

# 传导-辐射对沿垂直平面有热泳的 瞬时自然对流的影响\*

S·M·马赫弗兹, Md·A·霍辛

(COMSATS 信息技术学院 数学系,伊斯兰堡 44000,巴基斯坦)

**摘要:** 研究存在热辐射时,热泳微粒的沉积,对沿垂直平面瞬态自然对流边界层流动的影响,垂直平面浸没在光密灰色流体中.分析中采用 Rosseland 扩散近似表示辐射热通量项.将控制方程简化为抛物线型的偏微分方程组,然后在整个时间段  $0 \leq \tau < \infty$ , 利用有限差分法数值求解.还得到了小数值时间和大数值时间的渐近解,发现渐近解和数值解吻合得很好.而且,流体,20℃和1个标准大气压下的空气,即 Prandtl 数  $Pr$  为 0.7 时,用图形给出了不同物理参数,即热辐射参数  $R_d$ 、表面温度参数  $\theta_w$  和热泳参数  $\lambda$ ,对瞬时的表面剪切应力  $\tau_w$ 、表面热传输率  $q_w$  和组分浓度扩散率(传质率)  $m_w$  的影响,以及对瞬时的速度、温度和浓度分布曲线的影响.

**关键词:** 辐射; 光密流体; 热泳; 瞬时的自然对流

**中图分类号:** O357 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.03.001

## 符号说明

$a$	Rosseland 平均消光系数	$m_w$	组分浓度的传输率
$C$	边界层中的组分浓度	$Pr$	Prandtl 数
$c_p$	比定压热容	$q_r$	辐射热通量
$D$	化学分子扩散系数	$q_w$	表面传热率
$f$	无量纲的流函数	$R_d$	辐射参数
$g$	重力加速度	$Sc$	Schmidt 数
$Gr_x$	局部 Grashof 数	$t$	无量纲时间
$k$	导热率	$T$	流体温度
$Kn$	Knudsen 数	$u$	$x$ -方向速度分量
$v$	$y$ -方向速度分量		
希腊字母			
$\beta$	体积热膨胀系数	$\psi$	流函数
$\phi$	无量纲浓度	$\theta$	无量纲温度
$\eta$	拟相似性变量	$\theta_w$	表面温度参数

\* 收稿日期: 2011-06-28; 修订日期: 2011-12-01

作者简介: M. A. Hossain(联系人. E-mail: anwar@univdhaka.edu; cfd@bacom.com).

本文原文为英文,黄锋译,张禄坤校.

$\kappa$	热泳系数	$\rho$	流体密度
$\lambda$	热泳参数	$\sigma$	Stefan-Boltzmann 常数
$\lambda_g$	空气的热传导系数	$\sigma_s$	散射系数
$\lambda_p$	扩散微粒的热传导系数	$\tau$	无量纲时间
$\nu$	动粘性系数	$\tau_w$	表面剪切应力
下标			
w	壁面条件	$\infty$	环境条件

## 引 言

近年来发表大量的文献,涉及对流中热泳微粒沉积影响的研究.存在这么一种现象,悬浮于不等温气体中的小尺寸(亚微型)颗粒,在降温方向上获得了相对于气体的速度.微粒得到的速度被称为热泳速度,悬浮微粒所承受的力,正是大家知道的由于温度梯度引起的热泳力.放射性微粒的热泳沉积,被认为是原子反应堆发生意外的重要因素之一.在温度梯度为 5 K/mm 的温度场中,这种现象对半径 10  $\mu\text{m}$  大小的微粒尤为重要<sup>[1]</sup>.包括下面几个实际情况,如清除气体、热交换器的腐蚀导致热交换系数的下降、气体涡轮机设备的污垢、冷凝器/蒸发器悬浮微粒的凝结,废气从燃烧设备中排出时微粒的轨迹和气体涡轮机叶片蒸发物的冷却. Goren<sup>[2]</sup>首先在经典的流过平板的层流问题中,研究气雾微粒的热泳问题.研究表明,增大表面和自由流之间的温度差,可能会对表面沉积有实质性的变化. Talbot 等<sup>[3]</sup>使用不同的理论方法,得到了边界层中微粒的运动轨迹.此外,对原子反应堆安全性感兴趣的主要是,来自水蒸汽-可压缩气体混合物的微粒沉积,这些气体混合物可能是空气、可能是氢气,或者可能是两者的混合物.流动可能是强迫驱动,或者是浮力驱动,经过竖直的或水平的表面,层流或者湍流,或者可能是内部有气泡的涡流.所有微粒的大小,在对流沉积与水蒸汽凝结中扮演着重要的角色.对  $d_p \leq 0.1 \mu\text{m}$  小微粒的扩散机理,即 Brown 扩散,可能扩散电泳和热泳是重要的.对  $d_p \geq 0.1 \mu\text{m}$  的微粒,可能主要是惯性沉积和沉积(参见文献[4]). Mills 等<sup>[4]</sup>仅考虑细小微粒,应用微粒沉积的对流和扩散的联合机理,分析经过多孔平板的层流问题,得到了有关微粒沉积率的相互关系.

Epstein 等<sup>[5]</sup>进一步研究了自由对流边界层中,微粒在垂直平板上的热泳沉积问题. Garg 和 Jayaraj<sup>[6-7]</sup>在一个圆柱体表面倾斜,周围加热、冷却和绝热的表面条件下,讨论有强迫对流流过时小微粒的热泳传输.进而, Jia 等<sup>[8]</sup>给出了数值研究,进一步研究强迫对流中辐射和热泳的相互作用. Tsai<sup>[9]</sup>在有悬浮微粒热泳存在时,研究沉积率和壁面吸入之间的关联性.随后, Chang 等<sup>[10]</sup>和 Jayaraj 等<sup>[11]</sup>对垂直平板上的混合对流,研究热泳对微粒沉积的影响. Selim 等<sup>[12]</sup>就混合对流传过加热的垂直可渗透平板时,分析热泳对非均匀表面质量流量的影响.另一方面, Chamka 和 Pop<sup>[13]</sup>在嵌入多孔介质中垂直平板上的自由对流边界层中,研究热泳微粒沉积的影响.前不久, Postelnicu<sup>[14]</sup>在嵌入多孔介质中水平板上的自由对流边界层中,研究热泳微粒沉积的影响.最近, Bakier 和 Gorla<sup>[15]</sup>就稳态粘性流体,流过半无限垂直多孔平板,研究热泳微粒沉积和热辐射的影响,他们的分析限于表面和环境温差不大的情况.但是,热辐射的存在,高温差会改变边界层中温度的分布,反过来又会影响表面的热传输.在空间技术环境和高温加工工艺中,辐射对对流的影响尤为重要.尝试建立一个与流体充分容合的辐射场,称其谓辐射的水动力学,是当今最复杂的天体物理的流体计算.辐射加热治疗,为两种极端所承担,或者光子的平均自由路径非常小,称谓光子厚,或者是光子薄的流体.包含辐射影响的热传输方

程,是一种高度非线性的偏微分方程。

Cess<sup>[16]</sup>顾及吸收、放射和非散射气体,研究热辐射和沿垂直平板的自由对流传热。他利用了奇异摄动技术求解非线性偏微分方程组。Arpaci<sup>[17]</sup>就一个浸没在 Prandtl 数  $Pr = 1.0$  辐射气体中的加热垂直平板,尝试研究热辐射和层状自由对流间不平衡的相互作用。Cheng 和 Özişik<sup>[18]</sup>通过求解非相似动量和能量方程,在加热和致冷壁面浸没在吸收、放射、全散射的灰色流体中,同时确定辐射和自由对流。该研究用法向模态膨胀技术,准确地处理了辐射部分。Ali 等<sup>[19]</sup>在流经水平表面的边界层中,研究自然对流和辐射相互作用问题。考虑 Rosseland 扩散近似<sup>[20]</sup>,Hossain 等<sup>[21-28]</sup>就粘性光密不可压缩流体沿加热垂直面流动,在不同的几何表面和不同表面条件下,研究传导-辐射对自由和混合对流影响。

本文就粘性光密灰色流体流过等温的垂直平面时,研究微粒热泳沉积和传导-辐射相互作用,对瞬时自然对流边界层流动的组合影响。通过适当的变换,将边界层控制方程简化为非相似形式,然后应用有限差分法进行数值积分。还应用了渐近法,求时间早期和时间后期方程的解。在它们各自有效的范围内,得到数值法和渐近法的结果,经比较两者吻合得很好。流体采用 Prandtl 数  $Pr$  为 0.7 的空气,讨论传导-辐射参数  $R_d$ 、表面温度参数  $\theta_w$  和热泳参数  $\lambda$ ,对瞬时表面剪切应力、表面传热率和表面传质率的影响。

## 1 问题的公式化

就粘性光密灰色流体沿加热垂直平板表面流动,考虑到辐射影响而出现的热泳现象,研究其瞬时的二维自然对流问题,辐射影响由 Rosseland 扩散近似描述。流动示意图和坐标系如图 1 所示。这里,取  $x$ -轴平行于表面并指向流动方向, $y$ -轴垂直于  $x$ -轴。最初,表面温度为常数  $T_\infty$ ,但当时间  $t = 0$  时,表面温度突然升至相同的温度值  $T_w$ ,该温度高于周围流体温度  $T_\infty$ 。而且,表面处的组分浓度  $C_w$  取值为 0,周围的组分浓度为  $C_\infty$ 。进一步假定:(i) 微粒的质量通量足够小,相对小数量微粒引起的热物理过程,对主流的速度和温度场没有影响;(ii) 在边界层区域, $y$ -方向的温度梯度远大于  $x$ -方向的温度梯度,因此仅考虑垂直于表面的热泳速度分量;(iii) 流体的动粘度系数和热扩散系数恒定;(iv) 采用 Boussinesq 近似;(v) 微粒扩散系数恒定;(vi) 微粒的浓度足够小,在边界层中凝结的微粒可以忽略不计。

满足以上假定,质量、动量、热传导和浓度守恒的控制方程可以写出如下:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty), \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial q_r}{\partial y} \right], \tag{3}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(V_T C) = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \tag{4}$$

其中, $u$  和  $v$  分别是  $x$ -方向和  $y$ -方向的速度分量, $T$  和  $C$  分别为流体的温度和浓度, $t$  为时间, $g$  为重力加速度, $\beta$  为热膨胀系数, $k$  为导热率, $\rho$  为流体密度, $c_p$  为比定压热容, $D$  为分子扩散系数。

热传导方程(3)右侧的变量  $q_r$ ,表示  $y$ -方向上辐射热通量。为了简化问题的复杂性,并为

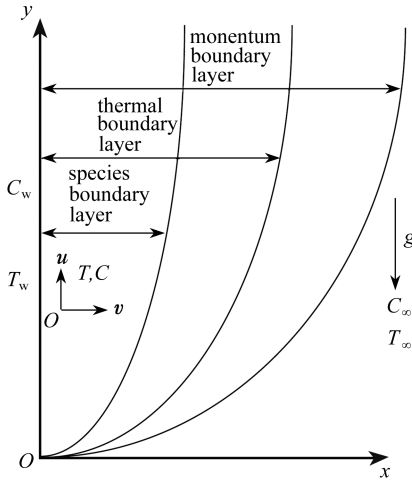


图1 流动示意图和坐标系

Fig.1 Flow configuration and coordinate system

热通量的更精细表示,进一步提供比较研究的途径,这里考虑对光密辐射加以限制.因此,辐射热通量项可以由 Rosseland 近似<sup>[20]</sup>给出:

$$q_r = -\frac{4\sigma}{3(a + \sigma_s)} \frac{\partial T^4}{\partial y}, \quad (5)$$

此式只对强吸收有效.上式中,  $a$  为 Rosseland 平均吸收系数,  $\sigma$  为 Stefan-Boltzmann 常数,  $\sigma_s$  为散射系数.

热泳的影响通常根据微粒的平均速度来描述,微粒经受温度梯度就将获得速度.在边界层流动中,  $y$ -方向的温度梯度远大于  $x$ -方向的温度梯度,因此仅考虑  $y$ -方向的热泳速度.所以,方程(4)中出现的热泳速度  $V_T$ ,可以表示为以下形式:

$$V_T = -\frac{\kappa\nu}{T} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (6)$$

其中,  $T$  为参照温度,值  $\kappa\nu$  表示热泳的扩散,  $\kappa$  为热泳扩散系数,其取值范围为 0.2 ~ 1.2, 参见文献[29], 并由 Talbot 等的理论<sup>[3]</sup>, 可以定义为

$$\kappa = \frac{2 C_s (\lambda_g / \lambda_p + C_1 Kn) [1 + Kn (C_1 + C_2 e^{-C_3 / Kn})]}{(1 + 3 C_m Kn) (1 + 2 \lambda_g / \lambda_p + 2 C_1 Kn)}, \quad (7)$$

其中,  $C_1, C_2, C_3, C_m, C_s, C_1$  为常数,  $\lambda_g$  和  $\lambda_p$  分别为气体和扩散微粒的热传导系数,  $Kn$  为 Knudsen 数.

上述边界层方程的边界条件为

$$\begin{cases} u = v = 0, T = T_\infty, C = C_\infty, & \forall x, y, t < 0, \\ u = v = 0, T = T_w, C = C_w = 0, & y = 0, \\ u \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty, C \rightarrow C_\infty, & y \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (8)$$

引入惯常形式的流函数  $\psi$ , 令  $u = \partial\psi/\partial y, v = -\partial\psi/\partial x$ , 连续方程(1)自然满足.现在,为了得到对所有时间有效的无量纲方程,引入以下变换:

$$\begin{cases} \psi = \nu Gr_x^{1/4} (1 - e^{-\tau})^{3/2} f(\eta, \tau), \quad \eta = \frac{y}{x} (1 - e^{-\tau})^{-1/2} Gr_x^{1/4}, \\ T - T_\infty = (T_w - T_\infty) \theta(\eta, \tau), \quad C = C_\infty \phi(\eta, \tau), \quad \tau = \frac{\nu t}{x^2} Gr_x^{1/2}, \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $\eta$  为边界层区域中的拟相似变量,  $Gr_x (= g\beta(T_w - T_\infty)x^3/\nu^2)$  为局部的 Grashof 数.

将变换式(9)代入方程(2) ~ (4), 得到

$$f''' + p_1 f f'' - p_2 f'^2 - e^{-\tau} \left( f' - \frac{1}{2} \eta f' \right) - (1 - e^{-\tau}) \frac{\partial f'}{\partial \tau} + \theta = p_3 \left( f'' \frac{\partial f}{\partial \tau} - f' \frac{\partial f'}{\partial \tau} \right), \quad (10)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[ \left\{ 1 + \frac{4}{3} R_d (1 + \theta_w \theta)^3 \right\} \theta' \right]' + p_1 f \theta' + \frac{1}{2} \eta e^{-\tau} \theta' - (1 - e^{-\tau}) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = p_3 \left( \theta' \frac{\partial f}{\partial \tau} - f' \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right), \quad (11)$$

$$\frac{1}{Sc} \phi'' + p_1 f \phi' + \frac{1}{2} \eta e^{-\tau} \phi' - (1 - e^{-\tau}) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \lambda (\theta' \phi' + \theta'' \phi) =$$

$$p_3 \left( \phi' \frac{\partial f}{\partial \tau} - f' \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right). \quad (12)$$

在方程(10) ~ (12)中,上角“撇”表示对  $\eta$  的导数,且

$$\begin{cases} p_1 = 3[(1 - e^{-\tau})^2 - \tau e^{-\tau}(1 - e^{-\tau})]/4, \\ p_2 = [(1 - e^{-\tau})^2 - \tau e^{-\tau}(1 - e^{-\tau})]/2, \\ p_3 = \frac{1}{2} \tau(1 - e^{-\tau})^2, Pr = \frac{\nu}{\alpha}, Sc = \frac{\nu}{D}, R_d = -\frac{4\sigma T_\infty^3}{k(a + \sigma_s)}, \theta_w = \frac{T_w}{T_\infty}. \end{cases} \quad (13)$$

最后,在方程(12)中,  $\lambda$  称为热泳参数,根据 Mills 等<sup>[4]</sup>和 Tsai<sup>[9]</sup>定义为

$$\lambda = -\frac{\kappa(T_w - T_\infty)}{T}.$$

参考温度  $T = 300$  K 时,  $\lambda$  的典型值为 0.01, 0.1, 1.0,  $-\kappa(T_w - T_\infty)$  相应的近似值为 3, 30, 300.

边界条件为

$$\begin{cases} f(0, \tau) = f'(0, \tau) = \phi(0, \tau) = 0, \theta(0, \tau) = 1, \\ f'(\infty, \tau) = \theta(\infty, \tau) = 0, \phi(\infty, \tau) = 1. \end{cases} \quad (14)$$

一旦函数  $f(\eta, \tau)$ ,  $\theta(\eta, \tau)$  和  $\phi(\eta, \tau)$  确定,技术上感兴趣的量,例如,表面剪切应力( $\tau_w$ )、表面传热率( $q_w$ )和表面组分浓度传输率( $m_w$ )就可以得到.由关系式(9),这些物理量可以简化为以下无量纲形式:

$$\tau_w = \frac{x^2}{\nu} Gr_x^{-3/4} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = (1 - e^{-\tau})^{1/2} f''(0, \tau), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} q_w = & -\frac{x}{k\theta_w T} Gr_x^{-1/4} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{4\sigma}{3(a + \sigma_s)} \frac{\partial T^4}{\partial y} \right)_{y=0} = \\ & - (1 - e^{-\tau})^{-1/2} \left( 1 + \frac{4}{3} R_d \theta_w^3 \right) \theta'(0, \tau), \end{aligned} \quad (16)$$

$$m_w = \frac{D x}{\nu C_\infty} Gr_x^{-1/4} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1}{Sc} (1 - e^{-\tau})^{-1/2} \phi'(0, \tau). \quad (17)$$

在第2节中,我们将讨论上述方程的求解方法.

## 2 求解方法

应用有限差分法可以数值地得到,抛物线型耦合的非线性偏微分方程组(10) ~ (12)的解.应用数值技术的第一步,引入变量  $U = \partial f / \partial \eta$ , 将三阶的动量方程简化二阶微分方程,方程(10) ~ (12)成为以下形式:

$$\begin{aligned} U'' + p_1 f U' - p_2 U^2 - e^{-\tau} \left( U - \frac{1}{2} \eta U' \right) - (1 - e^{-\tau}) \frac{\partial U}{\partial \tau} = \\ p_3 \left( U \frac{\partial f}{\partial \tau} - U \frac{\partial U}{\partial \tau} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \left[ \left\{ 1 + \frac{4}{3} R_d (1 + \theta_w \theta)^3 \right\} \theta' \right]' + p_1 f \theta' + \frac{1}{2} \eta e^{-\tau} \theta' - (1 - e^{-\tau}) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \\ p_3 \left( \theta' \frac{\partial f}{\partial \tau} - U \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{1}{Sc} \phi'' + p_1 f \phi' + \frac{1}{2} \eta e^{-\tau} \phi' - (1 - e^{-\tau}) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \lambda (\theta' \phi' + \theta'' \phi) =$$

$$p_3 \left( \phi' \frac{\partial f}{\partial \tau} - U \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right). \quad (20)$$

相应的边界条件变为

$$\begin{cases} f(0, \tau) = U(0, \tau) = \phi(0, \tau) = 0, & \theta(0, \tau) = 1, \\ U(\infty, \tau) = \theta(\infty, \tau) = 0, & \phi(\infty, \tau) = 1. \end{cases} \quad (21)$$

同样地,方程(15)~(17)变为

$$\tau_w = (1 - e^{-\tau})^{1/2} U'(0, \tau), \quad (22)$$

$$q_w = - (1 - e^{-\tau})^{-1/2} \left( 1 + \frac{4}{3} R_d \theta_w^3 \right) \theta'(0, \tau), \quad (23)$$

$$m_w = \frac{1}{Sc} (1 - e^{-\tau})^{-1/2} \phi'(0, \tau). \quad (24)$$

求解方程的出发点是,通过将转换方程(18)~(20)空间离散化,得到有限差分方程组.对 $\eta$ 的一阶导数用一阶中心差分近似,对 $\eta$ 的二阶导数用二阶中心差分近似.然而,对时间的导数用向前差分近似.离散化后的结果为下面三对角代数方程组:

$$A_k \Omega_{i-1,j} + B_k \Omega_{i,j} + C_k \Omega_{i+1,j} = D_k. \quad (25)$$

在上述方程中,下角 $k = 1, 2$ 和 $3$ ,分别表示函数 $U, \theta$ 和 $\phi$ . $i = 1, 2, \dots, M$ 和 $j = 1, 2, \dots, N$ 分别对应于 $\eta$ 方向和 $\tau$ 方向的网格点.系数 $A_k, B_k, C_k$ 和 $D_k$ 可以方便地得到. $k = 1, 2, 3, 4$ 时,通过著名的 Thomas 算法(以分块矩阵形式),可以求解这些分块的三对角方程.

一旦函数 $U$ 已知,由下面关系即可得到函数 $f$ :

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} + \Delta \eta U_{i,j}. \quad (26)$$

计算由 $\tau = 0.0$ 开始,直到达到稳定状态.

检验解稳定状态的收敛准则是,两次连续时间步长计算得到函数 $f(\eta, \tau)$ 的差值小于 $10^{-4}$ .在 $\tau$ - $\eta$ 空间中,利用步长 $\Delta \tau$ 和 $\Delta \eta$ ,将计算区域离散化.经过试算,最终确定单元大小为 $\Delta \eta = 0.005$ 和 $\Delta \tau = 0.02$ .

下面讨论时间 $\tau$ 取小值和大值时的渐近解.

## 2.1 时间 $\tau$ 取小值时的渐近解

对于小数值时间 $\tau$ ,方程(10)~(12)可以写为

$$f''' + \tau^2 \left( \frac{3}{4} f f'' - \frac{1}{2} f'^2 \right) - \left( f' - \frac{1}{2} \eta f' \right) - \tau \frac{\partial f'}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \tau^3 \left( f'' \frac{\partial f}{\partial \tau} - f' \frac{\partial f'}{\partial \tau} \right), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \left[ \left\{ 1 + \frac{4}{3} R_d (1 + \theta_w \theta)^3 \right\} \theta' \right]' + \frac{3}{4} \tau^2 f \theta' + \frac{1}{2} \eta \theta' - \tau \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \\ & \frac{1}{2} \tau^3 \left( \theta' \frac{\partial f}{\partial \tau} - f' \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Sc} \phi'' + \frac{3}{4} \tau^2 f \phi' + \frac{1}{2} \eta \phi' - \tau \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \lambda (\theta' \phi' + \theta'' \phi) = \\ & \frac{1}{2} \tau^3 \left( \phi' \frac{\partial f}{\partial \tau} - f' \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

对应的边界条件(8)变为

$$\begin{cases} f(0, \tau) = f'(0, \tau) = \phi(0, \tau) = 0, & \theta(0, \tau) = 1, \\ f'(\infty, \tau) = \theta(\infty, \tau) = 0, & \phi(\infty, \tau) = 1. \end{cases} \quad (30)$$

由于 $\tau \ll 1$ ,方程(27)~(30)的解,可以展开为

$$f(\eta, \tau) = f_0(\eta) + \tau^2 f_1(\eta) + \tau^4 f_2(\eta) + \dots, \quad (31)$$



$$\theta(\eta, \tau) = \theta_0(\eta) + \tau^2 \theta_1(\eta) + \tau^4 \theta_2(\eta) + \dots, \quad (32)$$

$$\phi(\eta, \tau) = \phi_0(\eta) + \tau^2 \phi_1(\eta) + \tau^4 \phi_2(\eta) + \dots. \quad (33)$$

将方程(31) ~ (33)代入方程(27) ~ (30),并舍去  $O(\tau^4)$  及以上的高阶项,得到下面方程组:

$$f_0''' + \frac{1}{2} \eta f_0'' - f_0' + \theta_0 = 0, \quad (34)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[ \left\{ 1 + \frac{4}{3} R_d (1 + \theta_w \theta_0)^3 \right\} \theta_0' \right]' + \frac{1}{2} \eta \theta_0' = 0, \quad (35)$$

$$\frac{1}{Sc} \phi_0'' + \frac{1}{2} \eta \phi_0' - \lambda (\theta_0' \phi_0' + \theta_0'' \phi_0) = 0, \quad (36)$$

$$f_0(0) = f_0'(0) = f_0'(\infty) = \theta_0(\infty) = \phi_0(0) = 0, \theta_0(0) = \phi_0(\infty) = 1, \quad (37)$$

$$f_1''' + p_1 f_0 f_0'' - p_2 f_0'^2 + \frac{1}{2} \eta f_1'' - 3 f_1' + \theta_1 = 0, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \left\{ 1 + \frac{4}{3} R_d (1 + \theta_w \theta_0)^3 \right\} \theta_1'' + \frac{8}{Pr} R_d \theta_w (1 + \theta_w \theta_0)^2 \theta_0' \theta_1' + \\ p_1 f_0 \theta_0' + \frac{1}{2} \eta \theta_1' - 2 \theta_1 = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\frac{1}{Sc} \phi_1'' + p_1 f_0 \phi_0' + \frac{1}{2} \eta \phi_1' - 2 \phi_1 - \lambda (\theta_0' \phi_1' + \theta_1' \phi_0' + \theta_0'' \phi_1 + \theta_1'' \phi_0) = 0, \quad (40)$$

$$f_1(0) = f_1'(0) = f_1'(\infty) = \theta_1(\infty) = \phi_1(0) = \theta_1(0) = \phi_1(\infty) = 0, \quad (41)$$

$$f_2''' + p_1 (f_0 f_1'' + f_1 f_0'') - 2 p_2 f_0' f_1' + \frac{1}{2} \eta f_2'' - 5 f_2' + \theta_2 = 0, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \left\{ 1 + \frac{4}{3} R_d (1 + \theta_w \theta_0)^3 \right\} \theta_2'' + \frac{4}{Pr} R_d \theta_w (1 + \theta_w \theta_0)^2 (2 \theta_0' \theta_2' + \theta_1'^2) + \\ p_1 (f_0 \theta_1' + f_1 \theta_0') + \frac{1}{2} \eta \theta_2' - 4 \theta_2 = 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Sc} \phi_2'' + p_1 (f_0 \phi_1' + f_1 \phi_0') + \frac{1}{2} \eta \phi_2' - 4 \phi_2 - \lambda (\theta_0' \phi_2' + \\ 2 \theta_1' \phi_1' + \theta_2' \phi_0' + \theta_0'' \phi_2 + 2 \theta_1'' \phi_1 + \theta_2'' \phi_0) = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$f_2(0) = f_2'(0) = f_2'(\infty) = \theta_2(\infty) = \phi_2(0) = \theta_2(0) = \phi_2(\infty) = 0. \quad (45)$$

应用六阶隐式 Runge-Kutta-Butcher 初值解,和 Nachtsheim-Swigert 的迭代格式,可以数值地得到方程(34) ~ (45)的解<sup>[30]</sup>.

对  $Pr = 1.0$ , Illingworth<sup>[31]</sup>利用 von Mises 变换和积分逼近,不考虑辐射(即  $R_d = 0.0$ )和热泳( $\lambda = 0$ )影响时,首先研究了零阶方程组(34) ~ (37).因此得到  $f''(0)$  和  $\theta'(0)$  的数值解为

$$f''(0, \tau) = \tau^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.564 19 \tau^{1/2}, \theta'(0, \tau) = -\tau^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} = -0.564 19 \tau^{-1/2}. \quad (46)$$

取  $Pr = 1.0, R_d = 0.0$  和  $\lambda = 0$  时,由方程(34) ~ (37),得到  $f''(0)$  和  $\theta'(0)$  相应的数值为

$$f_0''(0) = 0.563 76 \tau^{1/2}, \theta_0'(0) = -0.562 37 \tau^{-1/2}, \quad (47)$$

比较式(46)和式(47)中的数值,可以发现它们十分接近.

然而,知道了  $f_i''(0)$ ,  $\theta_i'(0)$  和  $\phi_i''(0)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) 的数值,通过下面的式子可以得到剪切应力  $\tau_w$ :

$$\tau_w = \tau^{1/2} [f_0''(0) + \tau^2 f_1''(0) + \tau^4 f_2''(0)], \quad (48)$$

由下式,得到传热率  $q_w$ :

$$q_w = -\tau^{-1/2} \left( 1 + \frac{4}{3} R_d \theta_w^3 \right) [\theta'_0(0) + \tau^2 \theta'_1(0) + \tau^4 \theta'_2(0)], \quad (49)$$

由下式,得到传质率  $m_w$ :

$$m_w = \frac{1}{Sc} \tau^{-1/2} [\phi'_0(0) + \tau^2 \phi'_1(0) + \tau^4 \phi'_2(0)]. \quad (50)$$

例如,取  $Pr = 0.7$ ,  $R_d = 0.5$ ,  $\theta_w = 1.5$ ,  $Sc = 10.0$  和  $\lambda = 0.5$ ,  $\tau$  取不同值时,可以得到剪切应力  $\tau_w$ 、表面传热率  $q_w$  和表面传质率  $m_w$  为

$$\tau_w = \tau^{1/2} [0.76142 - 0.02237\tau^2 - 0.00088\tau^4], \quad (51)$$

$$q_w = -\tau^{-1/2} \left( 1 + \frac{4}{3} R_d \theta_w^3 \right) [0.23261 + 0.01372\tau^2 - 0.00100\tau^4], \quad (52)$$

$$m_w = \frac{1}{Sc} \tau^{-1/2} [2.45746 + 0.07743\tau^2 - 0.00698\tau^4]. \quad (53)$$

表1给出了  $0.1 \leq \tau \leq 9.98$  时,瞬时剪切应力  $\tau_w$ 、瞬时表面传热率  $q_w$  和瞬时表面传质率  $m_w$  值随  $\tau$  的变化。

表1 当  $Pr = 0.7$ ,  $Sc = 10$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $R_d = 0.5$  和  $\theta_w = 1.5$  时,剪切应力  $\tau_w$ 、表面传热率  $q_w$  和表面传质率  $m_w$  值随瞬时  $\tau$  的变化

Table 1 Numerical values of the transient shear stress  $\tau_w$ , surface heat transfer  $q_w$  and the surface rate of species concentration  $m_w$  for different values of  $\tau$  while  $Pr = 0.7$ ,  $Sc = 10$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $R_d = 0.5$  and  $\theta_w = 1.5$

$\tau$	$\tau_w$		$q_w$		$m_w$	
	finite difference	small or large $\tau$	finite difference	small or large $\tau$	finite difference	small or large $\tau$
0.100	0.24053	0.24071 <sup>s</sup>	2.39095	2.39202 <sup>s</sup>	0.78461	0.77736 <sup>s</sup>
0.220	0.35673	0.35663 <sup>s</sup>	1.61275	1.61636 <sup>s</sup>	0.52915	0.52473 <sup>s</sup>
0.420	0.49236	0.49088 <sup>s</sup>	1.17049	1.17879 <sup>s</sup>	0.38355	0.38134 <sup>s</sup>
0.660	0.61495	0.61053 <sup>s</sup>	0.94159	0.95521 <sup>s</sup>	0.30729	0.30681 <sup>s</sup>
0.820	0.68253	0.67552 <sup>s</sup>	0.85264	0.86957 <sup>s</sup>	0.27701	0.27748 <sup>s</sup>
1.060	0.76871	0.75691 <sup>s</sup>	0.76488	0.78691 <sup>s</sup>	0.24620	0.24800 <sup>s</sup>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10.020	1.12052	1.09733 <sup>l</sup>	0.63488	0.64713 <sup>l</sup>	0.17227	0.17495 <sup>l</sup>
12.180	1.11703	1.09931 <sup>l</sup>	0.63725	0.64676 <sup>l</sup>	0.17265	0.17466 <sup>l</sup>
15.300	1.11404	1.10083 <sup>l</sup>	0.63901	0.64649 <sup>l</sup>	0.17293	0.17445 <sup>l</sup>
18.420	1.11232	1.10164 <sup>l</sup>	0.63994	0.64634 <sup>l</sup>	0.17306	0.17433 <sup>l</sup>
19.980	1.11173	1.10192 <sup>l</sup>	0.64025	0.64629 <sup>l</sup>	0.17310	0.17429 <sup>l</sup>

注 表中上角 s 表示  $\tau$  取小数值, l 表示  $\tau$  取大数值。

\* Superscripts s and l are for small  $\tau$  and large  $\tau$ , respectively.

## 2.2 时间 $\tau \gg 1$ 时的渐近解

当  $\tau \gg 1$  时,方程(10)~(12)简化为

$$f''' + \frac{3}{4} f f'' - \frac{1}{2} f'^2 - \tau^{-2} \left( f' - \frac{1}{2} \eta f'' \right) + \theta = 0, \quad (54)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[ \left\{ 1 + \frac{4}{3} R_d (1 + \theta_w \theta)^3 \right\} \theta' \right]' + \frac{3}{4} f \theta' + \frac{1}{2} \eta \tau^{-2} \theta' = 0, \quad (55)$$

$$\frac{1}{Sc} \phi'' + \frac{3}{4} f \phi' + \frac{1}{2} \eta \tau^{-2} \phi' - \lambda (\theta' \phi' + \theta'' \phi) = 0, \quad (56)$$

相应的边界条件为



$$\begin{cases} f(0, \tau) = f'(0, \tau) = \phi(0, \tau) = 0, & \theta(0, \tau) = 1, \\ f'(\infty, \tau) = \theta(\infty, \tau) = 0, & \phi(\infty, \tau) = 1, \end{cases} \quad (57)$$

由于  $\tau \gg 1$ , 我们可以假定

$$f(\eta, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau^{-2i} f_i(\eta), \theta(\eta, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau^{-2i} \theta_i(\eta) \quad (58)$$

$$\phi(\eta, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau^{-2i} \phi_i(\eta). \quad (59)$$

将式(58) ~ (59)代入方程(54) ~ (57), 取首阶项

$$f_0''' + \frac{3}{4} f_0 f_0'' - \frac{1}{2} f_0'^2 + \theta_0 = 0, \quad (60)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[ \left\{ 1 + \frac{4}{3} R_d (1 + \theta_w \theta_0)^3 \right\} \theta_0' \right]' + \frac{3}{4} f_0 \theta_0' = 0, \quad (61)$$

$$\frac{1}{Sc} \phi_0'' + \frac{3}{4} f_0 \phi_0' - \lambda (\theta_0' \phi_0' + \theta_0'' \phi_0) = 0, \quad (62)$$

$$f_0(0) = f_0'(0) = f_0'(\infty) = \theta_0(\infty) = \phi_0(0) = 0, \theta_0(0) = \phi_0(\infty) = 1. \quad (63)$$

上述方程组表示稳定的自由对流. 值得说明的是, 上述方程组不考虑热泳时, 首先由 Özişik<sup>[32]</sup> 研究. Ostrach<sup>[33]</sup> 进一步研究了  $R_d = 0.0$  和  $\lambda = 0.0$  时, 这些方程表示稳定的自然对流, 当  $Pr = 1.0, R_d = 0.0$  和  $\lambda = 0.0$  时, 他发现

$$\sqrt{2} f''(0) = 0.908\ 06, \theta'(0) / \sqrt{2} = -0.401\ 00. \quad (64)$$

对于同样的问题, 我们得到

$$f_0''(0) = 0.908\ 15, \theta_0'(0) = -0.401\ 04, \quad (65)$$

$O(\tau^{-2})$  方程为

$$f_1''' + \frac{3}{4} (f_0 f_1'' + f_1 f_0'') - f_0' f_1' - f_0' + \frac{1}{2} \eta f_0'' + \theta_1 = 0, \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \left\{ 1 + \frac{4}{3} R_d (1 + \theta_w \theta_0)^3 \right\} \theta_1'' + \frac{8}{Pr} R_d \theta_w (1 + \theta_w \theta_0)^2 \theta_0' \theta_1' + \\ \frac{3}{4} f_0 \theta_0' + \frac{1}{2} \eta \theta_0' = 0, \end{aligned} \quad (67)$$

$$\frac{1}{Sc} \phi_1'' + \frac{3}{4} (f_0 \phi_1' + f_1 \phi_0') + \frac{1}{2} \eta \phi_0' - \lambda (\theta_0' \phi_1' + \theta_1' \phi_0' + \theta_0'' \phi_1 + \theta_1'' \phi_0) = 0, \quad (68)$$

$$f_1(0) = f_1'(0) = f_1'(\infty) = \theta_1(\infty) = \phi_1(0) = \theta_1(0) = \phi_1(\infty) = 0. \quad (69)$$

因此, 剪切应力  $\tau_w$  为

$$\tau_w = f_0'(0) + \tau^{-2} f_1(0), \quad (70)$$

传热率  $q_w$  为

$$q_w = - \left( 1 + \frac{4}{3} R_d \theta_w^3 \right) [\theta_0(0) + \tau^{-2} \theta_1(0)], \quad (71)$$

传质率  $m_w$  为

$$m_w = \frac{1}{Sc} [\phi_0(0) + \tau^{-2} \phi_1(0)]. \quad (72)$$

求解上述方程组的方法, 与求解小数值  $\tau$  的方程的方法一样. 因此,  $Pr = 0.7, R_d = 0.5, \theta_w = 1.5, Sc = 10.0$  和  $\lambda = 0.5$  时, 大数值  $\tau$  的剪切应力  $\tau_w$ 、表面传热率  $q_w$  和表面传质率  $m_w$  的渐近值由下面公式得到

$$\tau_w = 1.11027 - 0.63331\tau^{-2}, \quad (73)$$

$$q_w = - \left( 1 + \frac{4}{3} R_d \theta_w^3 \right) [0.19741 + 0.03457\tau^{-2}], \quad (74)$$

$$m_w = \frac{1}{Sc} [1.73417 + 0.87541\tau^{-2}]. \quad (75)$$

表1中给出了 $\tau \in [10.02, 19.98]$ 时,由上述公式得到瞬时的 $\tau_w, q_w$ 和 $m_w$ 值,相应地和所有时间 $\tau$ 得到的值进行比较。

### 3 结果及讨论

上面研究由辐射产生热泳微粒的沉积,对粘性光密灰色流体瞬时自然对流边界层流动的影响.通过引入流函数,将边界层流动的控制方程,转换为耦合的抛物线型非线性偏微分方程组.数值地求解该方程组,得到了小数值 $\tau$ 和大数值 $\tau$ 时的渐近解。

通过本文的研究,取Prandtl数 $Pr$ 为0.7,表示空气在20℃达到1个标准大气压.对通常的气雾来说,微粒的Schmidt数 $Sc$ 很大( $Sc \geq 10^3$ ,参见文献[9]).因此, $Sc$ 值取为10,100和1000。

取Prandtl数 $Pr = 0.7$ , Schmidt数 $Sc = 10.0$ ,热泳参数 $\lambda = 0.5$ ,辐射参数 $R_d = 0.5$ 和表面温度参数 $\theta_w = 1.5$ ,表1列出了 $0 < \tau < 20$ 时,瞬时剪切应力 $\tau_w$ 、瞬时表面传热率 $q_w$ 和瞬时表面传质率 $m_w$ 计算值.表1在前述相同参数下,比较小数值 $\tau$ 和大数值 $\tau$ 时得到的数值结果.比较发现,小数值 $\tau$ 和大数值 $\tau$ 的渐近解 $\tau_w, q_w$ 和 $m_w$ ,与有限差分法得到的、所有 $\tau$ 值下的 $\tau_w, q_w$ 和 $m_w$ 吻合得好.从表1还可以发现,对于小数值的 $\tau$ ,剪切应力 $\tau_w$ ,随着时间 $\tau$ 的增大而增大;而表面传热率 $q_w$ 和表面传质率 $m_w$ ,随着时间 $\tau$ 的增大而减少.还可以发现,对于大数值 $\tau$ ,所有物理量 $\tau_w, q_w$ 和 $m_w$ 都达到稳定流动值,这也是预料中的事情。

表2 当 $\theta_w = 1.5, Pr = 1.0, \lambda = 0.0$ 和 $R_d$ 取不同数值时,本文的稳态结果与文献[25]结果的比较

Table 2 Comparison of the present results at the steady state with the results of reference [25] for different values of  $R_d$  by taking  $\theta_w = 1.5, Pr = 1.0$  and  $\lambda = 0.0$

$R_d$	$\tau_w / \sqrt{2}$		$\sqrt{2} q_w / (1 + 4R_d \theta_w^3 / 3)$	
	reference [25]	present	reference [25]	present
0.0	0.642 1	0.640 4	0.567 1	0.567 2
0.5	0.750 2	0.750 7	0.320 9	0.320 4
1.0	0.798 8	0.800 3	0.253 8	0.253 2
2.0	0.849 8	0.853 2	0.195 1	0.194 1
3.0	0.877 6	0.883 0	0.166 0	0.164 4

表3 当 $Pr = 1.0, \lambda = 0.0$ 和 $\theta_w$ 取不同数值时,本文的稳态结果与文献[25]结果的比较

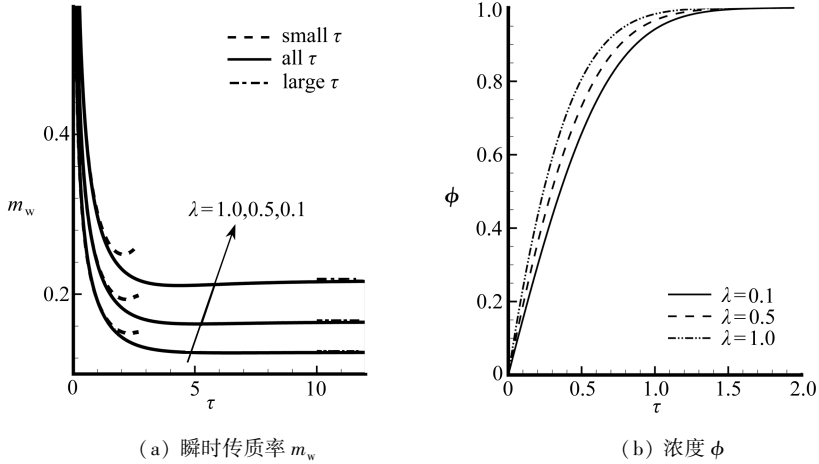
Table 3 Comparison of the present results at the steady state with the results of reference [25] for different values of  $\theta_w$  by taking  $Pr = 1.0$  and  $\lambda = 0.0$

$\theta_w$	$\tau_w / \sqrt{2}$		$\sqrt{2} q_w / (1 + 4R_d \theta_w^3 / 3)$	
	reference [25]	present	reference [25]	present
1.01	0.729 5	0.729 6	0.412 0	0.411 4
1.10	0.742 5	0.742 9	0.376 1	0.375 5
1.50	0.798 8	0.800 3	0.253 8	0.253 2
2.00	0.857 9	0.860 7	0.167 5	0.166 9
2.50	0.902 5	0.906 4	0.119 6	0.119 0

当 $\lambda = 0, Pr = 1.0$ ,表2列出 $0 \leq R_d \leq 3.0, \theta_w = 1.5$ 时,表3列出 $R_d = 1.0, 1.01 \leq \theta_w \leq 2.5$ 时,由控制方程(60)~(63)得到的稳定流动值 $\tau_w$ 和 $m_w$ ,与文献[25]的结果进行比较,

发现两者吻合得很好。

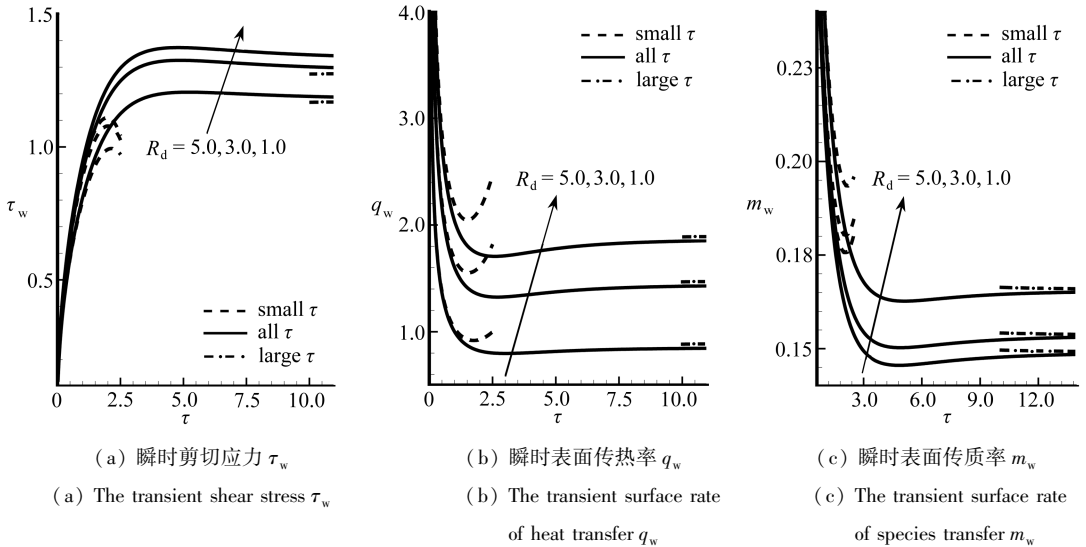
当  $R_d = 1.0, \theta_w = 1.5$  和  $Sc = 1000$  时,图 2 给出了热泳参数  $\lambda$  对瞬时传质率  $m_w$  和浓度  $\phi$  的影响.在这里我们发现,边界层区域内瞬时传质率  $m_w$  和浓度  $\phi$ ,都随着热泳参数的增大而增大.从  $m_w$  和  $\phi$  的数值可以发现,热泳参数的影响并不那么严重,文献[25]中也观察到同样的结果.



(a) 瞬时传质率  $m_w$  (b) 浓度  $\phi$   
 (a) Transient species transfer  $m_w$  (b) Concentration  $\phi$

图 2 当  $R_d = 1.0, \theta_w = 1.5$  和  $Sc = 10.0$  时,时间  $\tau$  取小数值、大数值和所有数值时的数值解

Fig.2 Numerical values of transient species transfer  $m_w$  obtained for small, large and all time  $\tau$  and concentration profiles for different  $\lambda$  at  $R_d = 1.0, \theta_w = 1.5$  and  $Sc = 10.0$



(a) 瞬时剪切应力  $\tau_w$  (b) 瞬时表面传热率  $q_w$  (c) 瞬时表面传质率  $m_w$   
 (a) The transient shear stress  $\tau_w$  (b) The transient surface rate of heat transfer  $q_w$  (c) The transient surface rate of species transfer  $m_w$

图 3 当  $\theta_w = 1.5, \lambda = 0.5, Sc = 10.0$  时,  $R_d$  取不同数值时,用不同方法得到的各物理量随  $\tau$  的变化

Fig.3 Effect of different  $R_d$  on  $\tau_w, q_w$  and  $m_w$  against  $\tau$  obtained by different methods with  $\theta_w = 1.5, \lambda = 0.5$  and  $Sc = 10.0$

本文的目的是研究辐射及其热泳对瞬时自然对流的影响,当  $\theta_w = 1.5, \lambda = 0.5, Sc = 10.0$  和  $R_d = 1.0, 3.0, 5.0$  时,图 3(a) 给出了瞬时剪切应力  $\tau_w$ ; 图 3(b) 给出了瞬时表面传热率  $q_w$

和(c)瞬时表面传质率  $m_w$  的变化,其中,短虚线为小数值  $\tau$ ,长虚线为大数值  $\tau$ ,实线为所有的  $\tau$  值。从图3可以发现,小数值  $\tau$  和大数值  $\tau$  得到的渐近解  $\tau_w, q_w$  和  $m_w$ , 与所有  $\tau$  值的数值解吻合得好。从图3还可以发现,随着流动场中热辐射的增大,边界层内流体的传热率亦增大,反过来有助于表面周围流体温度的升高。因此,提高了边界层内的传热、传质和剪切应力。

下面讨论有关参数对瞬时的速度、温度和浓度分布曲线的影响。图4就  $R_d = 1.0, \theta_w = 1.5, \lambda = 0.1$  和  $Sc = 10$  时,给出了  $\tau$  取不同数值时速度、温度和浓度的分布曲线。从图4可以发现,3条曲线都随着时间  $\tau$  的增大而减小,并最终在  $\tau = 6.0$  时达到稳定状态。

图5就  $\tau = 3.0, \theta_w = 1.5, \lambda = 0.1$  和  $Sc = 1\ 000$  时,给出了不同辐射参数  $R_d$  值对速度、温度和浓度曲线的影响,可以发现,3条曲线都随着  $R_d$  的增大而增大。

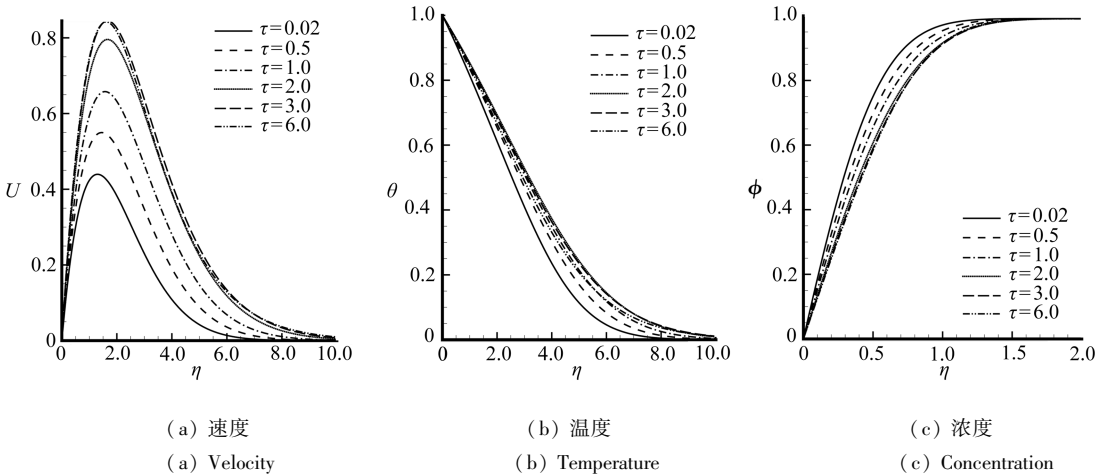


图4 当  $R_d = 1.0, \theta_w = 1.5, \lambda = 0.1, Sc = 10.0$  和  $\tau$  取不同数值时,速度、温度和浓度的分布曲线

Fig.4 Profiles of velocity, temperature, and concentration for time  $\tau$  with  $R_d = 1.0, \theta_w = 1.5, \lambda = 0.1$  and  $Sc = 10.0$

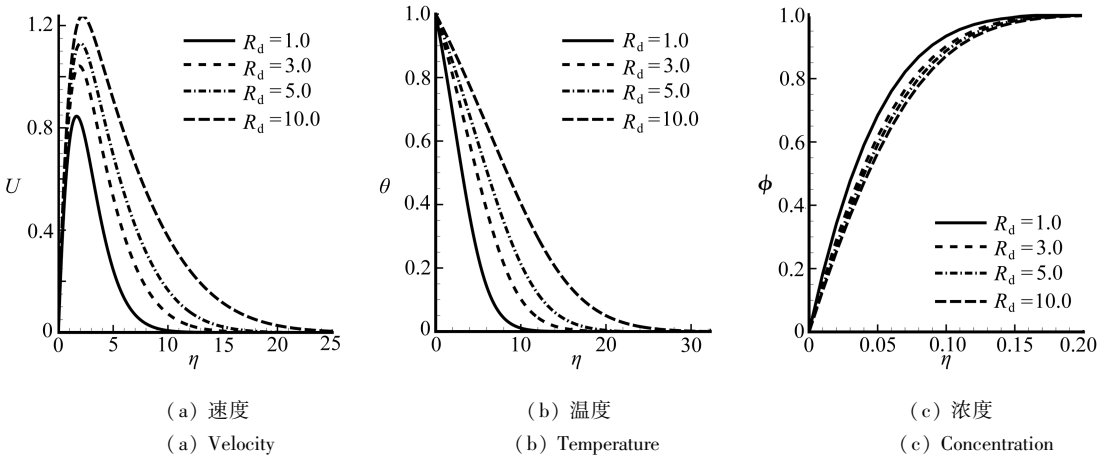


图5 当  $\theta_w = 1.5, \lambda = 0.1, Sc = 1\ 000, \tau = 3.0$  和  $R_d$  取不同数值时,速度、温度和浓度的分布曲线

Fig.5 Effect of different  $R_d$  on velocity, temperature, and concentration profiles with  $\theta_w = 1.5, \lambda = 0.1$  and  $Sc = 1\ 000$  while  $\tau = 3.0$

最后,图6就时间  $\tau = 3.0, R_d = 1.0, \lambda = 0.1$  和  $Sc = 1\ 000$  时,给出了表面温度参数  $\theta_w$  对边界层中速度、温度和浓度曲线的影响。如同辐射参数一样,也可以看到由于  $\theta_w$  的增大,速度曲线出现折叠。正如所预期的,由于辐射和表面温度参数提高了热量和质量的流量,因此,结果

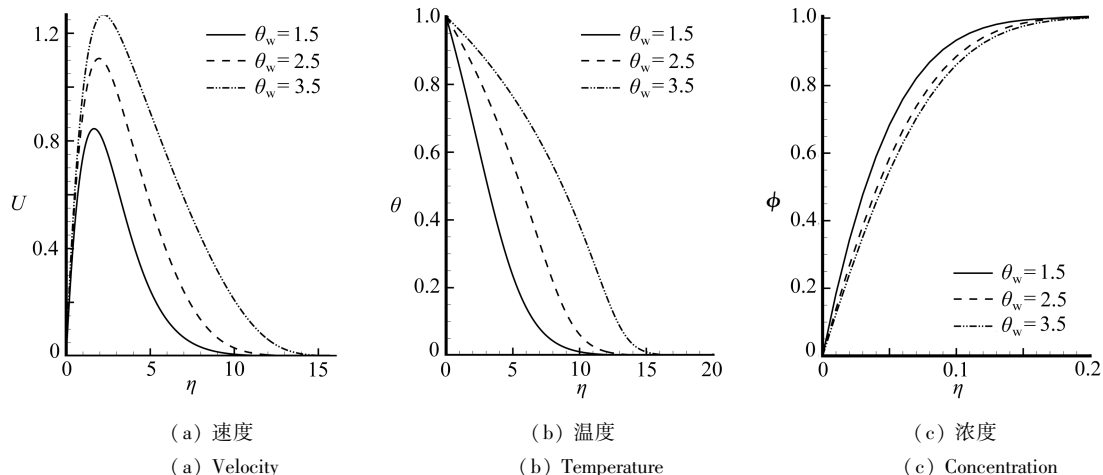


图6 当  $R_d = 1.0$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $Sc = 1\ 000$ ,  $\tau = 3.0$  和  $\theta_w$  取不同数值时,速度、温度和浓度的分布曲线

Fig. 6 Effect of different  $\theta_w$  on velocity, temperature, and concentration profiles with

$R_d = 1.0$ ,  $\lambda = 0.1$  and  $Sc = 1\ 000$  while  $\tau = 3.0$

使得动量边界层厚度、热量边界层厚度以及浓度边界层厚度增大。

## 4 结 论

本文讨论了热泳和辐射,对粘性、不可压缩、光密灰色流体,作瞬时自然对流边界层流动的综合影响。应用 Rosseland 近似得到辐射的热通量。利用向前的有限差分法,将边界层控制方程简化为适当的拟相似形式,并进行数值积分。还得到了小数值  $\tau$  和大数值  $\tau$  时问题的渐近解。比较了 3 种方法得到的结果,发现吻合得好。

从上述分析中,可以得到以下结论:

- 1) 表面微粒沉积率随着热泳参数的增大而减小;
- 2)  $R_d$  的增大会导致瞬时剪切应力和表面传热率的增大;
- 3) 由于流体中辐射和表面温度影响的增大,动量、热量和质量扩散的边界层厚度随着增厚。

致谢 作者对审稿专家给本文提出的宝贵建议表示衷心感谢。

## 参考文献 (References):

- [1] Green H L, Lane W R. *Particulate Clouds; Dusts, Smokes and Mists* [M]. New Jersey, Princeton: Van Nostrand, 1964: 186.
- [2] Goren S L. Thermophoresis of aerosol particles in the laminar boundary layer on a flat plate [J]. *J Colloid Interface Sci*, 1977, **61**(1): 77-85.
- [3] Talbot L, Cheng R K, Schefer A W, Wills D R. Thermophoresis of particles in a heated boundary layer [J]. *J Fluid Mech*, 1980, **101**: 737-758.
- [4] Mills A F, Hang X, Ayazi F. The effect of wall suction and thermophoresis on aerosol-particle deposition from a laminar boundary-layer on a flat plate [J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 1984, **27**(7): 1110-1113.
- [5] Epstein M, Hauser G M, Henry R E. Thermophoretic deposition of particles in natural convection flow from vertical plate [J]. *ASME J Heat Trans*, 1985, **107**(2): 272-276.
- [6] Garg V K, Jayaraj S. Thermophoresis of aerosol particles in laminar flow over inclined plates

- [J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 1988, **31**(4): 875-890.
- [7] Garg V K, Jayaraj S. Thermophoretic deposition over a cylinder[J]. *Int J Engrg Fluid Mech*, 1990, **3**: 175-196.
- [8] Jia G, Cipolla J W, Yener Y. Thermophoresis of a radiating aerosol laminar boundary layer flow[J]. *J Thermophys Heat Transfer*, 1992, **6**(3): 476-482.
- [9] Tsai R. A simple approach for evaluating the effect of wall suction and thermophoresis on aerosol particle deposition from a laminar flow over a flat plate[J]. *Int Comm Heat Mass Transfer*, 1999, **26**(2): 249-257.
- [10] Chang Y P, Tsai R, Sui F M. The effect of thermophoresis on particle deposition from a mixed convection flow onto a vertical flat plate[J]. *J Aerosol Sci*, 1999, **30**(10): 1363-1378.
- [11] Jayaraj S, Dinesh K K, Pillai K L. Thermophoresis in natural convection with variable properties[J]. *Heat Mass Transfer*, 1999, **34**(6): 469-475.
- [12] Selim A, Hossain M A, Rees D A S. The effect of surface mass transfer on mixed convection flow past a heated flat permeable plate with thermophoresis[J]. *Int J Thermal Sci*, 2003, **42**(10): 973-982.
- [13] Chamka A, Pop I. Effect of thermophoresis particle deposition in free convection boundary layer from a vertical flat plate embedded in porous medium[J]. *Int Comm Heat Mass Transfer*, 2004, **31**(3): 421-430.
- [14] Postelnicu A. Effects of thermophoresis particle deposition in free convection boundary layer from a horizontal flat plate embedded in porous medium[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, **50**(15/16): 2981-2985.
- [15] Bakier A Y, Gorla R S R. Effects of thermophoresis and radiation on laminar flow along a semi infinite vertical plate[J]. *Heat Mass Transfer*, 2011, **47**(4): 419-425.
- [16] Cess R D. The interaction of thermal radiation with free convection heat transfer[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 1966, **9**(11): 1269-1277.
- [17] Arpacı V S. Effect of thermal radiation on the laminar free convection from a heated vertical plate[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 1968, **11**(5): 871-881.
- [18] Cheng E H, Özişik M N. Radiation with free convection in an absorbing, emitting and scattering medium[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 1972, **15**(6): 1243-1252.
- [19] Ali M M, Chen T S, Armaly B F. Natural convection radiation interaction in boundary layer flow over horizontal surface[R]. *AIAA J*, 1984, **22**: 1797-1803.
- [20] Rosseland S. *Theoretical Astrophysics*[M]. London: Oxford University Press, 1936.
- [21] Hossain M A, Takhar H S. Effect of radiation on natural convection flow over an isothermal horizontal plate[J]. *Heat Mass Transfer*, 1999, **35**(4): 321-326.
- [22] Hossain M A, Pop I. Radiation effect on Darcy free convection along an inclined surface plate in a porous media[J]. *Heat Mass Transfer*, 1997, **32**: 223-227.
- [23] Hossain M A, Kutubuddin M, Takhar H S. Radiation interaction on forced and free convection across a horizontal cylinder[J]. *Appl Mech Engrg*, 1999, **4**(2): 219-235.
- [24] Hossain M A, Kutubuddin M, Pop I. Effect of conduction-radiation interaction on the mixed convection flow from a horizontal cylinder[J]. *Heat Mass Transfer*, 1999, **35**(4): 304-314.
- [25] Hossain M A, Khanfer K, Vafai K. The effect of radiation on free convection flow of fluid with variable viscosity from a porous vertical plate[J]. *Int J Therm Sci*, 2001, **40**(2): 115-124.
- [26] Hossain M A, Anghel M, Pop I. Thermal radiation effect on free convection over axisymmetric body with application to a rotating hemisphere[J]. *Archive of Mechanics*, 2002, **54**(1):

- 55-74.
- [27] Molla M M, Hossain M A. Radiation effect on mixed convection laminar flow along a vertical wavy surface[J]. *Int J Thermal Sci*, 2007, **46**(9): 926-935.
- [28] Molla M M, Hossain M A, Gorla R S R. Radiation effect on natural convection boundary layer flow over a vertical wavy frustum of a cone [J]. *J Mechanical Engineering Science*, 2009, **223**: 1605-1614.
- [29] Batchelor G K, Shen C. Thermophoretic deposition of particles in gas flowing over cold surfaces[J]. *J Colloid Interface Sci*, 1985, **107**(1): 21-37.
- [30] Nachtsheim P R, Swigert P. Satisfaction of the asymptotic boundary conditions in numerical solution of the system of nonlinear equations of boundary layer type[R]. NASA TN D-3004, 1965.
- [31] Illingworth C R. Unsteady laminar flow of a gas near an infinite flat plate[J]. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1950, **13**: 603-619.
- [32] Özişik M N. *Radiative Transfer and Interactions With Conduction and Radiation*[M]. N Y: John-Wiley & Sons, 1973: 526-527.
- [33] Ostrach S. An analysis of laminar free convection flow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force[R]. NASA Report No 1111, 1953: 63-79.
- [34] Takhar H S, Ganesan H S, Ekambavanan K, Soundalgekar V M. Transient free convection past a semi-infinite vertical plate with variable surface temperature[J]. *Int J Num Meth Heat Mass Flow*, 1997, **7**(4): 280-296.

## Conduction-Radiation Effect on Transient Natural Convection Along a Vertical Flat Surface With Thermophoresis

S. Mustafa Mahfooz, Md. Anwar Hossain

(Department of Mathematics, COMSATS Institute of Information Technology,  
Park Road, Chak Shahzad, Islamabad 44000, Pakistan)

**Abstract:** The present paper concerns with the effect of thermophoretic particle deposition on the transient natural convection laminar flow along a vertical flat surface which was immersed in an optically dense gray fluid in the presence of thermal radiation. In the analysis the radiative heat flux term was expressed by adopting the Rosseland diffusion approximation. The governing equations were reduced to a set of parabolic partial differential equations which were then solved numerically with a finite difference scheme in the entire time regime,  $0 \leq \tau < \infty$ . Asymptotic solutions were also obtained for sufficiently small and large times. Excellent agreement was found between the asymptotic and the numerical solutions. Moreover, the effects of different physical parameters, namely the thermal radiation parameter,  $R_d$ , the surface temperature parameter,  $\theta_w$ , and the thermophoretic parameter,  $\lambda$ , on the transient surface shear stress,  $\tau_w$ , the rate of surface heat transfer,  $q_w$ , and the rate of species concentration,  $m_w$  as well as on the transient velocity, temperature and concentration profiles were shown graphically for a fluid as air for which the Prandtl number,  $Pr$ , is 0.7 at 20°C and 1 atm pressure.

**Key words:** radiation; optically dense fluid; thermophoresis; transient natural convection