

放/吸热流体在两个充满多孔材料的竖直平行板之间作不稳定的自然对流*

B·K·耶哈^{1,2}, M·K·穆萨¹

(1. 阿玛都贝罗大学 数学系, 扎利亚, 尼日利亚;
2. 阿玛都贝罗大学 基本改革研究学院 数学系, 番吐阿, 尼日利亚)

摘要: 在一个由两块无限竖直平行板组成的管道中, 充满着多孔的介质材料, 使用 Darcy 模型 (Brinkman 模型的推广) 的动量方程, 连同能量方程, 计算不可压缩、粘性、放/吸热流体在该管道中的不稳定自然对流, 即 Couette 流动. 流动是由于边界平板有不对称的加热, 以及作加速运动所引起. 选用合理的无量纲参数, 对控制方程进行简化, 通过 Laplace 变换进行解析求解, 得到闭式的速度和温度分布曲线解, 随后导出表面摩擦力和传热率. 发现在竖直管道中的不同剖面, 流体的流动及温度分布曲线随着时间而增加, 且在运动平板附近更高. 特别是, 流体的速度和温度随着平板间距的增加而增加, 但是, 表面摩擦力和热传导率随着平板间距的增加而减小.

关键词: 放/吸热的流体; 自然对流; 多孔材料; 加速运动; Couette 流动

中图分类号: O357 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.03.003

符号说明

c_p	流体的比定压热容	Da	Darcy 数
Gr	Grashof 数	g	重力加速度
H	平板间距	K	多孔介质的渗透率
k	流体的热传导率	Pr	Prandtl 数
Nu_0	$y' = 0$ 处的传热率	Nu_h	$y' = h$ 处的传热率
S	无量纲的放/吸热参数	T	无量纲的流体温度
t	无量纲的时间	T'	流体的温度
T_w	$y' = 0$ 处的温度	T_h	$y' = h$ 处的温度
t'	有量纲的时间	U'	有量纲的流体速度
U	无量纲的流体速度	U_0	有量纲的加速度常数
Q_0	有量纲的放/吸热参数		
希腊字母			
β	热膨胀系数	τ_0	$y' = 0$ 处的表面摩擦力

* 收稿日期: 2010-12-31; 修订日期: 2011-11-18

作者简介: Basant K. Jha (E-mail: basant777@yahoo.co.uk);

Muhammad K. Musa, 博士 (联系人. E-mail: mmkibirxy@yahoo.com).

本文原文为英文, 黄雅意译, 张禄坤校.

τ_h	$y' = h$ 处的表面摩擦力	ν_{eff}	饱和多孔材料的有效粘度
ν	流体的动粘度	γ	粘度比

引 言

热传递不稳定自然对流形式的理论和实验研究文献受到了广泛的关注,尤其是当流体的流动是由于边界平板的相对运动所引起时,因为它们在工业和技术上有着广泛的应用.1968年 Schlichting^[1]讨论了广义的第二类 Stokes 问题,即流体的动量来自于平板在其自身平面中的振荡,且不会产生通常意义下的稳定流动. Ishigaki^[2]就粘性流体局限在两个无限平行平板之间,一块平板在其自身平面内运动和振荡,另一块处于静止状态时,调查流体的流动情况. Singh^[3]在脉动平板中研究 Grashof 数对不稳定自然对流,即 Couette 运动的影响.这种型式的流动在工业上有着广泛的应用.例如在多壁面驱动的应用中,用 Couette 流动来评估阻力的大小^[4].

如果平板边界所限制的饱和流体是可以放热/吸热,并填满着多孔材料时,问题就变得越发有趣.出现放热/吸热是由于内部有热源/热汇存在. Jha 和 Ajibade^[5]就竖直多孔平板有周期性热量输入时,研究了放/吸热流体的自由对流. Jha^[6]及 Jha 和 Ajibade^[7]对有热源/汇的竖直平行板之间,瞬时自然对流问题进行了调查. Ingham 等^[8]在壁面与饱和流体的多孔介质之间,研究突加温差所引起的(与时间相关的)边界层流动.

在包含多孔介质的非 Darcy 问题中,这正是本文的模型,经常需要考虑多孔介质渗透性的影响. Hong 等^[9]调查了非 Darcy 和不均匀渗透性,对多孔介质中竖直平板的自然对流影响. Cheng 和 Hsu^[10-11]及 Cheng 和 Vortmeyer^[12]研究了渗透性变化的影响,发现对速度分布和热传递影响很大,且在靠近加热壁面时速度达到最大值. Jha^[13]调查了经过竖直多孔层时的自然对流.

在有关传热的自然对流模型中,特别是涉及内部流体的放热/吸热时,需要深入地了解流体在多孔介质中的传输过程,以及竖直平行板间距的变化(及其相关条件).因此,本文的目的是,在两个无限竖直平行板之间充满着多孔基质材料时,对粘性不可压缩放热/吸热流体不稳定自然对流进行研究.不稳定流动是由于其中一块平板的加速运动,以及该平板不对称的加热造成的.

1 数学分析

考虑在两个充满多孔介质材料的无限竖直平行板间的自然对流(如图 1 所示).在左平板向上方向取 x' 轴, y' 轴与 x' 轴垂直并指向流体.当 $t' \leq 0$ 时,流体和平板都处于静止且温度相等, $T' = T_h$.当 $t' > 0$ 时,平板 $y' = 0$ 的温度上升或下降至 T_w ,并且板以速度 $U_0 t'$ 开始运动,其中 U_0 为速度常数.

在一个充满均匀多孔材料的管道中,壁面受到均匀加热,分析管道中不稳定的自然对流,即 Couette 流动.多孔介质中充满着放/吸热的流体,且假设多孔介质与流体处于局部的热动力学平衡状态.假设固体材料和流体的热物理性质不变.有量纲的控制方程可写为

$$\frac{\partial U'}{\partial t'} = \nu_{\text{eff}} \frac{\partial^2 U'}{\partial y'^2} + g\beta(T' - T_h) - \frac{U'v}{k}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} + \frac{Q_0(T_h - T')}{\rho c_p}, \quad (2)$$

其初始-边界条件为

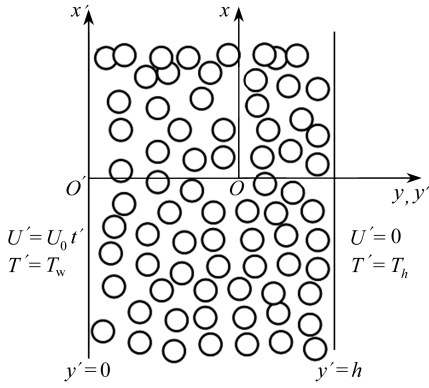


图1 系统的物理构造图

Fig.1 Physical configuration of the system

$$\begin{cases} t' \leq 0: T' = T_h, & \text{当 } 0 \leq y' \leq h, \\ t' > 0: U' = U_0 t', T' = T_w, & \text{当 } y' = 0, \\ U' = 0, T' = T_h, & \text{当 } y' = h. \end{cases} \quad (3)$$

对方程(1)~(3)使用如下定义的无量纲量:

$$\begin{cases} T = \frac{T' - T_h}{T_w - T_h}, t = t' \left(\frac{U_0^2}{\nu} \right)^{1/3}, y = y' \left(\frac{U_0}{\nu^2} \right)^{1/3}, \\ U = \frac{U'}{(U_0 \nu)^{1/3}}, Gr = g\beta \frac{(T_w - T_h)}{U_0}, \\ Da = K \left(\frac{U_0^2}{\nu^4} \right)^{1/3}, H = h \left(\frac{U_0}{\nu^2} \right)^{1/3}, \gamma = \frac{\nu_{\text{eff}}}{\nu}, \\ Pr = \frac{\mu c_p}{K}, S = \frac{Q_0}{k} \left(\frac{\nu^4}{U_0^2} \right)^{1/3}, \end{cases} \quad (4)$$

得到方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \gamma \frac{\partial U^2}{\partial^2 y} + GrT - \frac{U}{Da}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial T^2}{\partial^2 y} - \frac{ST}{Pr} \quad (6)$$

及其初始-边界条件

$$\begin{cases} t \leq 0: U = T = 0, & \text{当 } 0 \leq y \leq H, \\ t > 0: U = t, T = 1, & \text{当 } y = 0, \\ U = 0, T = 0, & \text{当 } y = H. \end{cases} \quad (7)$$

2 求解

利用 Laplace 变换及其相应的逆变换, 在初始边界条件(7)下, 给出方程(5)和(6)的解析解:

$$\begin{aligned} U(y, t) = & \frac{1}{2} \sum_m \left[f_4(a, t, \gamma, Da, m_1, m_2) - f_4(b, t, \gamma, Da, m_1, m_2) + \right. \\ & \frac{Gr}{c_1 c_2} [f_2(a, t, c_2, \gamma, Da) - f_2(b, t, c_2, \gamma, Da) + f_3(b, t, c_2, \gamma, Pr) - \\ & f_3(a, t, c_2, \gamma, Pr) + f_4(b, t, \gamma, Da, 1.0, 1.0) - f_4(a, t, \gamma, Da, 1.0, 1.0) + \\ & \left. f_1(a, t, Pr, c, S) - f_1(b, t, Pr, c, S) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$T(y, t) = \frac{1}{2} \sum_m [f_1(a, t, Pr, c, S) - f_1(b, t, Pr, c, S)]. \quad (9)$$

方程(8)和(9)表明, 对于小的时间值, $\text{erfc}(\infty) = 0, \exp(-\infty) = 0$, 平板($y = 0$)附近的速度和温度由下面的表达式确定:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[f_4(y, t, \gamma, Da, m_1, m_2) + \frac{Gr}{c_2 c_1} [f_2(y, t, c_2, \gamma, Da) - \right. \\ \left. f_3(y, t, c_2, \gamma, Pr) - f_4(y, t, \gamma, Da, 1.0, 1.0) + f_1(y, t, Pr, c, s) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

和

$$\frac{1}{2} f_1(y, t, Pr, c, s). \quad (11)$$

上面给出的速度和温度场表达式,就是嵌入多孔介质的无限垂直平板作加速运动时,放/吸热流体作不稳定自然对流时的解,即 Couette 流动解.物理上意味着,对小的时间值,两个无限垂直平板间形成的流动问题,简化为仅在加速运动平板 ($y' = 0$) 的流动,不受另一块平板 ($y' = h$) 的影响.

利用 $\tau_0 = dU/dy|_{y=0}$ 和 $Nu_0 = dT/dy|_{y=0}$ 可以分别得到加热平板 $y = 0$ 上的表面摩擦力和传热率:

$$\begin{aligned} \tau_0 = & -\frac{1}{2} \sum_m^{\infty} \left[m_6 (f_4(c_3, t, \gamma, Da, 1.0, 1.0) + f_4(c_4, t, \gamma, Da, 1.0, 1.0)) - \right. \\ & m_3 (f_7(c_3, t, \gamma, Da, m_1, m_2) - f_7(c_4, t, \gamma, Da, m_1, m_2)) + \\ & m_5 (f_8(c_3, t, \gamma, Da, m_1, m_2) - f_8(c_4, t, \gamma, Da, m_1, m_2)) + \\ & \frac{Gr}{c_1 c_2} [m_7 (f_1(c_3, t, Pr, c, s) + f_1(c_4, t, Pr, c, s)) - \\ & m_4 (f_6(c_3, t, Pr, c, 0.0) + f_6(c_4, t, Pr, c, 0.0)) - m_5 (f_4(c_4, t, \gamma, Da, 0.0, 0.0) + \\ & f_4(c_3, t, \gamma, Da, 0.0, 0.0)) + m_3 (f_5(c_3, t, \gamma, Da, 0.0) + f_5(c_4, t, \gamma, Da, 0.0)) + \\ & m_8 [m_9 (f_2(c_3, t, c_2, \gamma, Da) + f_2(c_3, t, c_2, \gamma, Da)) - m_3 (f_5(c_3, t, \gamma, Da, c_2) + \\ & f_5(c_4, t, \gamma, Da, c_2)) - m_{10} (f_3(c_3, t, c_2, c, Pr) + f_3(c_4, t, c_2, c, Pr)) + \\ & \left. m_4 (f_6(c_3, t, Pr, c, c_2) + f_6(c_4, t, Pr, c, c_2))] \right], \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Nu_0 = & \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} [m_7 (f_1(c_4, t, Pr, c, S) + f_1(c_5, t, Pr, c, S)) - \\ & m_4 (f_6(c_4, t, Pr, c, 0.0) + f_6(c_5, t, Pr, c, 0.0))] . \quad (13) \end{aligned}$$

利用 $\tau_H = dU/dy|_{y=H}$ 和 $Nu_H = dT/dy|_{y=H}$ 可以分别得到另一块固定平板 $y = H$ 上的表面摩擦力和传热率:

$$\begin{aligned} \tau_H = & -\sum_m^{\infty} \left[m_6 f_4(c_5, t, \gamma, Da, 1.0, 1.0) + \frac{Gr}{c_1 c_2} [(m_7 f_1(c_3, t, Pr, c, S) - \right. \\ & m_4 f_6(c_3, t, Pr, c, 0.0) - m_5 f_4(c_4, t, \gamma, Da, 0.0, 0.0) + m_3 f_5(c_3, t, \gamma, Da, 0.0) + \\ & m_8 [m_9 (f_2(c_3, t, c_2, \gamma, Da) - m_3 f_5(c_3, t, \gamma, Da, c_2) - m_{10} f_3(c_3, t, c_2, c, Pr) + \\ & \left. m_4 f_6(c_4, t, Pr, c, c_2))] \right], \quad (14) \end{aligned}$$

$$Nu_H = \sum_0^{\infty} [m_7 f_1(c_6, t, Pr, c, S) - m_4 f_6(c_6, t, Pr, c, 0.0)] . \quad (15)$$

这里用到的常数和函数分别在附录 A 和附录 B 中给出.

3 结果和讨论

上面所得到的解是以下无量纲控制参数的函数:平板间距 (H), 放/吸热参数 (S), Prandtl 数 (Pr), Grashof 数 (Gr), 粘度比 (γ) 和 Darcy 数 (Da). 这里讨论它们对速度、温度、表面摩擦力和传热率的影响. 取 $Pr = 0.044$ 的水银为工质流体, 于是 20°C 时水银的

$$\begin{aligned} \nu &= 1.15\text{E} \times 10^{-3} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \quad \beta = 1/293 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad g = 980.0 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}, \\ H &= 2.0 \text{ cm}, \quad U_0 = 0.1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}. \end{aligned}$$

表 1 给出了不同温度差下不同的 Gr 值。

表 1 不同温度差下的 Grashof 数 (Gr)

Table 1 Grashof numbers (Gr) at different temperatures

$\Delta T/^\circ\text{C}$	$Gr = g\beta((T_w - T_h)/U_0)$
0	0.0
11.5	385.0
20	669.0
30	1 003.0
40	1 338.0

由图 2 可以看出,流体的温度与 Prandtl 数 (Pr) 成反比。因此, Pr 的增加会使系统的温度下降。下降趋势是因为 Prandtl 数 (Pr) 大时,热扩散减小。图 3 绘出了 Pr 对流动速度的全面影响。可以看出,当 Pr 值大时,流体呈现出著名的“蠕动”现象,而 Pr 值小时,流动更快。

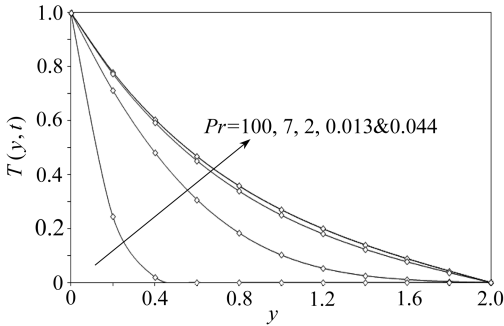


图 2 当 $t = 1.5$, $H = 2.0$, $S = 1.5$ 和 Pr 取不同数值时,温度的分布曲线

Fig. 2 Temperature profile with different Pr and $t = 1.5$, $H = 2.0$, $S = 1.5$

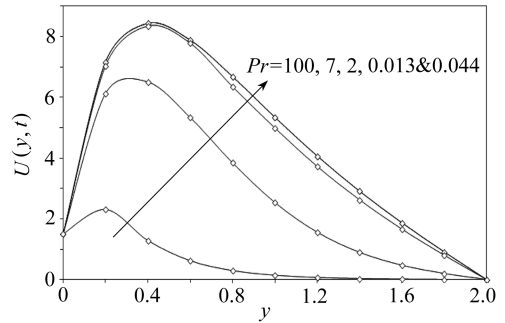


图 3 当 $t = 1.5$, $S = 1.5$, $\gamma = 1.5$, $Gr = 385.0$, $Da = 0.05$, $H = 2.0$ 以及 Pr 取不同数值时,速度的分布曲线

Fig. 3 Velocity profile at different Pr , and $t = 1.5$, $S = 1.5$, $\gamma = 1.5$, $Gr = 385.0$, $Da = 0.05$, $H = 2.0$

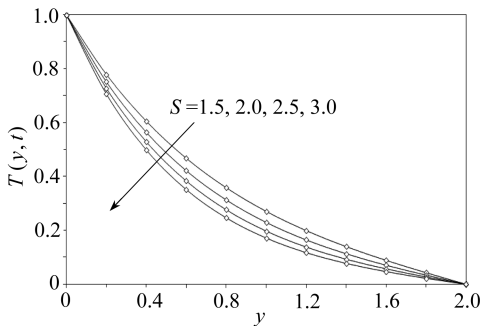


图 4 当 $t = 1.5$, $H = 2.0$, $Pr = 0.044$ 和 S 取不同数值时,温度的分布曲线

Fig. 4 Temperature profile with different S and $t = 1.5$, $H = 2.0$, $Pr = 0.044$

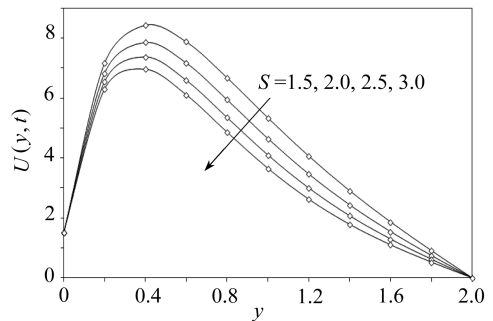


图 5 当 $t = 1.5$, $Da = 0.05$, $\gamma = 1.5$, $Gr = 385.0$, $Pr = 0.044$, $H = 2.0$ 时,速度随 S 的变化

Fig. 5 Velocity profile at different S and $t = 1.5$, $Da = 0.05$, $\gamma = 1.5$, $Gr = 385.0$, $Pr = 0.044$, $H = 2.0$

图 4 和图 5 分别给出了 $S (> 0)$ 对流体温度和速度的影响。可以看出,对不同的正 S 值,运动平板的速度是一样的。一般而言, S 的增加导致流体冷却,从而使边界层变薄。热浮力效应的

减小,使得流体速度下降。温度曲线有着类似的变化趋势。Jha 和 Ajibade^[5]指出当 $S < 0$ 时,速度和温度分布曲线都出现完全相反的趋势。

图 6 和图 7 分别描绘了竖直平行板间距对流体的温度和速度的影响。由于工质流体水银(Hg)的高传导性,温度梯度就小,从而速度也小。然而数值模拟显示,限制在小间距内的流体,系统的温度梯度受到极大抑制。因此,温度梯度和流体流动可以通过增加平板间距来提高。此外可以看到,随着平板间距和/或时间的增加,在加热平板附近出现最大速度。

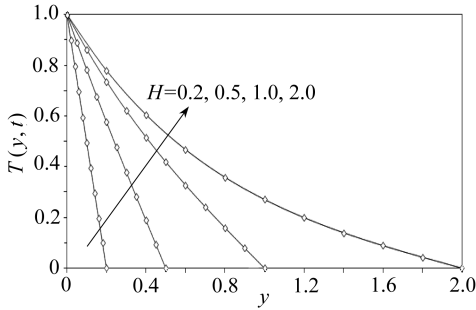


图 6 当 $t = 1.5$, $S = 1.5$, $Pr = 0.044$ 时,温度随 H 的变化

Fig. 6 Temperature profile with different H and $t = 1.5$, $S = 1.5$, $Pr = 0.044$

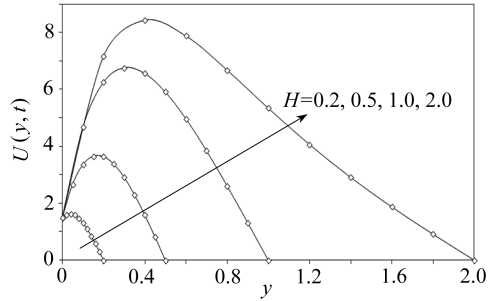


图 7 当 $t = 1.5$, $S = 1.5$, $\gamma = 1.5$, $Gr = 385.0$, $Pr = 0.044$, $Da = 0.05$ 时,速度随 H 的变化

Fig. 7 Velocity profile at different H and $t = 1.5$, $S = 1.5$, $\gamma = 1.5$, $Gr = 385.0$, $Pr = 0.044$, $Da = 0.05$

图 8 和图 9 分别描绘出管道内剖面流体温度和速度的变化。可以看出,平板 $y = 0$ 附近的温度要高些,同时可以看到,一旦靠近平板,温度又逼近于 0; 当 $y < H$ 时,温度随着时间的增加而升高。速度分布曲线也有着类似的变化趋势。

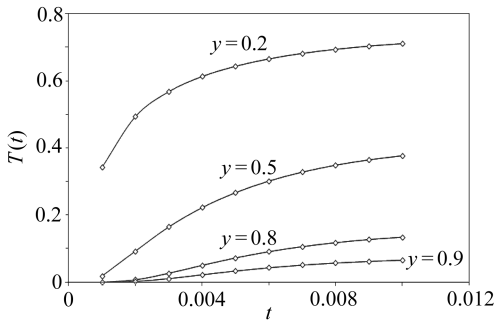


图 8 当 $Pr = 0.044$, $S = 1.5$, $H = 1.0$ 和 y 取不同数值时,流体温度随时间的变化

Fig. 8 Temperature profile at different fluid section with time, $Pr = 0.044$, $S = 1.5$, $H = 1.0$

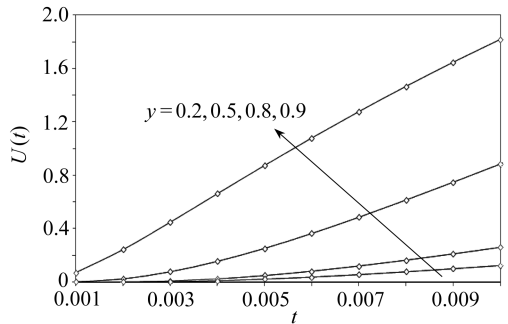


图 9 当 $Da = 0.05$, $Pr = 0.044$, $S = 1.5$, $\gamma = 1.5$, $Gr = 385.0$, $H = 1.0$ 和 y 取不同数值时,流体速度随时间的变化

Fig. 9 Velocity profile at different fluid section with time, $Da = 0.05$, $Pr = 0.044$, $S = 1.5$, $\gamma = 1.5$, $Gr = 385.0$, $H = 1.0$

图 10 表明,随着 Gr 的增加,流体的速度在增加。由方程(5) 还可以清楚地看到,没有外加热能($Gr = 0$) 的输入,不会造成流体流动的阻滞。当 $Gr = 0$ 时,由于平板 $y = 0$ 的加速运动,流体的流动速度按方程(16) 变化:

$$U(y, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} [(f_4(a, t, \gamma, Da, m_1, m_2) - f_4(b, t, \gamma, Da, m_1, m_2))] . \quad (16)$$

这时的结果正就是 Schlichting^[1] 在 $Da \rightarrow \infty$ 和 $\gamma = 1.0$ 时所得到的结果. 方程(16)表示在没有对流时, 竖直平板间充满多孔介质流体作不稳定 Couette 流动时的速度分布.

由图 11 可以看出, 随着 Darcy 数 (Da) 的增加, 管道中的渗透性提高了, 因此对运动流体的阻力下降了, 从而使流体的流动加快. 还可以看到, 由于加速运动平板的不均匀加热, 而另一块平板保持静止, 最大速度出现在加热板附近, 一般来说, 流体的速度随着 Da 和时间 ($U(t = 1.5) \leq U(t = 1.6)$) 的增加而增加. 图 12 分析了流体粘度比系数 γ 对速度的影响. 可以看出, 虽然运动平板上 γ 发生了改变, 但是两端的流体速度恰好是一样的. 然而一般而言, 图 12 表明随着 γ 的增加, 流体的粘度变大了, 引起运动分子阻力的增加, 因此流体的流动变慢了.

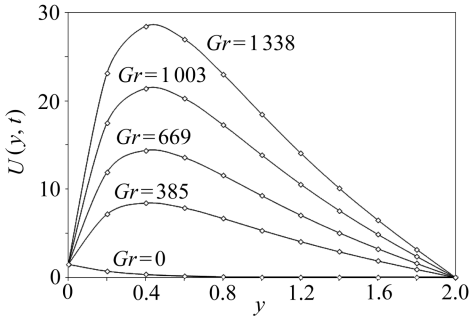


图 10 当 $t = 1.5, S = 1.5, \gamma = 1.5, Da = 0.05, Pr = 0.044, H = 2.0$ 和 Gr 取不同数值时, 速度的分布曲线

Fig. 10 Velocity profile at different Gr and $t = 1.5, S = 1.5, \gamma = 1.5, Da = 0.05, Pr = 0.044, H = 2.0$

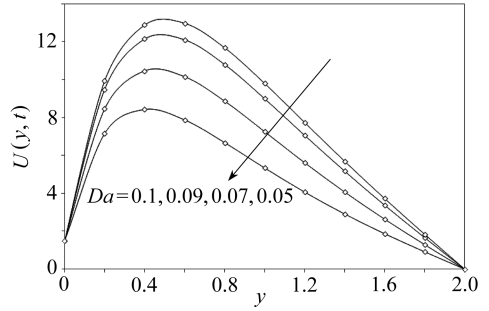


图 11 当 $t = 1.5, S = 1.5, \gamma = 1.5, Gr = 385.0, Pr = 0.044, H = 2.0$ 和 Da 取不同数值时, 速度的分布曲线

Fig. 11 Velocity profile at different Da and $t = 1.5, S = 1.5, \gamma = 1.5, Gr = 385.0, Pr = 0.044, H = 2.0$

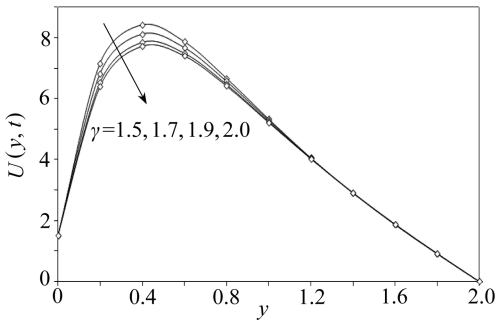


图 12 当 $t = 1.5, S = 1.5, Da = 0.05, Gr = 385.0, Pr = 0.044, H = 2.0$ 和 γ 取不同数值时, 速度的分布曲线

Fig. 12 Velocity profile at different γ and $t = 1.5, S = 1.5, Da = 0.05, Gr = 385.0, Pr = 0.044, H = 2.0$

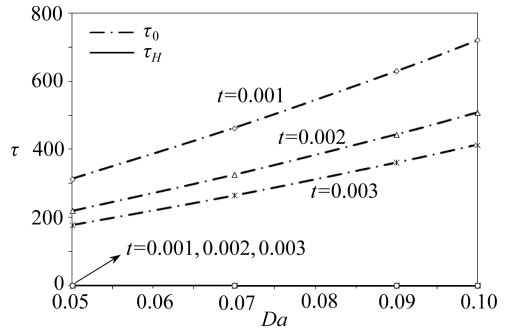


图 13 当 $H = 2.0, Pr = 0.044, Gr = 385.0, S = 1.5, \gamma = 1.5$ 和 t 取不同数值时, 表面摩擦力随 Da 的变化

Fig. 13 Skin friction at different Da, t and $H = 2.0, Pr = 0.044, Gr = 385.0, S = 1.5, \gamma = 1.5$

图 13 ~ 16 分别给出了表面摩擦力随 Da, S, Pr 和 H 的变化. 可以看出, 对于上述几个参数, 加热平板上的表面摩擦力都随着时间的增加而减小. 尽管在另一块平板上也在减小, 但不那么重要. 一般而言, 表面摩擦力在运动平板上越高, 它随着 Da, Pr 和 S 的增加而增加(见

图 13 ~ 15), 但随着垂直平板间距 H 的增加而减小(见图 16)。

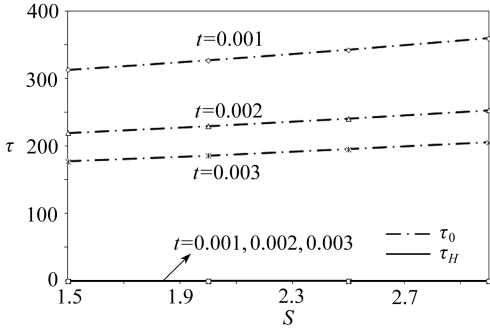


图 14 当 $H = 2.0$, $Pr = 0.044$, $Gr = 385.0$, $Da = 0.05$, $\gamma = 1.5$ 和 t 取不同数值时, 表面摩擦力随 S 的变化

Fig. 14 Skin friction at different S , t and $H = 2.0$, $Pr = 0.044$, $Gr = 385.0$, $Da = 0.05$, $\gamma = 1.5$

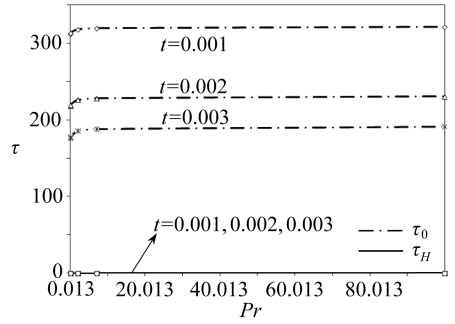


图 15 当 $H = 2.0$, $Da = 0.05$, $Gr = 385.0$, $S = 1.5$, $\gamma = 1.5$ 和 t 取不同数值时, 表面摩擦力随 Pr 的变化

Fig. 15 Skin friction at different Pr , t and $H = 2.0$, $Da = 0.05$, $Gr = 385.0$, $S = 1.5$, $\gamma = 1.5$

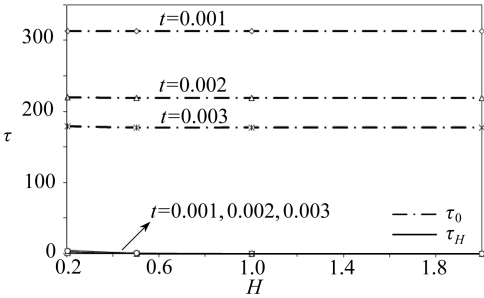


图 16 当 $Da = 0.05$, $Pr = 0.044$, $Gr = 385.0$, $S = 1.5$, $\gamma = 1.5$ 和 t 取不同数值时, 表面摩擦力随 H 的变化

Fig. 16 Skin friction at different H , t and $Da = 0.05$, $Pr = 0.044$, $Gr = 385.0$, $S = 1.5$, $\gamma = 1.5$

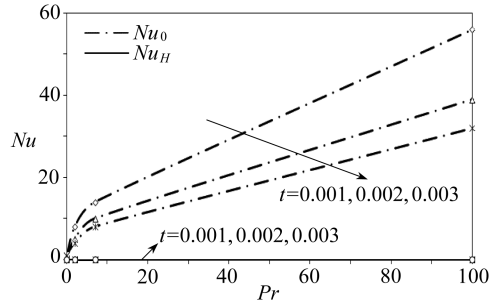


图 17 当 $S = 1.5$, $H = 2.0$ 和 t 取不同数值时, 传热率随 Pr 的变化

Fig. 17 Rate of heat transfer with different Pr , t , $S = 1.5$, $H = 2.0$

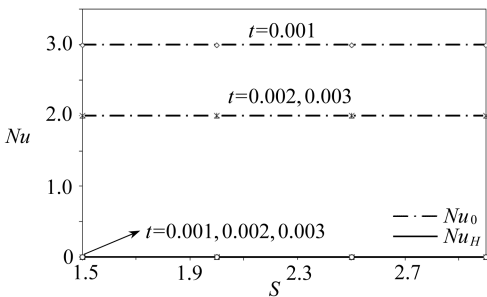


图 18 当 $Pr = 0.044$, $H = 2.0$ 和 t 取不同数值时, 传热率随 S 的变化

Fig. 18 Rate of heat transfer with different S , t and $Pr = 0.044$, $H = 2.0$

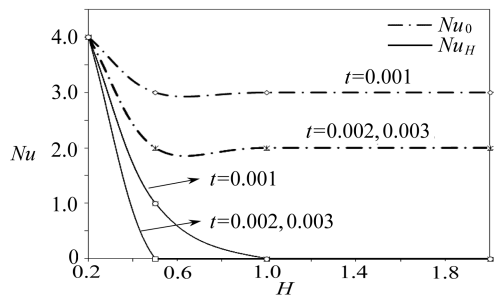


图 19 当 $Pr = 0.044$, $S = 1.5$ 和 t 取不同数值时, 传热率随 H 的变化

Fig. 19 Rate of heat transfer with different H , t and $Pr = 0.044$, $S = 1.5$

图 17 ~ 19 分别描述了传热率 (Nu) 随 Pr, S 和 H 的变化. 由图 17 可以看出, 从加热平板到流体的传热率 (Nu), 随着 Pr 的增加而增加, 随着时间的增加而减小. 图 18 清楚地表明, 随着时间的增加, Nu 在减小, 并且 S 的变化, 加热平板上的 Nu 不变. 这是因为放 / 吸热系数 (S) 和 Prandtl 数 (Pr) 的增加, 等同于流体的热传导率减小, 从而降低了流体的温度. 由于两平板间温度梯度的减小, 将引起传热率的下降.

最后, 图 19 的数值模拟显示, 随着平板间距 H 和时间的增加, 传热率在某些时段在下降, 并在两块平板上都变为常数.

3 结 论

从前面的数值模拟图形可以得到如下结论:

- 1) 在竖直管道中的不同剖面, 流体的流动和温度随时间的增长而增加, 且在运动平板附近更高;
- 2) 流体的运动和温度可以通过增加平板间距 H 来提高;
- 3) 多孔基体渗透性的增加会引起表面摩擦力的增加;
- 4) 两平板间距的增加会引起表面摩擦力和传热率的减小.

附 录 A

本文所用到的常数:

$$a = 2mH + y, \quad b = 2mH + 2H - y, \quad c = S/Pr, \quad (A1)$$

$$c_1 = \gamma Pr - 1, \quad c_2 = \frac{1 - SrDa}{c_1 Da}, \quad c_3 = 2mH, \quad c_4 = 2mH + 2H, \quad c_5 = 2mH + H, \quad (A2)$$

$$m_1 = t + \frac{a\sqrt{Da}}{\sqrt{t}}, \quad m_2 = t - \frac{a\sqrt{Da}}{\sqrt{t}}, \quad m_3 = \frac{1}{\sqrt{\gamma\pi t}}, \quad m_4 = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{t\pi}}, \quad (A3)$$

$$m_5 = \frac{1}{\sqrt{\pi Da}}, \quad m_6 = \frac{\sqrt{Da}}{2\sqrt{t}}, \quad m_7 = \sqrt{S}, \quad m_8 = \exp(c_2 t), \quad (A4)$$

$$m_9 = \sqrt{\frac{1}{\gamma} \left(c_2 + \frac{1}{Da} \right)}, \quad m_{10} = \sqrt{Pr(c_2 + c)}, \quad \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz, \quad (A5)$$

附 录 B

速度、温度、表面摩擦力和传热率定义中出现的函数:

$$f_1(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = \exp(d_1 \sqrt{d_5}) \operatorname{erfc} \left(\frac{d_1}{2} \sqrt{\frac{d_3}{d_2}} + \sqrt{d_2 d_4} \right) + \exp(-d_1 \sqrt{d_5}) \operatorname{erfc} \left(\frac{d_1}{2} \sqrt{\frac{d_3}{d_2}} - \sqrt{d_2 d_4} \right), \quad (B1)$$

$$f_2(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = \exp(d_2 d_3) \left[\exp \left(d_1 \sqrt{\frac{1}{d_4} \left(d_3 + \frac{1}{d_5} \right)} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{d_1}{2\sqrt{d_4 d_2}} + \sqrt{d_2 \left(d_3 + \frac{1}{d_5} \right)} \right) + \exp \left(-d_1 \sqrt{\frac{1}{d_4} \left(d_3 + \frac{1}{d_5} \right)} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{d_1}{2\sqrt{d_4 d_2}} - \sqrt{d_2 \left(d_3 + \frac{1}{d_5} \right)} \right) \right], \quad (B2)$$

$$f_3(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = \exp(d_2 d_3) \left[\exp \left(d_1 \sqrt{d_5 (d_3 + d_4)} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{d_1}{2} \sqrt{\frac{d_5}{d_2}} + \sqrt{d_2 d_5 (d_3 + d_4)} \right) + \right]$$

$$\exp(-d_1 \sqrt{d_5(d_3 + d_4)}) \operatorname{erfc}\left(\frac{d_1}{2} \sqrt{\frac{d_5}{d_2}} - \sqrt{d_2 d_5(d_3 + d_4)}\right) \Big], \quad (\text{B3})$$

$$f_4(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6) = \exp\left(\frac{d_1}{\sqrt{d_3 d_4}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d_1}{2\sqrt{d_2 d_3}} + \sqrt{\frac{d_2}{d_4}}\right) d_5 + \exp\left(-\frac{d_1}{\sqrt{d_3 d_4}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d_1}{2\sqrt{d_2 d_3}} - \sqrt{\frac{d_2}{d_4}}\right) d_6, \quad (\text{B4})$$

$$f_5(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = \exp\left(\frac{d_1}{\sqrt{d_3(d_4 + d_5)}} - \left(\frac{d_1}{2\sqrt{d_2 d_3}} + \sqrt{\left(d_5 + \frac{1}{d_4}\right) d_2}\right)^2\right) + \exp\left(-\frac{d_1}{\sqrt{d_3(d_4 + d_5)}} - \left(\frac{d_1}{2\sqrt{d_2 d_3}} - \sqrt{\left(d_5 + \frac{1}{d_4}\right) d_2}\right)^2\right), \quad (\text{B5})$$

$$f_6(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = \exp\left(d_1 \sqrt{d_3(d_4 + d_5)} - \left(\frac{d_1 \sqrt{d_3}}{2\sqrt{d_2}} + \sqrt{(d_5 + d_4) d_2}\right)^2\right) + \exp\left(-d_1 \sqrt{d_3(d_4 + d_5)} - \left(\frac{d_1 \sqrt{d_3}}{2\sqrt{d_2}} - \sqrt{(d_5 + d_4) d_2}\right)^2\right), \quad (\text{B6})$$

$$f_7(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6) = d_5 \exp\left(\frac{d_1}{\sqrt{d_3 d_4}} - \left(\frac{d_1}{2\sqrt{d_2 d_3}} + \sqrt{\frac{d_2}{d_4}}\right)^2\right) + d_6 \exp\left(-\frac{d_1}{\sqrt{d_3 d_4}} - \left(\frac{d_1}{2\sqrt{d_2 d_3}} - \sqrt{\frac{d_2}{d_4}}\right)^2\right), \quad (\text{B7})$$

$$f_8(d_1, d_2, d_3, d_4) = \exp\left(\frac{d_1}{\sqrt{d_3 d_4}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d_1}{2\sqrt{d_2 d_3}} + \sqrt{\frac{d_2}{d_4}}\right) d_5 - \exp\left(-\frac{d_1}{\sqrt{d_3 d_4}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d_1}{2\sqrt{d_2 d_3}} - \sqrt{\frac{d_2}{d_4}}\right) d_6. \quad (\text{B8})$$

参考文献 (References) :

- [1] Schlichting H. *Boundary Layer Theory*[M]. New York: McGraw-Hill, 1968: 75-78.
- [2] Ishigaki H. An exact periodic solution of the energy equation[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1971, **50**(4): 657-668.
- [3] Singh A K. Natural convection in unsteady Couette motion[J]. *Defense Science Journal*, 1988, **38**(1): 35-41.
- [4] Jha B K, Ajibade A O. Unsteady free convection Couette flow of heat generating/absorbing fluid[J]. *International Journal of Energy and Technology*, 2010, **2**(12): 1-9.
- [5] Jha B K, Ajibade A O. Free convective flow of heat generating/absorbing fluids between vertical porous plates with periodic heat input[J]. *International Communication in Heat and Mass Transfer*, 2009, **36**(6): 624-631.
- [6] Jha B K. Transient free-convective flow in a vertical channel with heat sink[J]. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2003, **8**(3): 497-502.
- [7] Jha B K, Ajibade A O. Transient natural convection flow between vertical parallel plates with temperature dependent heat sources/sinks[J]. *Journal of Heat Technology*, 2009, **27**(2): 87-94.
- [8] Ingham D B, Merkin J A, Pop I. Flow past a suddenly cooled vertical flat surface in a saturated porous medium[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1982, **25**: 1916-1919.

- [9] Hong J T, Yamada Y, Tien C L. Effects of non-Darcian and non-uniform porosity on vertical-plate natural convective in porous media[J]. *ASME Journal of Heat Transfer*, 1987, **109**(2): 356-362.
- [10] Cheng P, Hsu C T. Fully developed forced convection flow through an annular packed-sphere bed with wall effects[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1986, **29**(12): 2373-2383.
- [11] Cheng P, Hsu C T. Effects of radial thermal dispersion on fully developed forced convection in a cylindrical tube[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1987, **30**(11): 1843-1853.
- [12] Cheng P, Vortmeyer D. Transverse thermal dispersion and wall channeling in a packed bed with forced convection flow[J]. *Chemical Engineering Science*, 1988, **43**: 2523-2532.
- [13] Jha B K. Transient natural convection through vertical porous stratum[J]. *Heat and Mass Transfer*, 1997, **33**(3): 261-263.

Unsteady Natural Convection Couette Flow of Heat Generating/Absorbing Fluid Between Vertical Parallel Plates Filled With Porous Material

Basant K. Jha¹, Muhammad K. Musa²

(1. *Department of Mathematics, Ahmadu Bello University, Zaria 234, Nigeria;*

2. *Mathematics Unit, School of Basic and Remedial Studies, Ahmadu Bello University, Funtua 6007, Nigeria)*

Abstract: The extended Brinkman Darcy model for momentum equation, and an energy equation were used to calculate the unsteady natural convection Couette flow of a viscous incompressible heat generating/absorbing fluid in a vertical channel (formed by two infinite vertical parallel plates) filled with fluid-saturated porous medium. The flow was triggered by the asymmetric heating and the acceleration motion of one of the bounding plates. The governing equations were simplified by the reasonable dimensionless parameters and solved analytically by the Laplace transform techniques to obtain closed form solutions for the velocity and temperature profiles. Then the skin friction as well as the rate of heat transfer were consequently derived. It is noticed that at different sections within the vertical channel, the fluid flow as well as the temperature profile increase with time and are both higher near the moving plate. In particular, increasing the gap between the plates increases the velocity and the temperature of the fluid, however, reduces the skin friction and the rate of heat transfer.

Key words: heat generating/absorbing fluid; natural convection flow; porous material; acceleration motion