文章编号:1000-0887(2012)03-0280-12 ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887

二阶流体在旋转坐标系中的三维管道流动*

S·侯斯纳因[1], A·梅姆德[2], A·阿里[1]

(1. 古艾德-阿赞姆大学 数学系, 伊斯兰堡,巴基斯坦;
2. 国际伊斯兰大学 数学系, 伊斯兰堡,巴基斯坦)

摘要: 就两个水平板构成的旋转系统,在磁场作用下分析二阶磁流体在其间的流动.下表面是一块可伸展的平面,上面是一块多孔的固体平板.选用合适的变换,将质量和动量的守恒方程,简化为耦合的非线性常微分方程组.应用最强大的分析技术, 即同伦分析法(HAM), 得到该非线性耦合方程组的级数解.结果用图形给出, 并详细地讨论了无量纲参数 Re, λ, Ha^2, α 和 K^2 对速度场的影响.

关 键 词: 三维流动; 二阶流体; MHD; 可伸展平面; 管道流动; 旋转坐标系

中图分类号: O357.1;O361.3 **文献标志码:** A

DOI:10.3879/j.issn.1000-0887.2012.03.002

引 言

在过去的几十年里,越过伸展平面时的层流边界层研究受到了广泛关注.这是因为在冶金和聚合物工业中,它们有着重要的技术应用.例如,很多涉及聚合物的施工工艺中,包括连续的聚合条,在模具中挤压时的冷却,然后从模具中提取,冷却和提取的聚合条随后被拉伸到所需的厚度.成品的质量很大程度上取决于伸展率和冷却率.伸展平面上的流动,还可以在金属材料的连铸、玻璃的吹制,以及合成纤维的纺纱等方面找到应用.针对这些应用,Crane[1]最先开始研究伸展平面上的边界层流动.他们假设平面上的速度随到裂缝间的距离呈线性变化.很多研究者假设各种不同的速度和热边界条件,进一步拓展了 Crane[1]的研究.例如,Gupta 等[2]就伸展平面有吸入或吹喷出功能时,对传热传质边界层的相似解进行了分析.Chen 等[3]将 Gupta 等[2]的研究推广到非等温情况.Grubka 等[4]就表面温度按幂律变化时,对相同问题的热传导进行了分析.Chiam[5]研究了非等温伸展平面上热传递时的磁流体动力学.很多学者研究过伸展平面边界层流动中的热传递(如文献[6-15]).

在上述提及的研究中,学者们仅考虑为 Newton 流体.在过去的几十年里,随着科技的进步,在非 Newton 流体的领域中,很多学者尝试求解更为复杂的运动方程.很多材料,如聚合物溶解或融化、钻井泥浆、水银珠、某些油类、润滑油和很多不同的乳剂,都属非 Newton 流体类.非 Newton 流体的性质可以用很多模型来描述,但不是所有的性质.然而,这些模型或本构方

---

* **收稿日期:** 2010-10-18; **修订日期:** 2011-12-05
作者简介: Ahmer Mehmood(联系人. E-mail: ahmerqau@yahoo.co.uk).
本文原文为英文,黄雅意 译,张禄坤 校.

程,无法描述出非 Newton 流体的所有特性,如正应力的松弛、弹性效应和存储效应等.非 Newton 流体本构方程的描述,比 Newton 流体更加复杂且非线性程度更高.尽管非线性可能导致存在多个解,但是 Troy 等[16]指出,伸展平面上二阶流体流动的控制方程有一个精确解.然而,随后的研究揭示,方程可以有多个解,见 Rao[17]和 Chang 等[18]的研究.此外,Pontrelli[19]研究了非 Newton 参数与解的相关性.

对不同类型流体提出的所有非 Newton 模型中,二阶流体是最简单的一个子类.二阶流体的这个有利条件,在许多涉及非 Newton 流体的研究中,都愿将非 Newton 流体看作二阶流体.在过去的几十年里,非 Newton 流体受到工程师和科学家的广泛关注,它们大量地应用于生物医学工程、石油工业、聚合物工艺、为液态金属设计冷却系统、泵,以及原油的净化等.鉴于所有这些应用,一些学者为二阶流体的边界层流动[20-25],提出了不同的假设和几何结构.近年来,非 Newton 流体在旋转圆盘间的流动受到极大的关注,这类流动的几何构造有着多种技术应用,如润滑.导电流体的旋转流动,在宇宙和地球物理流体动力学中,在太阳物理学中,包括太阳黑子的活动、太阳周期和星体的旋转磁场结构等,都有着重要的应用.Huilgol 和 Keller[26]研究粘弹性流体在旋转圆盘间的流动.Huilgol 和 Rajagopal[27]研究粘弹性流体在旋转圆盘间的非轴对称流动,他们的研究表明与粘性流体类似,其解不是轴对称的,并可能出现 Oldroyd 流体的情况.文献的快速搜索显示,在一个下壁面为伸展平面的旋转坐标系中,非 Newton 流体管道流动的研究鲜有报道.Vajravelu[28]就粘性流体研究过同样的问题,作者给出了非线性控制系统的摄动解和数值解.文献搜索表明,三维旋转流动的报道更为少见.据我们所知,关于导电的二阶流体,在旋转坐标系中作三维管道流动的分析,至今尚未见诸报道.考虑到这种情况,本文在一个以两块水平板为边界的旋转坐标系中,下层板是可伸展平面时,研究二阶流体的轴对称磁流体的流动,研究其非线性耦合系统解析解的特性.使用最强大的技术,即同伦分析法,得到问题的解析解[29].同伦[30]是拓扑学的一个基本概念[31].很多研究者将该方法成功地应用于复杂的非线性问题[32-42],证明了该方法的有效性.

本文安排如下:第 1 节, 给出流动问题的数学公式; 第 2 节, 给出问题的解析解; 第 3 节, 将结果用图形表示并进行讨论; 第 4 节,得出最终的结论.

1　流 动 分 析

考虑在两块水平平行板之间不可压缩导电的二阶流体,流体和平板同时以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 绕垂直于平板的轴旋转.以这样的一种方式建立坐标系:沿平板方向取 x 轴,y 轴与 x 轴垂直,z 轴与 xy 平面垂直,图 1 给出了问题的几何图形.沿 x 轴方向作用有两个大小相等、方向相反的力,使得平板可伸展,并保持在固定点 $(0, -h, 0)$ 位置.常磁场强度 $\boldsymbol{B} = (0, \boldsymbol{B}_0, 0)$ 沿 y 轴作用,使系统得以旋转.这里,因为磁 Reynolds 数取得非常小,所以感应磁场可以忽略不计[43].

合理的速度场形式为

$$\boldsymbol{V} = [\, u(x,y),\ v(x,y),\ w(x,y)\,], \tag{1}$$

其中, u, v, w 分别为 x, y 和 z 方向上的速度分量.

在一个旋转坐标系中,MHD 流动的运动方程为

$$\rho\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} + 2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\right] = \operatorname{div}\boldsymbol{T} + (\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}), \tag{2}$$

这里, $\boldsymbol{V}$ 为速度矢量,$\boldsymbol{I}$ 为电流密度矢量,$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{b}$ 为总的磁场强度,其中 $\boldsymbol{B}_0$ 为外加磁场强度,$\boldsymbol{b}$ 为感应磁场强度, ρ 为流体密度,$\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 为物质导数,$\boldsymbol{T}$ 为 Cauchy 应力张量,$\boldsymbol{r}$ 为位置矢量.粘弹

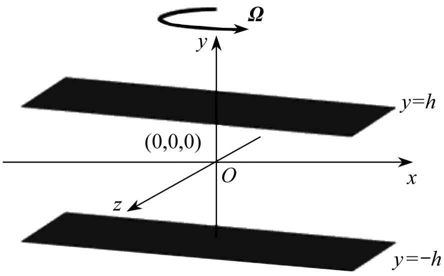

图 1 流动的几何结构图

Fig. 1 Flow configuration

性二阶流体的 Cauchy 应力张量如下给出：

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \mu\boldsymbol{A}_1 + \alpha_1\boldsymbol{A}_2 + \alpha_2\boldsymbol{A}_1^2, \tag{3}$$

其中，p 为压力，根据不可压缩性确定，μ 为粘度，α_1 和 α_2 为二阶流体的模数，$\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 为 Rivlin-Ericksen 张量[44]的前面 2 个，定义为

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}_1}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{L} = \nabla\boldsymbol{V}. \tag{6}$$

若二阶流体的所有运动满足 Clausius-Dehum 不等式，同时假设当流体局部静止时，流体的单位 Helmholtz 自由能达到最小，则要求二阶流体的模数满足 $\mu \geqslant 0$，$\alpha_1 > 0$ 和 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$.

由方程(1)～(6)可导出连续性方程及动量方程：

连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{7}$$

x 方向的动量方程

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + 2\Omega w = & \\ & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + \frac{\alpha_1}{\rho}\left[2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} + \right. \\ & 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + u\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x} + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \\ & 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u\frac{\partial^3 v}{\partial y^2\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \\ & \left.\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right] - \frac{\sigma\beta_0^2 u}{\rho}, \end{aligned} \tag{8}$$

y 方向的动量方程

$$\begin{aligned} u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] + \\ & \frac{\alpha_1}{\rho}\left[2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + u\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} + v\frac{\partial^3 v}{\partial y^2\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial xy} + \right. \\ & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial y} + \\ & u\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + v\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \\ & \left.\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + 2u\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right], \end{aligned} \tag{9}$$

z 方向的动量方程

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} - 2\Omega u = \nu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] +$$

$$\frac{\alpha_1}{\rho}\Big[u\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+u\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+v\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big]-\frac{\sigma\beta_0^2 w}{\rho}. \tag{10}$$

方程(10)中不含 $\partial p^*/\partial z$,蕴含着没有绕 z 轴的横向流动.

相应合理的边界条件为

$$u=Ex,\ v=0,\ w=0,\qquad 当\ y=-h, \tag{11a}$$
$$u=0,\ v=-V_0,\ w=0,\qquad 当\ y=h. \tag{11b}$$

引入以下的无量纲变量:

$$\eta=y/h',\ u=Exf'(\eta),\ v=-Ehf(\eta),\ w=Exg(\eta), \tag{12}$$

其中,E 是伸展常数,量纲为(时间)$^{-1}$,撇号表示对 η 的导数.

将方程(12)代入方程(8)~(10),再消去修正的压力梯度,得到以下耦合的非线性问题:

$$f'''' - Ha^2 f'' - 2K^2 g - Re(f'f'' - ff''') +$$
$$\alpha(4f''f''' - ff''''' + 3g'g'' + gg''' + f'f'''') = 0, \tag{13}$$
$$g'' - Re(gf' - g'f) + 2K^2 f' - Ha^2 g + \alpha(f'g'' - fg'''), \tag{14}$$
$$f=0,\ f'=1,\ g=0,\qquad 当\ \eta=-1, \tag{15a}$$
$$f=\lambda,\ f'=0,\ g=0,\qquad 当\ \eta=1, \tag{15b}$$

其中,$\lambda=V_0/(Eh)$ 为吸入/喷出参数,Re 为粘性参数,Ha 为 Hartman 数,α 为二阶参数,K 为旋转参数,定义如下:

$$Re=\frac{Eh^2}{\nu},\ Ha^2=\frac{\sigma\beta_0^2 h}{\rho\nu},\ K^2=\frac{\Omega h^2}{\nu},\ \alpha=\frac{\alpha_1 E}{\mu}.$$

2　同伦解析解

上面的边界条件表明,$f(\eta)$ 和 $g(\eta)$ 的解表达式可以由基函数

$$\{\eta^q \mid q\geqslant 0\} \tag{16}$$

以如下的形式表达:

$$f_m(\eta)=\sum_{n=0}^{2m+1} a_{n,m}\eta^n, \tag{17}$$
$$g_m(\eta)=\sum_{n=0}^{2m+1} b_{n,m}\eta^n, \tag{18}$$

当 $m>1$ 时,这里的 $a_{m,n}^n$ 和 $b_{m,n}^n$ 为常系数. 以解表达式(17)和(18)为基础,由边界条件(15a)和(15b),可以直接取得 $f(\eta)$ 和 $g(\eta)$ 的初始近似值:

$$f_0(\eta)=\frac{1-\lambda}{4}\eta^3-\frac{\eta^2}{4}+\left(\frac{3\lambda}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right), \tag{19}$$
$$g_0(\eta)=0, \tag{20}$$

以及形式如下的辅助线性算子:

$$\mathcal{L}_f=\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}\eta^4}, \tag{21}$$
$$\mathcal{L}_g=\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2}, \tag{22}$$

并满足以下性质:

$$\mathcal{L}_f=[C_1\eta^3+C_2\eta^2+C_3\eta+C_4]=0,\tag{23}$$

$$\mathcal{L}_g=[C_5\eta+C_6]=0,\tag{24}$$

其中 $C_i(i=1,\cdots,6)$ 为常数. 基于方程(13)和(14),可以定义非线性算子 $\mathcal{N}_f[\hat{f}(\eta;p),\hat{g}(\eta;p)]$ 和 $\mathcal{N}_g[\hat{f}(\eta;p),\hat{g}(\eta;p)]$ 如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_f[\hat{f}(\eta;p),\hat{g}(\eta;p)]=&\frac{\partial^4\hat{f}(\eta;p)}{\partial\eta^4}-Ha^2\frac{\partial^2\hat{f}(\eta;p)}{\partial\eta^2}-2K^2\hat{g}(\eta;p)-\\&Re\left(\frac{\partial\hat{f}(\eta;p)}{\partial\eta}\frac{\partial^2\hat{f}(\eta;p)}{\partial\eta^2}-\hat{f}(\eta;p)\frac{\partial^3\hat{f}(\eta;p)}{\partial\eta^3}\right)+\\&\alpha\left(4\frac{\partial^2\hat{f}(\eta;p)}{\partial\eta^2}\frac{\partial^3\hat{f}(\eta;p)}{\partial\eta^3}-\hat{f}(\eta;p)\frac{\partial^5\hat{f}(\eta;p)}{\partial\eta^5}+3\frac{\partial\hat{g}(\eta;p)}{\partial\eta}\frac{\partial^2\hat{g}(\eta;p)}{\partial\eta^2}+\right.\\&\left.\hat{g}(\eta;p)\frac{\partial^3\hat{g}(\eta;p)}{\partial\eta^3}+\frac{\partial\hat{f}(\eta;p)}{\partial\eta}\frac{\partial^4\hat{f}(\eta;p)}{\partial\eta^4}\right),\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_g[\hat{f}(\eta;p),\hat{g}(\eta;p)]=&\frac{\partial^2\hat{g}(\eta;p)}{\partial\eta^2}-\\&Re\left(\hat{g}(\eta;p)\frac{\partial\hat{f}(\eta;p)}{\partial\eta}-\frac{\partial\hat{g}(\eta;p)}{\partial\eta}\hat{f}(\eta;p)\right)+\\&2K^2\frac{\partial\hat{f}(\eta;p)}{\partial\eta}-Ha^2\hat{g}(\eta;p)+\\&\alpha\left(\frac{\partial\hat{f}(\eta;p)}{\partial\eta}\frac{\partial^2\hat{g}(\eta;p)}{\partial\eta^2}-\hat{f}(\eta;p)\frac{\partial^3\hat{g}(\eta;p)}{\partial\eta^3}\right).\end{aligned}\tag{26}$$

设 $\hbar_f$ 和 $\hbar_g$ 为非零的辅助参数. 构造零阶的变形方程:

$$(1-p)\mathcal{L}_f[\hat{f}(\eta;p)-f_0(\eta)]=p\hbar_f\mathcal{N}_f[\hat{f}(\eta;p),\hat{g}(\eta;p)],\tag{27}$$

$$(1-p)\mathcal{L}_g[\hat{g}(\eta;p)-g_0(\eta)]=p\hbar_g\mathcal{N}_g[\hat{f}(\eta;p),\hat{g}(\eta;p)],\tag{28}$$

并满足边界条件

$$\hat{f}(-1;p)=0,\ \hat{f}'(-1;p)=1,\ f(1;p)=\lambda,\ \hat{f}'(1;p)=0,\tag{29}$$

$$\hat{g}(-1;p)=0,\ \hat{g}(1;p)=0,\tag{30}$$

其中 $p\in[0,1]$ 为嵌入参数. 当 $p=0$ 和 $p=1$ 时,可以由方程(27)和(28),分别得到初始估计近似值和最终解:

$$\hat{f}(\eta;0)=f_0(\eta),\ \hat{g}(\eta;0)=g_0(\eta),\tag{31}$$

$$\hat{f}(\eta;1)=f(\eta),\ \hat{g}(\eta;1)=g(\eta).\tag{32}$$

于是,随着 p 由0增加到1,$\hat{f}(\eta)$ 和 $\hat{g}(\eta)$ 分别从所考虑问题的初始估计 $f_0(\eta)$ 和 $g_0(\eta)$,变到最终解 $f(\eta)$ 和 $g(\eta)$. 将 $\hat{f}(\eta;p)$ 和 $\hat{g}(\eta;p)$ 按嵌入参数 p 进行 Taylor 级数展开,即

$$f(\eta)=f_0(\eta)+\sum_{m=1}^{\infty}f_m(\eta),\tag{33}$$

$$g(\eta)=g_0(\eta)+\sum_{m=1}^{\infty}g_m(\eta),\tag{34}$$

其中

$$f_m(\eta)=\frac{1}{m!}\left.\frac{\partial^m f(\eta;p)}{\partial p^m}\right|_{p=0},\tag{35}$$

$$g_m(\eta)=\frac{1}{m!}\left.\frac{\partial^m g(\eta;p)}{\partial p^m}\right|_{p=0}.\tag{36}$$

在 $p=0$ 处,将零阶变形方程(27) 和(28) 对 p 求导 m 次,并除以 $m!$,得到 m 阶变形方程

$$\mathcal{L}_f[f_m(\eta)-\chi_m f_{m-1}(\eta)]=\hbar_f R_{fm}(\eta),\tag{37}$$

$$\mathcal{L}_g[g_m(\eta)-\chi_m g_{m-1}(\eta)]=\hbar_g R_{gm}(\eta),\tag{38}$$

相应的边界条件为

$$f_m(-1)=f_m(1)=f_m'(-1)=f_m'(1)=0,\tag{39}$$

$$g_m(-1)=g_m(1)=0,\tag{40}$$

其中

$$R_{fm}(\eta)=f_{m-1}'''' -Ha^2 f_{m-1}''-2K^2 g_{m-1}-Re\sum_{k=0}^{m-1}(f_{m-1-k}'f_k''-f_{m-1-k}f_k''')+\alpha\sum_{k=0}^{m-1}(4f_{m-1-k}''f_k'''-f_{m-1-k}f_k''''' +3g_{m-1-k}'g_k''+g_{m-1-k}g_k'''+f_{m-1-k}'f_k''''),\tag{41}$$

$$R_{gm}(\eta)=g_{m-1}''+2K^2 f_{m-1}'-Ha^2 g_{m-1}-Re\sum_{k=0}^{m-1}(g_{m-1-k}f_k'-g_{m-1-k}'f_k)+\alpha\sum_{k=0}^{m-1}(f_{m-1-k}'g_k''-f_{m-1-k}g_k'''),\tag{42}$$

$$\chi_m=\begin{cases}0, & m=1,\\ 1, & m>1.\end{cases}\tag{43}$$

利用 Mathematica 计算软件,求解上述方程组.

HAM 解的精度和收敛性

级数解(33)和(34)包含了辅助参数 $\hbar_f$ 和 $\hbar_g$,可以画出所谓 $\hbar$ 曲线来选取合适的数值,确保级数(33)和(34)的收敛性. 有一点必须指出,正如 Liao 在文献[29]所提到的,HAM 解的收敛性高度依赖于辅助参数. 合理的辅助参数值可以画出所谓的 $\hbar$ 曲线来确定. 分析表明,随着二阶参数 α 值的增加,$\hbar_f$ 和 $\hbar_g$ 容许值的范围朝0 变化(参见图2 和图3). 因而,当 $\alpha=0.5$ 时,$\hbar_f$ 和 $\hbar_g$ 容许值的范围分别为[−0.7,−0.1]和[−1.4,−0.3]. 画出剩余误差随辅助参数的变化(参见图4 和图5),以及 HAM 解的不同阶近似解(参见表1),可以证明级数解的收敛性. 由图4 和图5 可以清楚地看出,当 $\hbar_f=-0.7$ 和 $\hbar_g=-1.33$ 时,误差可以忽略不计. 进一步由表1 可

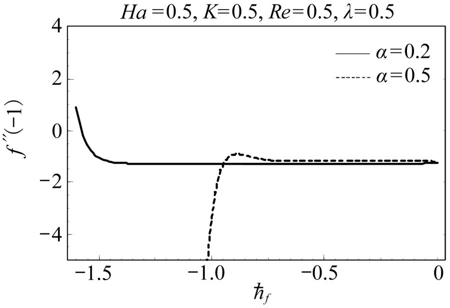

图2　第20 阶近似时的 $\hbar_f$ - 曲线

Fig. 2　$\hbar_f$ - curve for 20th order of approximation

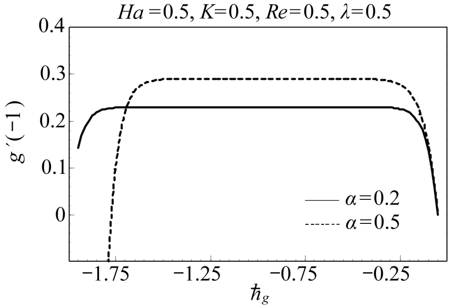

图3　第20 阶近似时的 $\hbar_g$ - 曲线

Fig. 3　$\hbar_g$ - curve for 20th order of approximation

以看出,取第20阶近似之后,小数点后面4位已不再发生变化,证明了本文HAM解的收敛性.

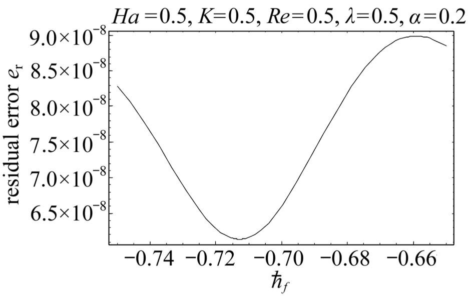

图4 剩余误差随 $\hbar_f$ 的变化

Fig. 4 Residual error plotted against $\hbar_f$

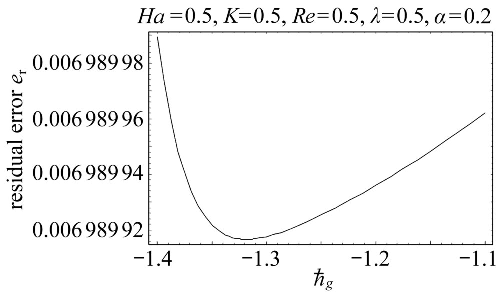

图5 剩余误差随 $\hbar_g$ 的变化

Fig. 5 Residual error plotted against $\hbar_g$

表1 当 $\alpha = 0.2$, $K = 0.5$, $Ha = 0.5$, $Re = 0.5$, $\lambda = 0.5$, $\hbar_f = -0.715$, $\hbar_g = -1.33$ 时,HAM解的不同阶次近似值

Table 1 Convergence of HAM solution at different orders of approximation when $\alpha = 0.2$, $K = 0.5$, $Ha = 0.5$, $Re = 0.5$, $\lambda = 0.5$, $\hbar_f = -0.715$, $\hbar_g = -1.33$

order of approximation	$f''(-1)$	$g'(-1)$
1	−1.257 2	0.270 8
5	−1.274 8	0.230 3
10	−1.274 7	0.230 3
20	−1.274 7	0.230 3
25	−1.274 7	0.230 3
30	−1.274 7	0.230 3
35	−1.274 7	0.230 3
40	−1.274 7	0.230 3

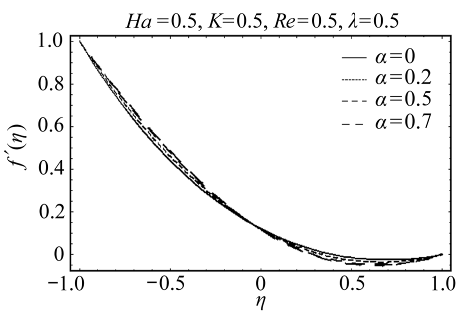

图6 二阶参数 α 取不同值时的速度分量 $f'(\eta)$

Fig. 6 Velocity component $f'(\eta)$ for different values of second grade parameter α

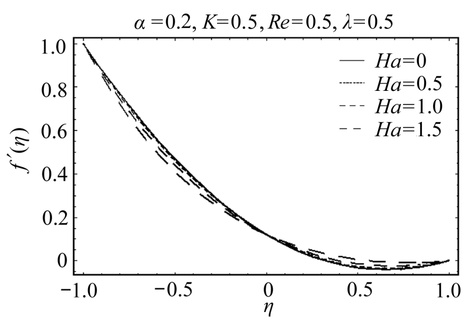

图7 磁场参数 Ha 取不同值时的速度分量 $f'(\eta)$

Fig. 7 Velocity component $f'(\eta)$ for different values of magnetic parameter Ha

3 结果和讨论

为了理解本文所讨论流动的物理意义,观察参数对重要物理量的影响是必要的.图6~18中描绘出这些参数取不同值时的速度分布曲线,在这点上给出了一个定性的分析.图6给出了

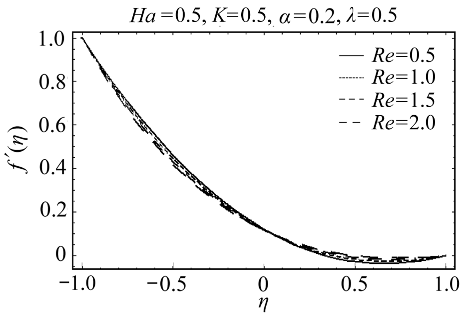

图 8　Reynolds 数 Re 对速度分量 $f'(\eta)$ 的影响

Fig. 8　Effects of Reynolds number Re on velocity component $f'(\eta)$

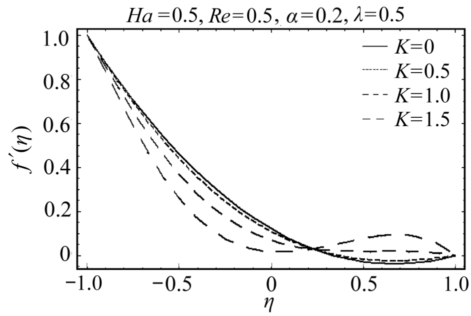

图 9　旋转参数 K 取不同值时速度分量 $f'(\eta)$ 的变化

Fig. 9　Variation of velocity component $f'(\eta)$ for different values of rotation parameter K

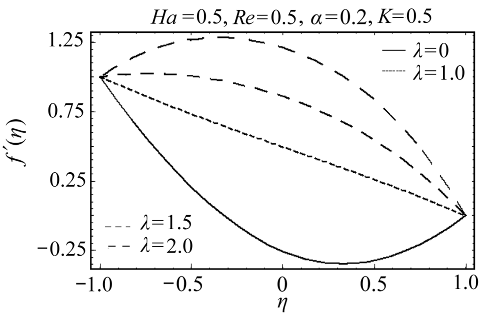

图 10　上壁面喷出参数 λ 对 $f'(\eta)$ 的影响

Fig. 10　Effect of upper wall injection on $f'(\eta)$

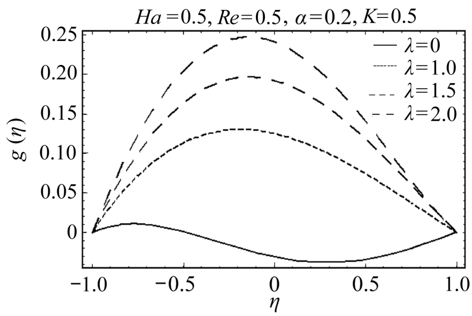

图 11　上壁面喷出参数 λ 对 $g(\eta)$ 的影响

Fig. 11　Effect of upper wall injection on $g(\eta)$

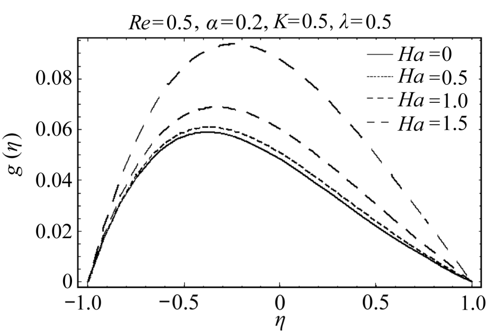

图 12　磁场参数 Ha 对速度分量 $g(\eta)$ 的影响

Fig. 12　Effect of magnetic parameter Ha on velocity component $g(\eta)$

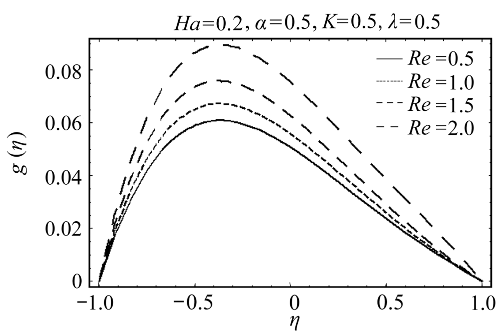

图 13　Reynolds 数 Re 增加时速度分量 $g(\eta)$ 的变化

Fig. 13　Variation of velocity $g(\eta)$ with an increase in Reynolds number Re

二阶参数 α 对速度分布曲线的影响. 随着 α 值的增加,伸展平板附近的速度在增加,管道上半部的速度在减小. 如果观察外加磁场参数 Ha 或 Reynolds 数 Re 对速度的变化,发现它们的影响始终是相反的(见图 7 和图 8). 图 9 给出了旋转参数 K 对速度分布曲线的影响. 可以清楚地看到,随着 K 值的增加,伸展平板附近速度在减小,上壁面附近速度在增加. 过了管道中心点出现这种交替变化的情况,在图 6 ~ 8 中,交替变化几乎都出现在管道中心. 可以观察到穿越点的

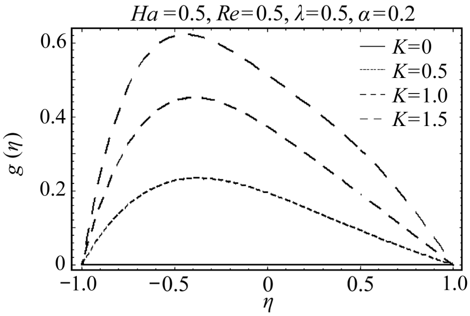

图 14　旋转参数 K 对速度分量 $g(\eta)$ 的影响

Fig. 14　Rotation effects on velocity $g(\eta)$

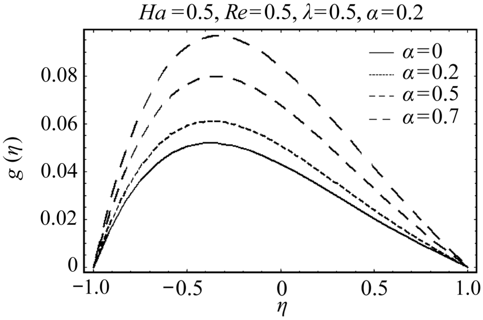

图 15　参数 α 的非 Newton 性对速度分量 $g(\eta)$ 的影响

Fig. 15　Non-Newtonian effects on velocity component $g(\eta)$

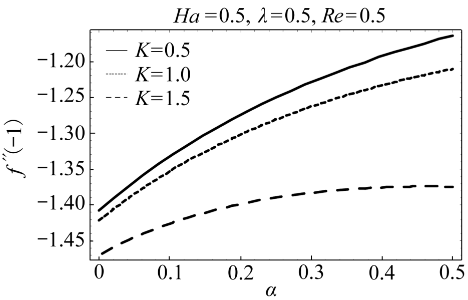

图 16　参数 K 取不同值时，$f''(-1)$ 随 α 的变化

Fig. 16　$f''(-1)$ plotted against α for different values of the parameter K

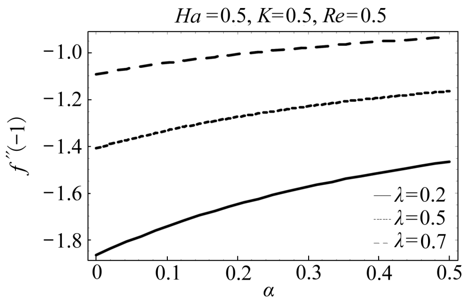

图 17　参数 λ 取不同值时，$f''(-1)$ 随 α 的变化

Fig. 17　$f''(-1)$ plotted against α for different values of the parameter λ

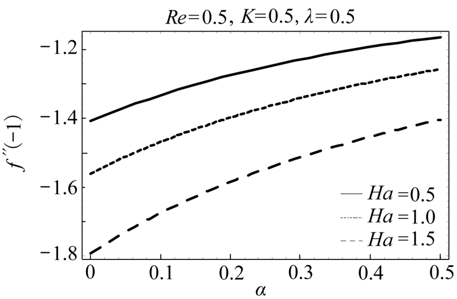

图 18　参数 Ha 取不同值时，$f''(-1)$ 随 α 的变化

Fig. 18　$f''(-1)$ plotted against α for different values of the parameter Ha

存在，是由于旋转现象的存在. 进一步可以从图 9 观察到，旋转速度的增加，管道中出现反向的流动. 这是因为对于大的 K 值，产生与压力梯度相反的 Coriolis 力，导致流向的改变. 此外，管道中的旋转，在平板附近达到顶峰，在平板附近出现边界层. 图 10 给出了吸入参数 λ 对 $f'(\eta)$ 的影响. 吸入参数有助于剪应力的控制，很显然，随着上层板处吸入参数的增加，速度分布曲线在上升. 图 11 给出了 λ 对速度分量 $g(\eta)$ 的影响. 图 11 表明，壁面没有吸入功能时，管道中速度发生振荡，但是随着 λ 值的增加，旋转的影响在下降，管道中呈现完全发展的流动. Ha 和 Reynolds 数 Re 对速度分量 $g(\eta)$ 的影响类似. 随着 Ha 和 Re 的增加，速度分量 $g(\eta)$ 在上升（见图 12 和图 13）. 随着 K 值的增加，管道中速度分量 $g(\eta)$ 在上升，且在下层伸展平板附近达到最大值，如图 14 所示. 随着 α 值的增加，图 15 绘出了速度分量 $g(\eta)$ 相似的变化.

图 16～18 绘出了下面平板的剪应力，随着二阶参数 α 而变化的曲线图形. 可以看到，随着二阶参数 α 的增加，伸展平板的剪应力在减小. 进一步由图 16 可以看出，随着旋转参数的增

加,平板上的剪应力在增加;但是随着吸入参数的增加,上面平板处的剪应力在减小,如图 17 所示. 在图 18 中观察到磁场的类似影响.

4 结　　论

本文在一个旋转坐标系中,研究二阶流体的三维管道流动. 应用同伦分析法,得到非线性耦合系统的级数解. 表 1 显示出解的收敛性. 知道随着参数 α 和 Re 的增加,造成伸展平板附近速度的增加,从而使平板受到很强粘滞力的拽拉. 由于存在旋转现象,管道中速度出现振荡,对大的 K 值,出现反向的流动. 然而,随着 λ 值的增加,形成充分发展的流动.

参考文献(References):

[1] Crane L J. Flow past a stretching sheet[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 1970, **21**(4): 645-647.

[2] Gupta P S, Gupta A S. Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing [J]. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 1977, **55**(6): 744-746.

[3] Chen C K, Char M I. Heat transfer of a continuous stretching surface with suction or blowing [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1988, **135**(2): 568-580.

[4] Grubka L J, Bobba K M. Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface with variable temperature[J]. *ASME Journal of Heat Transfer*, 1985, **107**(1): 248-250.

[5] Chiam T C. Magnetohydrodynamic heat transfer over a non-isothermal stretching sheet[J]. *Acta Mechanica*, 1997, **122**(1/4): 169-179.

[6] Chakrabarti A, Gupta A S. Hydromagnetic flow and heat transfer over a stretching sheet[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1979, **37**(1): 73-78.

[7] Ali M E. Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface[J]. *Warme-und Stoffubertragung*, 1994, **29**(4): 227-234.

[8] Dutta B K. Heat transfer from stretching sheet with uniform suction and blowing[J]. *Acta Mechanica*, 1989, **78**(3/4): 255-262.

[9] Hassanien I A, Gorla R S R. Heat transfer to micropolar fluid from a non-isothermal stretching sheet with suction and blowing[J]. *Acta Mechanica*, 1990, **84**(1/4): 191-199.

[10] Elbashbeshy E M A. Heat transfer over a stretching surface with variable surface heat flux [J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1998, **31**(16): 1951-1954.

[11] Xu Q W, Bao W M, Mao R L, Yang G L, Pop I, Na T Y. Unsteady flow past a stretching sheet[J]. *Mechanics Research Communications*, 1996, **23**(4): 413-422.

[12] Mehmood A, Ali A. Takhar H S, Shah T. Corrigendum to: "Unsteady three dimensional MHD boundary layer flow due to the impulsive motion of a stretching surface (*Acta Mechanica*, 146 (1), 59-71 (2001))" [J]. *Acta Mechanica*, 2008, **199**(1/4): 241-249.

[13] Mehmood A, Ali A, Shah T. Heat transfer analysis of unsteady boundary layer flow by homotopy analysis method[J]. *Communcations in Non-Linear Science and Numerical Simulation*, 2008, **13**(5): 902-912.

[14] Devi C D S, Thakhar H S, Nath G. Unsteady three dimensional boundary layer flow due to a stretching surface[J]. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 1986, **29**(12): 1996-1999.

[15] Elbashbeshy E M A, Bazid M A A. Heat transfer in a porous medium over a stretching surface with internal heat generation and suction or injection[J]. *Applied Mathematics and Compu-*

tation, 2004, **158**(3): 799-807.

[16] Troy W C, Overman E A, Ermentrout G B, Keener J P. Uniqueness of flow of a second-order fluid past a stretching sheet[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1987, **44**(4): 753-755.

[17] Rao B N. Flow of a fluid of second grade over a stretching sheet[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1996, **31**(4): 547-550.

[18] Chang W D, Kazarinoff N D, Lu C. A new family of explicit solutions for the similarity equations modelling flow of a non-Newtonian fluid over a stretching sheet[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1991, **113**(2): 191-195.

[19] Pontrelli G. Flow of a fluid of second grade over a stretching sheet[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1995, **30**(3): 287-293.

[20] Mehmood A, Ali A. An explicit analytic solution of steady three-dimensional stagnation point flow of second grade fluid toward a heated plate[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2008, **75**(6): 061003.

[21] Ariel P D. A numerical algorithm for computing the stagnation point flow of a second grade fluid with/without suction[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1995, **59**(1): 9-24.

[22] Vajravelu K, Roper T. Flow and heat transfer in a second grade fluid over a stretching sheet [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1999, **34**(6): 1031-1036.

[23] Baris S, Dokuz M S. Three dimensional stagnation point flow of a second grade fluid towards a moving plate[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2006, **44**(1/2): 49-58.

[24] Ferrario C, Passerini A, Thater G. Generalization of the Lorenz model to the two dimensional convection of second grade fluid[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, **39**(4): 581-591.

[25] Xu H, Liao S J. Series solutions of unsteady Magnetohydrodynamics flows of non-Newtonian fluids caused by an impulsively stretching plate[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2005, **129**(1): 46-55.

[26] Huilgol R R, Keller H B. Flow of viscoelastic fluids between rotating disks: part I[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1985, **18**(1): 101-110.

[27] Huilgol R R, Rajagopal K R. Non-axisymmetric flow of a viscoelastic fluid between rotating disks[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1987, **23**: 423-434.

[28] Vajravelu K. Analytical and numerical solutions of a coupled non-linear system arising in a three-dimensional rotating flow[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, **39**(1): 13-24.

[29] Liao S J. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Methods*[M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.

[30] Hilton P H. *An Introduction to Homotopy Theory*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1953.

[31] Sen S. *Topology and Geometry for Physicists*[M]. Florida: Academic Press, 1983.

[32] Yang C, Liao S J. On the explicit, purely analytic solution of von Karman swirling viscous flow[J]. *Communcations in Non-Linear Science and Numerical Simulation*, 2006, **11**(1): 83-93.

[33] Abbasbandy S. Homotopy analysis method for heat radiation equations[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2007, **34**(3): 380-387.

[34] Ziabaksh Z, Domairy G. Solution of the laminar viscous flow in a semi-porous channel in the

presence of uniform magnetic field by using the homotopy analysis method[J]. *Communcations in Non-Linear Science and Numerical Simulation*, 2009, **14**(4): 1284-1294.

[35] Liao S J. A uniformly valid analytic solution of 2D viscous flow past a semi infinite flat plate [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, **385**: 101-128.

[36] Liao S J, Cheung K F. Homotopy analysis of nonlinear progressive waves in deep water[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2003, **45**(2): 105-116.

[37] Xu H, Liao S J. An explicit analytic solution for convective heat transfer in an electrically conducting fluid at a stretching surface with uniform free stream[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2005, **43**(10): 859-874.

[38] Liao S J. On the analytic solution of magnetohydrodynamic flow of non-Newtonian fluids over a stretching sheet[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2003, **488**: 189-212.

[39] Mehmood A, Ali A. Analytic solution of generalized three-dimensional flow and heat transfer over a stretching plane wall[J]. *International Communications Heat and Mass Transfer*, 2006, **33**(10): 1243-1252.

[40] Mehmood A, Ali, A. Analytic solution of three-dimensional viscous flow and heat transfer over a stretching flat surface by homotopy analysis method[J]. *ASME-Journal of Heat Transfer*, 2008, **130**(12): 121701.

[41] Liao S J. On the homotopy analysis method for nonlinear problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **147**(2): 499-513.

[42] Liao S J. An approximate solution technique which does not depend upon small parameters—part 2: an application in fluid mechanics[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1997, **32**(5): 815-822.

[43] Shercliff J A. *A Textbook of Magnetohydrodynamics*[M]. Oxford: Pergamon Press, 1965.

[44] Rivlin R S, Ericksen J L. Stress deformation relations for isotropic matherials[J]. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 1955, **4**(5): 681-702.

Three Dimensional Channel Flow of Second Grade Fluid in a Rotating Frame

Saira Hussnain[1], Ahmer Mehmood[2], Asif Ali[1]

(1. *Department of Mathematics*, *Quaid-i-Azam University*, *Islamabad*, *Pakistan*;
2. *Department of Mathematics*, *International Islamic University*, *Islamabad*, *Pakistan*)

Abstract: An analysis was performed for hydromagnetic second grade fluid flow between two horizontal plates in a rotating system in the presence of magnetic field. The lower sheet was considered to be a stretching sheet and the upper was a porous solid plate. By using suitable transformations the equations of conservation of mass and momentum were reduced to a system of coupled non-linear ordinary differential equations. Series solution of this coupled non-linear system was obtained by using the most powerful analytic technique Homotopy analysis method. The results were presented through graphs and the effects of non-dimensional parameters Re, λ, Ha^2, α and K^2 on the velocity field were discussed in details.

Key words: three dimensional flow; second grade fluid; stretching sheet; channel flow; rotating frame