\boldsymbol{\nu}_k}$,$\lambda_{-k}=-\lambda_k$, $f_{-k}=-f_k$.

(ii) 若 $\boldsymbol{V}_k=(x_k\quad y_k\quad z_k\quad w_k)^{\mathrm{T}}\in E(\overline{\lambda_k};\boldsymbol{H_B})$, 则

$$y_k=\frac{Qx_k+B_4e_k}{\overline{\lambda_k}}-\frac{B_2^*Q^*e_k}{\overline{\lambda_k}^2},\ z_k=-\frac{Q^*e_k}{\overline{\lambda_k}},\ w_k=e_k,$$

即

$$\boldsymbol{V}_k=\begin{pmatrix}x_k & \dfrac{Qx_k+B_4e_k}{\overline{\lambda_k}}-\dfrac{B_2^*Q^*e_k}{\overline{\lambda_k}^2} & -\dfrac{Q^*e_k}{\overline{\lambda_k}} & e_k\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

此外

$$\boldsymbol{V}_{-k}=\begin{pmatrix}-x_k & \dfrac{Qx_k+B_4e_k}{\overline{\lambda_k}}+\dfrac{B_2^*Q^*e_k}{\overline{\lambda_k}^2} & -\dfrac{Q^*e_k}{\overline{\lambda_k}} & -e_k\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\in E(\overline{\lambda_{-k}};\boldsymbol{H_B}), \tag{5}$$

其中 $x_{-k}=-x_k$, $e_{-k}=-e_k$.

(iii) $\boldsymbol{H_B}$ 的每个特征值的几何重数,代数指标和代数重数均是 1.

证明 (i) 条件 $0\notin\sigma_p(PQ)\cup\sigma_p(QP)\cup\sigma_p(P^*Q^*)\cup\sigma_p(Q^*P^*)$ 表明 $0\notin\sigma_p(\boldsymbol{A})$, 且 $0\notin\sigma_p(\boldsymbol{A}^*)$. 由于 PQ 具有可数多特征值,根据文献[14]引理 1(ii),次对角算子 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & P\\ Q & 0\end{pmatrix}$ 也具有可数多非零特征值 $\{\lambda_k,\lambda_{-k}\mid k=1,2,\cdots\}$,其中 $\lambda_{-k}=-\lambda_k$,$\lambda_k=\sqrt{\boldsymbol{\nu}_k}$. 由 $\sigma_p(PQ)=\overline{\sigma_p(P^*Q^*)}$ 以及文献[14] 中引理 1, 有 $\sigma_p(-\boldsymbol{A}^*)=\overline{\sigma_p(A)}=\{\overline{\lambda_{\pm k}}\mid k=1,2,\cdots\}$. 又因为 $\sigma_p^1(-A^*)=\sigma_p(-\boldsymbol{A}^*)$, 这样,根据引理 1,Hamilton 算子 $\boldsymbol{H_B}$ 具有可数多非零特征值,且

$$\sigma_p(\boldsymbol{H_B})=\{\lambda_{\pm k},\overline{\lambda_{\pm k}}\mid k=1,2,\cdots\}.$$

由条件 $PQf_k=\nu_kf_k=\lambda_k^2f_k$,对于式(3) 中的 $\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{U}_{-k}$, 显然有

$$\boldsymbol{H_B}\boldsymbol{U}_{\pm k}=\lambda_{\pm k}\boldsymbol{U}_{\pm k},\qquad k=1,2,\cdots,$$

这表明 $\boldsymbol{U}_{\pm k}$ 是特征值 $\lambda_{\pm k}$ 的特征向量,且 $f_{-k}=f_k$.

(ii) 若 $(x_k\quad y_k\quad z_k\quad w_k)^{\mathrm{T}}\in E(\overline{\lambda_k};\boldsymbol{H_B})(k=1,2,\cdots)$, 即有

$$\begin{cases}Py_k+B_1z_k+B_2w_k=\overline{\lambda_k}x_k,\\ Qx_k+B_2^*z_k+B_4w_k=\overline{\lambda_k}y_k,\\ -Q^*w_k=\overline{\lambda_k}z_k,\\ -P^*z_k=\overline{\lambda_k}w_k.\end{cases}\tag{6}$$

注意到 $P^*Q^*e_k=\mu_ke_k=\overline{\lambda_k}^2e_k$,且 P^*Q^* 的每个特征值都是简单的. 于是,可取 $w_k=e_k$, 则

$$z_k=-\frac{Q^*e_k}{\overline{\lambda_k}},\ y_k=\frac{Qx_k+B_4e_k}{\overline{\lambda_k}}-\frac{B_2^*Q^*e_k}{\overline{\lambda_k}^2}.$$

因为 $PB_2^*Q^*e_k=\mu_kB_2e_k$ 且 $\overline{\lambda_{-k}}=-\overline{\lambda_k}$, 可以验证

$$\boldsymbol{H_B}\boldsymbol{V}_{-k}=\overline{\lambda_{-k}}\boldsymbol{V}_{-k},$$

即 $\boldsymbol{V}_{-k}$ 是 $\boldsymbol{H_B}$ 关于$\overline{\lambda_{-k}}$ 的特征向量,且 $x_{-k}=-x_k,e_{-k}=-e_k(k=1,2,\cdots)$.

(iii) λ_k 和 λ_{-k} 的几何重数均是1这个结论由 PQ 的特征值是简单的即可得到. 下面,假设$\overline{\lambda_k}$ 还存在另外一个特征向量$(\tilde{x}_k\quad \tilde{y}_k\quad z_k\quad w_k)^{\mathrm{T}}$,那么,根据 P^*Q^* 的特征向量是简单的,可得到

$$PQ(x_k-\tilde{x}_k)=\overline{\lambda_k}^2(x_k-\tilde{x}_k)=\nu_k(x_k-\tilde{x}_k).$$

由于 $\sigma_{\mathrm{p}}(PQ)\cap\sigma_{\mathrm{p}}(P^*Q^*)=\varnothing$,即 $\nu_k\notin\sigma_{\mathrm{p}}(PQ)$,于是 $x_k=\tilde{x}_k$,从而,$y_k=\tilde{y}_k$. 因此,$\overline{\lambda_k}$ 的几何重数是1. 同理可证$\overline{\lambda_{-k}}$ 的几何重数是1.

假设 λ_k 的代数指标不是1. 则 $N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)\subsetneqq N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)^2$. 这样,至少存在1个向量 $\boldsymbol{u}_k^1=(t_k^1\quad y_k^1\quad z_k^1\quad w_k^1)^{\mathrm{T}}\in N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)^2$,使得 $\boldsymbol{u}_k^1\notin N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)$. 注意到$(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)\boldsymbol{u}_k^1\in N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)$ 且 $N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)=\mathrm{span}\{\boldsymbol{U}_k\}$,有 $(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)\boldsymbol{u}_k^1=a\boldsymbol{U}_k$,其中 a 是非零常数,即

$$\begin{cases}Py_k^1+B_1z_k^1+B_2w_k^1=\lambda_kt_k^1+ax_k,\\ Qt_k^1+B_2^*z_k^1+B_4w_k^1=\lambda y_k^1+a\dfrac{Qx_k}{\lambda_k},\\ -Q^*w_k^1=\lambda_kz_k^1,\\ -P^*z_k^1=\lambda_kw_k^1.\end{cases}\tag{7}$$

若 $w_k^1=0$,显然,有 $z_k^1=0$, 于是可得

$$QPy_k^1=\lambda_k^2y_k^1+2aQf_k.$$

这样

$$(QPy_k^1,e_k)=(\lambda_k^2y_k^1,e_k)+2\lambda_k(Qf_k,e_k),$$

又因为 $P^*Q^*e_k=\overline{\lambda_k}^2e_k$,于是 $a\lambda_k(Qf_k,e_k)=0$. 这是不可能的,因为$(Qf_k,e_k)\neq0$,且 $\lambda_k\neq0$. 若 $w_k^1\neq0$,则 $P^*Q^*w_k^1=\lambda_k^2w_k^1=\mu_kw_k^1$,即 $\mu_k\in\sigma_{\mathrm{p}}(P^*Q^*)$,这说明 $\sigma_{\mathrm{p}}(PQ)\cap\sigma_{\mathrm{p}}(P^*Q^*)\neq\varnothing$,与已知矛盾. 因此,$\lambda_k$ 的代数指标均是1. 同理可证 λ_{-k} 的代数指标均是1.

下面,我们证明$\overline{\lambda_k}$的代数指标均是1. 注意到$\overline{\lambda_k}$ 的几何重数是1, 只须证明 $\boldsymbol{H_B}$ 关于$(\overline{\lambda_k},V_k)$ 没有一阶根向量. 反证法:假设存在向量 $\boldsymbol{u}_k^1=(t_k^1\quad y_k^1\quad z_k^1\quad w_k^1)^{\mathrm{T}}$ 使得$(\boldsymbol{H_B}-\overline{\lambda_k})\boldsymbol{u}_k^1=\boldsymbol{V}_k$, 则我们得到

$$\frac{1}{\lambda_k}P^*Q^*w_k^1-\frac{1}{\lambda_k^2}P^*Q^*e_k=\overline{\lambda_k}\overline{w_k^1}+e_k.$$

根据 $PQx_k=\lambda_k^2x_k$,可得到矛盾$(e_k,Qf_k)=0$. 因此,$\boldsymbol{H_B}$ 关于$(\overline{\lambda_k},\boldsymbol{V}_k)$ 没有一阶根向量. 类似可证 $\overline{\lambda_{-k}}$ 的代数指标均是 1.

由于 $\boldsymbol{H_B}$ 的每个特征值的几何重数和代数指标均是 1,进而得到其代数重数也为 1. □

引理 4 在定理 1(ⅱ)的条件下,有如下结论:

(ⅰ) $\sigma_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{H_B})=\{\lambda_{\pm k}\mid k=1,2,\cdots\}\subseteq\mathbf{R}\cup\mathrm{i}\mathbf{R}$,且式(3) 中的 $\boldsymbol{U}_{\pm k}$ 是相应特征向量.

(ⅱ) $y_k^1=\dfrac{Qx_k^1+B_4e_k}{\lambda_k}-\dfrac{B_2^*Q^*e_k+Qf_k}{\lambda_k^2}$, $z_k^1=-\dfrac{Q^*e_k}{\lambda_k}$ 且 $w_k=e_k$, 即

$$\boldsymbol{U}_k^1=\begin{pmatrix}x_k^1 & \dfrac{Qx_k^1+B_4e_k}{\lambda_k}-\dfrac{B_2^*Q^*e_k+Qf_k}{\lambda_k^2} & -\dfrac{Q^*e_k}{\lambda_k} & e_k\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

(ⅲ) $\boldsymbol{H_B}$ 关于$(\lambda_{-k},\boldsymbol{U}_{-k})$$(k=1,2,\cdots)$ 也具有一阶根向量

$$\boldsymbol{U}_{-k}^1=\begin{pmatrix}x_k^1 & -\dfrac{Qx_k+B_4e_k}{\lambda_k}-\dfrac{B_2^*Q^*e_k-Qf_k}{\lambda_k^2} & \dfrac{Q^*e_k}{\lambda_k} & e_k\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

其中 $\quad f_{-k}=-f_kx_{-k}^1=x_k^1,e_{-k}=e_k$.

(ⅳ) Hamilton 算子 $\boldsymbol{H_B}$ 的特征值的几何重数,代数指标和代数重数分别为 1,2,2.

证明 (ⅰ) 由 $\sigma_{\mathrm{p}}^1(-\boldsymbol{A}^*)=\varnothing$, $\mu_k\in\mathbf{R}$,以及引理 3 的证明,知 $\boldsymbol{H_B}$ 也具有可数多非零特征值 $\sigma_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{H_B})=\sigma_{\mathrm{p}}(A)=\{\lambda_{\pm k}\mid k=1,2,\cdots\}\subseteq\mathbf{R}\cup\mathrm{i}\mathbf{R}(\lambda_k\neq 0)$ 且 $\boldsymbol{U}_{\pm k}\in E(\lambda_{\pm k};\boldsymbol{H_B})$.

(ⅱ) 由于 $\boldsymbol{U}_k^1=(x_k^1\quad y_k^1\quad z_k^1\quad w_k^1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{H_B}$ 关于$(\lambda_k,\boldsymbol{U}_k)$ 的一阶根向量,类似于引理 3(ⅲ)的证明,有

$$w_k^1\neq 0,\ w_k^1=e_k,\ z_k^1=-\frac{Q^*e_k}{\lambda_k},\ y_k^1=\frac{Qx_k^1+B_4e_k}{\lambda_k}-\frac{B_2^*Q^*e_k+Qf_k}{\lambda_k^2}.$$

(ⅲ) 根据 $PB_2^*Q^*e_k=\mu_kB_2e_k$ 及 $f_{-k}=-f_k$,直接可以验证 $\boldsymbol{U}_{-k}^1$ 满足

$$\boldsymbol{H_B}\boldsymbol{U}_{-k}^1=\lambda_{-k}\boldsymbol{U}_{-k}^1+\boldsymbol{U}_{-k},\qquad k=1,2,\cdots.$$

这表明 $\boldsymbol{U}_{-k}^1$ 是 $\boldsymbol{H_B}$ 关于 $(\lambda_{-k},\boldsymbol{U}_{-k})$ 的一阶根向量.

(ⅳ) 显然, $\boldsymbol{H_B}$ 的特征值的几何重数是 1. 由假设 $\boldsymbol{H_B}$ 关于$(\lambda_k,\boldsymbol{U}_k)$ 具有一阶根向量表明 $N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)\subsetneqq N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)^2$,也就是说,$\lambda_k$的代数指标至少是 2. 假设 $N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)^2\subsetneqq N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)^3$,则至少存在 1 个向量 $\boldsymbol{U}_k^2=(\hat{x}_k\quad\hat{y}_k\quad\hat{h}_k\quad\hat{e}_k)\in N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)^3$,使得 $\boldsymbol{U}_k^2\notin N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)^2$. 那么$(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)\boldsymbol{U}_k^2\in N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)^2$. 注意到 $\dim N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)=1$,根据文献[15] 中的引理3. 3,知 $\dim N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)^2=2$. 另一方面,$\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{U}_k^1\in N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)^2$,且 $\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{U}_k^1$ 线性无关. 因此 $N(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)^2=\mathrm{span}\{\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{U}_k^1\}$. 这样,$(\boldsymbol{H_B}-\lambda_k)\boldsymbol{U}_k^2=a\boldsymbol{U}_k+b\boldsymbol{U}_k^1$,其中 a,b 是常数,且 $b\neq 0$, 即

$$\begin{cases}P\hat{y}_k+B_1\hat{h}_k+B_2\hat{e}_k=\lambda_k\hat{x}_k+af_k+bx_k^1,\\[2mm] Q\hat{x}_k+B_2^*\hat{h}_k+B_4\hat{e}_k=\lambda_k\hat{y}_k+a\dfrac{Qf_k}{\lambda_k}+b\left(\dfrac{Qx_k^1+B_4e_k}{\lambda_k}-\dfrac{B_2^*Q^*e_k+Qf_k}{\lambda_k^2}\right),\\[2mm] -Q^*\hat{e}_k=\lambda_k\hat{h}_k-b\dfrac{Q^*e_k}{\lambda_k},\\[2mm] -P^*\hat{h}_k=\lambda_k\hat{e}_k+be_k.\end{cases} \tag{10}$$

根据式(10)中的第 3 和第 4 个等式,可得

$$Q^* P^* \hat{h}_k = \lambda_k^2 \hat{h}_k - 2bQ^* e_k .$$

进而有

$$(Q^* P^* \hat{h}_k, f_k) = (\lambda_k^2 \hat{h}_k, f_k) - 2b(Q^* e_k, f_k),$$

结合 $PQf_k = \lambda_k^2 f_k$,仍可得到矛盾 $(Q^* e_k, f_k) = 0$. 因此,$N(\boldsymbol{H_B} - \lambda_k) \subsetneqq N(\boldsymbol{H_B} - \lambda_k)^2 = N(\boldsymbol{H_B} - \lambda_k)^3 = \cdots$,这便表明 λ_k 的代数指标是 2.

由于 $\boldsymbol{H_B}$ 的每个特征值的代数指标是 2,且 $\dim N(\boldsymbol{H_B} - \lambda_k)^2 = 2$,从而 $\boldsymbol{H_B}$ 的每个特征值的代数重数都是 2. □

定理 1(i)的证明 引理 3 表明 $\boldsymbol{H_B}$ 的特征值是 $\sigma_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{H_B}) = \{\lambda_{\pm k}, \overline{\lambda_{\pm k}}\}$,特征向量组是 $\{\boldsymbol{U}_k, \boldsymbol{V}_k \mid k = \pm 1, \cdots\}$. 由于 $\sigma_{\mathrm{p}}(PQ) \cap \sigma_{\mathrm{p}}(P^* Q^*) = \varnothing$ 以及 $\sigma_{\mathrm{p}}(PQ) = \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(P^* Q^*)}$,有 $\sigma_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{H_B}) \cap \mathbf{R} = \varnothing$,$\sigma_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{H_B}) \cap \mathrm{i}\mathbf{R} = \varnothing$. 这样,根据引理 2,对 $k, j = \pm 1, \pm 2, \cdots$, 有

$$\begin{cases} (\boldsymbol{U}_k, \boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_j) = 0, \\ (\boldsymbol{U}_k, \boldsymbol{J}\boldsymbol{V}_j) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\lambda_k}(f_k, Q^* e_k), & k + j = 0, \\ 0, & k + j \neq 0, \end{cases} \\ (\boldsymbol{V}_k, \boldsymbol{J}\boldsymbol{V}_j) = \left(\dfrac{1}{\overline{\lambda_k}} - \dfrac{1}{\lambda_j}\right)((Q^* e_k, x_j) + (x_k, Q^* e_j) + (B_4 e_k, e_j)) + \\ \qquad \dfrac{1}{\lambda_j^2}(e_k, B_2^* Q^* e_j) - \dfrac{1}{\overline{\lambda_k}^2}(B_2^* Q^* e_k, e_j) = 0. \end{cases}$$

由于 $PB_2^* Q^* e_k = \mu_k B_2 e_k$ 且 $P^* Q^* e_j = \mu_j e_j = \overline{\lambda_j}^2 e_j$, 于是

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda_j^2}(e_k, B_2^* Q^* e_j) - \frac{1}{\overline{\lambda_k}^2}(B_2^* Q^* e_k, e_j) = \\ &\quad \frac{1}{\lambda_j^2 \overline{\lambda_k}^2}((PB_2^* Q^* e_k, Q^* e_j) - (Q^* e_k, \overline{\lambda_j}^2 B_2 e_j)) = \\ &\quad \frac{1}{\lambda_j^2 \overline{\lambda_k}^2}((Q^* e_k, B_2 P^* Q^* e_j) - (Q^* e_k, \overline{\lambda_j}^2 B_2 e_j)) = \\ &\quad \frac{1}{\lambda_j^2 \overline{\lambda_k}^2}((Q^* e_k, \overline{\lambda_j}^2 B_2 e_j) - (Q^* e_k, \overline{\lambda_j}^2 B_2 e_j)) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

这样,根据 $(\boldsymbol{V}_k, \boldsymbol{J}\boldsymbol{V}_j) = 0 (k, j = \pm 1, \pm 2, \cdots)$, 我们得到

$$(Q^* e_k, x_j) + (x_k, Q^* e_j) + (B_4 e_k, e_j) = 0, \qquad k, j = \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{12}$$

根据 $(\boldsymbol{U}_k, \boldsymbol{J}\boldsymbol{V}_j) = 0 (k + j \neq 0)$, 得到

$$(f_k, Q^* e_j) = (Q^* e_k, f_j) = 0, \qquad k \pm j \neq 0. \tag{13}$$

充分性 为了证明 $\boldsymbol{H_B}$ 的特征向量组 $\{\boldsymbol{U}_k, \boldsymbol{V}_k \mid k = \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 在相应辛空间完备,只需证明存在唯一的常数列 $\{c_k, \tilde{c}_k \mid k = \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 使得任意 $\boldsymbol{\Delta} = (h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4)^{\mathrm{T}} \in X^4$, 都有

$$\boldsymbol{\Delta} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \boldsymbol{U}_k + c_{-k} \boldsymbol{U}_{-k} + \tilde{c}_k \boldsymbol{V}_k + \tilde{c}_{-k} \boldsymbol{V}_{-k} \tag{14}$$

成立.

为此,对 $k = 1, 2, \cdots$, 取

$$\begin{cases}\tilde{c}_k = \dfrac{(\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k})}{(\boldsymbol{V}_k, \boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k})},\ \tilde{c}_{-k} = \dfrac{(\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k)}{(\boldsymbol{V}_{-k}, \boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k)}, \\ c_k = \dfrac{(\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{J}\boldsymbol{V}_{-k})}{(\boldsymbol{U}_k, \boldsymbol{J}\boldsymbol{V}_{-k})},\ c_{-k} = \dfrac{(\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{J}V_k)}{(\boldsymbol{U}_{-k}, \boldsymbol{J}V_k)},\end{cases} \tag{15}$$

则

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \boldsymbol{U}_k + c_{-k}\boldsymbol{U}_{-k} + \tilde{c}_k \boldsymbol{V}_k + \tilde{c}_{-k}\boldsymbol{V}_{-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\begin{pmatrix} (c_k - c_{-k})f_k + (\tilde{c}_k - \tilde{c}_{-k})x_k \\ \dfrac{(c_k + c_{-k})Qf_k}{\lambda_k} + \dfrac{(\tilde{c}_k + \tilde{c}_{-k})(Qx_k + B_4 e_k)}{\overline{\lambda_k}} - \dfrac{(\tilde{c}_k - \tilde{c}_{-k})B_2 Q^* e_k}{\overline{\lambda_k}^2} \\ -\dfrac{(\tilde{c}_k + \tilde{c}_{-k})Q^* e_k}{\overline{\lambda_k}} \\ (\tilde{c}_k - \tilde{c}_{-k})e_k \end{pmatrix}. \tag{16}$$

根据 $(Qf_k, e_k) \neq 0$, 式(13), 以及 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 都是 X 的 Schauder 基, 知 $\{Q^* e_k/(Qf_k, e_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{Qf_k/(Qf_k, e_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 也都是 X 的 Schauder 基. 于是

$$h_4 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(h_4, Qf_k)}{(e_k, Qf_k)} e_k,\ h_3 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(h_3, f_k)}{(Q^* e_k, f_k)} Q^* e_k. \tag{17}$$

将向量(16)记为 $(Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \quad Y_4)^{\mathrm{T}}$. 通过计算得

$$Y_1 = \sum_{k\in\Lambda} \frac{(h_1, Q^* e_k) + (h_4, Qt_k + B_4 e_k)}{(f_k, Q^* e_k)} f_k + \frac{(h_4, Qf_k)}{(Q^* e_k, f_k)} t_k,$$

$$Y_2 = \sum_{k\in\Lambda} \frac{(h_2, e_k) + (1/\nu_k^2)(h_4, B_2^* Q^* e_k) - (h_3, t_k)}{(f_k, Q^* e_k)} Qf_k +$$

$$\frac{(h_3, f_k)}{(Q^* e_k, f_k)}(Qt_k + B_4 e_k) - \frac{(h_4, Qf_k)}{\overline{\lambda_k}^2 (Q^* e_k, f_k)} B_2^* Q^* e_k,$$

$$Y_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h_3, f_k)}{(Q^* e_k, f_k)} Q^* e_k,$$

$$Y_4 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h_4, Qf_k)}{(e_k, Qf_k)} e_k.$$

显然 $Y_3 = h_3, Y_4 = h_4$. 这样, 由式(13)、(12)、(17)和 $B_4 = B_4^*$, 有

$$\left(\frac{(h_4, Qx_k + B_4 e_k)}{(f_k, Q^* e_k)} f_k + \frac{(h_4, Qf_k)}{(Q^* e_k, f_k)} x_k,\ \frac{Q^* e_j}{(Qf_j, e_j)}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{(h_3, x_k)}{(f_k, Q^* e_k)} Qf_k + \frac{(h_3, f_k)}{(Q^* e_k, f_k)}(Qx_k + B_4 e_k),\ e_j\right) = 0, \qquad \forall j = 1, 2, \cdots.$$

因此

$$\frac{(h_4, Qx_k + B_4 e_k)}{(f_k, Q^* e_k)} f_k + \frac{(h_4, Qf_k)}{(Q^* e_k, f_k)} x_k = 0,$$

$$\frac{(h_3, x_k)}{(f_k, Q^* e_k)} Qf_k + \frac{(h_3, f_k)}{(Q^* e_k, f_k)}(Qx_k + B_4 e_k) = 0, \qquad \forall k = 1, 2, \cdots.$$

根据假设

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(g,B_2^*Q^*e_k)}{\nu_k(f_k,Q^*e_k)}Qf_k-\frac{(g,Qf_k)}{\mu_k(Q^*e_k,f_k)}B_2^*Q^*e_k \qquad (\forall g\in X)$$

收敛,以及式(11),得到

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(h_4,B_2^*Q^*e_k)}{\nu_k(f_k,Q^*e_k)}Qf_k-\frac{(h_4,Qf_k)}{\mu_k(Q^*e_k,f_k)}B_2^*Q^*e_k,\ e_j\right)=\\&\quad\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(h_4,B_2^*Q^*e_k)}{\nu_k(f_k,Q^*e_k)}Qf_k-\frac{(h_4,Qf_k)}{\mu_k(Q^*e_k,f_k)}B_2^*Q^*e_k,\ e_j\right)=\\&\quad\frac{(h_4,B_2^*Q^*e_j)}{\nu_j}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(h_4,Qf_k)}{\mu_k(Q^*e_k,f_k)}(B_2^*Q^*e_k,e_j)=\\&\quad\frac{(h_4,B_2^*Q^*e_j)}{\nu_j}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(h_4,Qf_k)}{\nu_j(Q^*e_k,f_k)}(e_k,B_2^*Q^*e_j)=\\&\quad\frac{(h_4,B_2^*Q^*e_j)}{\nu_j}-\frac{(h_4,B_2^*Q^*e_j)}{\nu_j}=0,\qquad\forall j=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(h_4,B_2^*Q^*e_k)}{\nu_k(f_k,Q^*e_k)}Qf_k-\frac{(h_4,Qf_k)}{\mu_k(Q^*e_k,f_k)}B_2^*Q^*e_k=0.$$

从而

$$Y_1=\sum_{k\in\Lambda}\frac{(h_1,Q^*e_k)}{(x_k,Q^*e_k)}f_k,\ Y_2=\sum_{k\in\Lambda}\frac{(h_2,e_k)}{(f_k,Q^*e_k)}Qf_k.$$

即 $h_1=\boldsymbol{Y}_1,h_2=\boldsymbol{Y}_2$. 因此,式(14)成立. 另一方面,假设还有一个常数列

$$\{d_k,d_{-k},\tilde{d}_k,\tilde{d}_{-k}\mid k\in\Lambda\}$$

使得式(14)成立. 那么

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(c_k-d_k)\boldsymbol{U}_k+(c_{-k}-d_{-k})\boldsymbol{U}_{-k}+(\tilde{c}_k-\tilde{d}_k)V_k+(\tilde{c}_{-k}-\tilde{d}_{-k})\boldsymbol{V}_{-k}=0.$$

将上式两端分别与 $\boldsymbol{JU}_{-k},\boldsymbol{JU}_k,\boldsymbol{JV}_{-k}$ 和 $\boldsymbol{JV}_k$ 做内积,易得 $\tilde{c}_k=\tilde{d}_k,\tilde{c}_{-k}=\tilde{d}_{-k}c_k=d_k$,且 $c_{-k}=d_{-k}$. 因此,$\boldsymbol{H_B}$ 的特征向量组 $\{\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{V}_k\mid k=\pm1,\ \pm2,\cdots\}$ 在 X^4 中完备.

必要性 类似于文献[14]中定理1的证明,这里略去. □

定理1(ii)的证明 引理4表明 $\sigma_p(\boldsymbol{H_B})=\{\lambda_{\pm k}\mid k=1,2,\cdots\}\subseteq\mathbf{R}\cup\mathrm{i}\mathbf{R}$, $\{\boldsymbol{U}_k,\ \boldsymbol{U}_k^1\mid k=\pm1,\cdots\}$ 是 $\boldsymbol{H_B}$ 的根向量组. 根据式(11),对 $k,\ j=\pm1,\ \pm2,\cdots$, 有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{JU}_j)=0,\ (\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{JU}_j^1)=\left(\dfrac{1}{\lambda_k}-\dfrac{1}{\overline{\lambda}_j}\right)(f_k,Q^*e_j),\\(\boldsymbol{U}_k^1,\boldsymbol{JU}_j^1)=\left(\dfrac{1}{\lambda_k}-\dfrac{1}{\overline{\lambda}_j}\right)((Q^*e_k,x_j)+(x_k,Q^*e_j)+(B_4e_k,e_j))+\\\qquad\dfrac{1}{\overline{\lambda}_j^{\,2}}(e_k,Qf_j)-\dfrac{1}{\lambda_k^2}(Qf_k,e_j).\end{cases}$$

为方便,记 $\Lambda=\{\pm1,\ \pm2,\cdots\}$, $\Lambda_1=\{k\in\Lambda\mid\lambda_k\in\mathbf{R}\}$, $\Lambda_2=\{k\in\Lambda\mid\lambda_k\in\mathrm{i}\mathbf{R}\}$, 则 $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2$. 根据

$$\begin{cases}(\boldsymbol{U}_k^1,\boldsymbol{JU}_k^1)=0,\qquad k\in\Lambda_1,\\(\boldsymbol{U}_k^1,\boldsymbol{JU}_{-k}^1)=0,\qquad k\in\Lambda_2,\end{cases}$$

可得

$$\begin{cases}(e_k,Qf_k)-(Qf_k,e_k)=0, & k\in\Lambda_1,\\ (e_k,Qf_k)+(Qf_k,e_k)=0, & k\in\Lambda_2.\end{cases}$$

再根据引理 2,有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_j^1)=\begin{cases}\dfrac{2}{\lambda_k}(f_k,Q^*e_k), & k+j=0;\ k,j\in\Lambda_1\text{或 }k-j=0;\ k,j\in\Lambda_2,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\\ (\boldsymbol{U}_k^1,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_j^1)=\begin{cases}\dfrac{2}{\lambda_k}((Q^*e_k,x_j)+(x_k,Q^*e_j)+(B_4e_k,e_j))-\dfrac{2}{\lambda_k^2}(Qf_k,e_j),\\ \qquad\qquad k+j=0;\ k,j\in\Lambda_1\text{或 }k-j=0;\ k,j\in\Lambda_2,\\ 0, \qquad \text{其它}.\end{cases}\end{cases}$$

类似于定理 1(i)的证明,关系式(13)和(12)仍成立.

下面,我们证明 $\boldsymbol{H_B}$ 的根向量组$\{\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{U}_k^1\mid k=\pm1,\pm2,\cdots\}$在相应辛空间完备,即证存在唯一常数列 $\{c_k,c_k^1\mid k=\pm1,\pm2,\cdots\}$ 使得对每个 $\boldsymbol{\Delta}=(h_1\quad h_2\quad h_3\quad h_4)^{\mathrm{T}}\in X^4$, 都有

$$\boldsymbol{\Delta}=\sum_{k=1}^{+\infty}c_k\boldsymbol{U}_k+c_{-k}\boldsymbol{U}_{-k}+c_k^1\boldsymbol{U}_k^1+c_{-k}^1\boldsymbol{U}_{-k}^1$$

成立.

为此,对 $k=1,2,\cdots$, 取

$$\begin{cases}c_k^1=\begin{cases}\dfrac{(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k})}{(\boldsymbol{U}_k^1,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k})}, & k\in\Lambda_1,\\ \dfrac{(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k)}{(\boldsymbol{U}_k^1,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k)}, & k\in\Lambda_2,\end{cases}\\ c_{-k}^1=\begin{cases}\dfrac{(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k)}{(\boldsymbol{U}_{-k}^1,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k)}, & k\in\Lambda_1,\\ \dfrac{(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k})}{(\boldsymbol{U}_{-k}^1,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k})}, & k\in\Lambda_2,\end{cases}\\ c_k=\begin{cases}\dfrac{(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k}^1)}{(\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k}^1)}-c_k^1\dfrac{(\boldsymbol{U}_k^1,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k}^1)}{(\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k}^1)}, & k\in\Lambda_1,\\ \dfrac{(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k^1)}{(\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k^1)}-c_k^1\dfrac{(\boldsymbol{U}_k^1,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k^1)}{(\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k^1)}, & k\in\Lambda_2,\end{cases}\\ c_{-k}=\begin{cases}\dfrac{(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k^1)}{(\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k^1)}-c_k^1\dfrac{(\boldsymbol{U}_k^1,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k^1)}{(\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_k^1)}, & k\in\Lambda_1,\\ \dfrac{(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k}^1)}{(\boldsymbol{U}_{-k},\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k}^1)}-c_{-k}^1\dfrac{(\boldsymbol{U}_{-k}^1,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k}^1)}{(\boldsymbol{U}_{-k},\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k}^1)}, & k\in\Lambda_2.\end{cases}\end{cases}$$

余下的证明与定理 1(i)类似. □

注 基于 QP 的性质,有如上平行结论,从略.

2 应　　用

作为应用,本节给出两个例子说明前面的结果. 令 $X=L^2[0,1]$.

例 1　考虑两对边简支的板弯曲方程

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\omega=f(x,y),\tag{19}$$

其中,$f(x,y)$ 是区域$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant h,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 的荷载,简支边界条件是

$$\omega=0,\ \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=0,\qquad y=0,\ y=1.\tag{20}$$

令

$$\theta=\frac{\partial\omega}{\partial x},\ q=D\left(\frac{\partial^3\omega}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\omega}{\partial x\partial y^2}\right),\ m=-D\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right),$$

则得到式(19)的上三角无穷维 Hamilton 系统

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\omega\\ \theta\\ q\\ m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\ -\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}&0&0&-\dfrac{1}{D}\\ 0&0&0&\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\\ 0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega\\ \theta\\ q\\ m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ f\\ 0\end{pmatrix},$$

相应的上三角 Hamilton 算子是

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\ -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}&0&0&-\dfrac{1}{D}\\ 0&0&0&\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\\ 0&0&-1&0\end{pmatrix}.$$

由边界条件(20),H_1 的定义域为

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{H}_1)=\left\{\begin{pmatrix}\omega\\ \theta\\ p\\ q\end{pmatrix}\in X^4\ \middle|\ \begin{array}{l}\omega(0)=\omega(1)=0,\ q(0)=q(1)=0,\ \omega,\ \omega',\ m,\ m'\\ \text{是绝对连续的},\omega',\omega'',m',m''\in X\end{array}\right\}.\tag{21}$$

通过计算,PQ,P^*Q^* 的特征值和特征向量分别为

$$\nu_k=(k\pi)^2,\ \mu_k=(k\pi)^2,\ f_k=-\frac{1}{2Dk\pi}\sin k\pi y,\ e_k=\sin k\pi y,\qquad k=1,2,\cdots.$$

显然,$\sigma_{\mathrm{p}}(PQ)=\overline{\sigma_{\mathrm{p}}(P^*Q^*)}$.又

$$PB_2^*Q^*e_k=\mu_jB_2e_k=0,\ (Qf_k,e_k)=-\frac{k\pi}{4D}\neq 0.$$

再由 $\sigma_{\mathrm{p}}^1(-\boldsymbol{A}^*)=\varnothing$,且 $\boldsymbol{H}_1$ 关于$(\lambda_k,\boldsymbol{U}_k)$ 具有一阶根向量.那么根据引理4 知 $\boldsymbol{H}_1$ 的每个特征值的几何重数,代数指标和代数重数分别为1,2,2.另一方面,$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 都是 X 中的正交基.因此,根据定理1(ii)知无穷维 Hamilton 算子 $\boldsymbol{H}_1$ 的根向量组在 X^4 中完备.

下面通过具体计算来验证 $\boldsymbol{H}_1$ 的根向量组在 X^4 中完备,以此说明我们所得结论的正确性.$\boldsymbol{H}_1$ 的特征值和相应的特征向量和根向量分别为 $\lambda_k=k\pi(k=\pm1,\ \pm2,\cdots)$,

$$\boldsymbol{U}_k=\left(-\frac{1}{2Dk\pi}\sin k\pi y\quad -\frac{1}{2D}\sin k\pi y\quad 0\quad 0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{U}_k^1 = \left(\sin k\pi y \quad \left(k\pi - \frac{1}{2k\pi D}\right)\sin k\pi y \quad -k\pi\sin k\pi y \quad \sin k\pi y\right)^{\mathrm{T}}.$$

对 $k=\pm 1,\ \pm 2,\cdots$, 取

$$c_k^1 = \frac{(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k})}{(\boldsymbol{U}_k^1,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k})},\ c_k = \frac{(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k}^1)}{(\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k}^1)} - c_k^1\frac{(\boldsymbol{U}_k^1,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k}^1)}{(\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}_{-k}^1)}.$$

将其代入式(14)的右端,得

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k\boldsymbol{U}_k + c_{-k}\boldsymbol{U}_{-k} + c_k^1\boldsymbol{U}_k^1 + c_{-k}^1\boldsymbol{U}_{-k}^1 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{+\infty} 2(\omega,\sin k\pi y)\sin k\pi y \\ \sum_{k=1}^{+\infty} 2(\theta,\sin k\pi y)\sin k\pi y \\ \sum_{k=1}^{+\infty} 2(q,\sin k\pi y)\sin k\pi y \\ \sum_{k=1}^{+\infty} 2(m,\sin k\pi y)\sin k\pi y \end{pmatrix}, \tag{22}$$

上式右端恰好是 $\omega,\ \theta,\ q,\ m$ 关于 $\{\sin k\pi y\}_{k=1}^{+\infty}$ 的 Fourier 级数展开. 因此, $\boldsymbol{H}_1$ 的根向量组 $\{\boldsymbol{U}_k,\boldsymbol{U}_k^1 \mid k=\pm 1,\cdots\}$ 在 X^4 完备. 这与应用定理 1(ii)的结论一致.

例 2 考虑弹性地基上的板弯曲方程

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\omega + \kappa\omega = f(x,y), \tag{23}$$

其中, $f(x,y)$ 是区域 $\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant h, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 的荷载,简支边界条件是

$$\omega = 0,\ \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = 0, \qquad y=0,\ y=1. \tag{24}$$

令

$$\theta = \frac{\partial\omega}{\partial x},\ q = D\left(\frac{\partial^3\omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\omega}{\partial x\partial y^2} + \mathrm{i}\sqrt{\kappa/D}\,\frac{\partial\omega}{\partial x}\right),$$

$$m = -D\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \mathrm{i}\sqrt{\kappa/D}\,\omega\right),$$

则得到式(23)的上三角无穷维 Hamilton 系统

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\omega\\ \theta\\ q\\ m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\partial^2/\partial y^2 - \mathrm{i}\sqrt{\kappa/D} & 0 & 0 & -1/D \\ 0 & 0 & 0 & \partial^2/\partial y^2 - \mathrm{i}\sqrt{\kappa/D} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ \theta\\ q\\ m\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\f\\0\end{bmatrix},$$

相应的上三角 Hamilton 算子是

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{d}^2/\mathrm{d}y^2 - \mathrm{i}\sqrt{\kappa/D} & 0 & 0 & -1/D \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{d}^2/\mathrm{d}y^2 - \mathrm{i}\sqrt{\kappa/D} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据边界条件(24)，$\boldsymbol{H}_2$ 的定义域与式(21)相同.

通过计算，算子 PQ 和 P^*Q^* 的特征值和特征向量分别为

$$\nu_j = (j\pi)^2 - \mathrm{i}\sqrt{\kappa/D},\ \mu_j = (j\pi)^2 + \mathrm{i}\sqrt{\kappa/D},\ f_j = \sin j\pi y = e_j \qquad (j = 1,2,\cdots).$$

显然

$$\sigma_{\mathrm{p}}(PQ) = \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(P^*Q^*)},\ PB_2^*Q^*e_j = \mu_j B_2 e_j = 0,\ (Qf_j, e_j) = \frac{\nu_j}{2} \neq 0.$$

注意到 $\sigma_{\mathrm{p}}^1(-A^*) = \sigma_{\mathrm{p}}(-A^*) = \{\pm\sqrt{(j\pi)^2 + \mathrm{i}\sqrt{\kappa/D}} \mid j = 1,2,\cdots\}$，且函数系 $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ 和 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 都是 X 中的基. 因此，根据定理 1(i)，无穷维 Hamilton 算子 $\boldsymbol{H}_2$ 的特征向量组在 X^4 中完备.

致谢　本文得到内蒙古大学‘211 工程’创新人才培养基金资助，特此感谢.

参考文献(References):

[1] 钟万勰. 分离变量法与哈密尔顿体系[J]. 计算结构力学及其应用, 1991, **8**(3): 229-239. (ZHONG Wan-xie. Method of separation of variables and Hamiltonian system[J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1991, **8**(3): 229-239. (in Chinese))

[2] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995. (ZHONG Wan-xie. *A New Systematic Methodology for Theory of Elasticity*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995. (in Chinese))

[3] Liu Y M, Li R. Accurate bending analysis of rectangular plates with two adjacent edges free and the others clamped or simply supported based on new symplectic approach [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, **34**(4): 856-865.

[4] 姚伟岸, 隋永枫. Reissner 板弯曲的辛求解体系[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(2): 159-165. (YAO Wei-an, SUI Yong-feng. Symplectic solution system for Reissner plate bending [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(*English Edition*), 2004, **25**(2): 178-185.)

[5] Zhou Z H, Wong K W, Xu X S, Leung A Y T. Natural vibration of circular and annular thin plates by Hamiltonian approach[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, **330**(5): 1005-1017.

[6] Kurina G A. Invertibility of nonnegatively Hamiltonian operators in a Hilbert space[J]. *Differential Equations*, 2001, **37**(6): 880-882.

[7] Azizov T Ya, Dijksma A, Gridneva I V. On the boundedness of Hamiltonian operators[J]. *Proc American Math Soc*, 2002, **131**(2): 563-576.

[8] Kurina G A, Martynenko G V. Reducibility of a class of operator functions to block-diagonal form[J]. *Mathematical Notes*, 2003, **74**(5): 744-748.

[9] 阿拉坦仓, 黄俊杰, 范小英. $L^2 \times L^2$ 中一类无穷维 Hamilton 算子的剩余谱[J]. 数学物理学报, 2005, **25**(7): 1040-1045. (Alatancang, HUANG Jun-jie, FAN Xiao-ying. The residual spectrum for a class of infinite dimensional Hamiltonian operators in $L^2 \times L^2$[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2005, **25**(7): 1040-1045. (in Chinese))

[10] Alatancang, Huang J J, Fan X Y. Structure of the spectrum for infinite dimensional Hamiltonian operators[J]. *Science in China Series A*: *Mathematics*, 2008, **51**(5): 915-924.

[11] 黄俊杰, 阿拉坦仓, 陈阿茹娜. 一类无穷维 Hamilton 算子特征函数系的完备性[J]. 应用数学学报, 2008, **31**(3): 457-466. (HUANG Jun-jie, Alatancang, CHEN A-ru-na. Completeness for the eigenfunction system of a class of infinite dimensional Hamiltonian operators[J]. *Acta*

Mathematicae Applicatae Sinica, *Chinese Series*, 2008, **31**(3): 457-466. (in Chinese))

[12] Wu D Y, Alatancang. Completeness in the sense of Cauchy principal value of the eigenfunction systems of infinite dimensional Hamiltonian operator[J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 2009, **52**(1): 173-180.

[13] 王华, 阿拉坦仓, 黄俊杰. 一类无穷维 Hamilton 算子根向量组的完备性[J]. 数学学报, 2011, **54**(4): 541-552. (WANG Hua, Alatancang, HUANG Jun-jie. Completeness of root vector systems of a class of infinite-dimensional Hamiltonian operators[J]. *Acta Mathematica Sinica*, *Chinese Series*, 2011, **54**(4): 541-552. (in Chinese))

[14] Huang J J, Alatancang, Wang H. Completeness of the system of eigenvectors of off-diagonal operator matrices and its applications in elasticity theory [J]. *Chinese Physics B*, 2010, **19**(12): 120201.

[15] Taylor A E. Theorems on ascent, descent, nullity and defect of linear operators [J]. *Math Ann*, 1966, **163**: 18-49.

Completeness of the System of Root Vectors of Upper Triangular Infinite-Dimensional Hamiltonian Operators Appearing in Elasticity Theory

WANG Hua[1,2], Alatancang[1], HUANG Jun-jie[1]

(1. *School of Mathematical Sciences*, *Inner Mongolia University*, *Hohhot* 010021, *P. R. China*;

2. *College of Sciences*, *Inner Mongolia University of Technology*, *Hohhot* 010051, *P. R. China*)

Abstract: A class of upper triangular infinite-dimensional Hamiltonian operators appearing in elasticity theory was dealt with. The geometric multiplicity and algebraic index of the eigenvalue were investigated, then further the algebraic multiplicity of the eigenvalue was obtained. Based on these properties, the concrete completeness formulation of the system of eigen or root vectors of the Hamiltonian operator was proposed. It is shown that this completeness is determined by the system of eigenvectors of its operator entries. Finally, some illustrating applications from elasticity theory are presented.

Key words: upper triangular infinite-dimensional Hamiltonian operator; eigenvector; root vector; multiplicity; completeness