文章编号:1000-0887(2012)02-0231-09

一类组合硬化金属材料的成型问题*

T·A·安格罗夫

(保加利亚科学院 力学研究所, 索非亚 1113, 保加利亚)

摘要: 对一类组合金属材料,即不可压缩、刚塑性、与应变率相关、各向同性、运动中硬化的材料,在非局部接触的 Coulomb 摩擦边界条件下,考虑其准稳定成型问题. 导出一组耦合的变分公式,证明(含延迟时间的)变刚度参数法的收敛性,证明了所得结果的存在性和唯一性.

关 键 词: 准稳定; 刚塑性; 组合硬化材料; 非局部摩擦; 变分分析

中图分类号: O176; O313.5; O344 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.02.008

引 言

过去的几十年里,金属成型过程的理论、计算和实验研究集中在大变形塑性理论流动公式的研究,具有内在状态变化的研究,充分描述材料的特性的研究(参见文献[1-3]及其后面的参考文献),以及对结果有着重要影响的接触摩擦条件研究等方面. 由于按小变形弹塑性理论,对相当广阔范围内的问题,已经有一些发展得相当成熟的数学计算工具[4-5],可以对其中的一些理论稍作修改,就可以应用到金属成型问题的分析. 近年来,金属成型问题,以非线性刚-粘塑性材料为模型,以非局部接触、法向依顺(normal compliance)和 Coulomb 摩擦为模型,进行数学分析及其公式化表示(参见文献[6-9]及其后面的参考文献),类似于弹性和小变形粘塑性理论中的接触问题[10-14]. 推导出变分不等式, 使用解非线性变分问题的方法, 得到了存在性、唯一性和近似性结果. 提出了适当连续线性化方法和有限元计算算法, 并用以求解实例问题.

本文将考虑一类金属的成型问题,在非局部接触的 Coulomb 摩擦条件下,金属带(工件)准稳定地拉曳和挤压通过模具. 假设工件材料是各向同性、不可压缩、刚塑性、应变率敏感、运动中硬化的. 导出一组耦合的变分公式,证明(含延迟时间的)变量刚度参数法的收敛性,证明了所得结果的存在性和唯一性.

1 问题的陈述

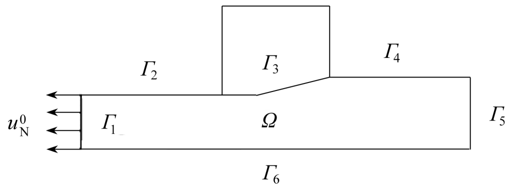
图 1 给出了金属材料的成型过程:在 $T \in [0, \infty)$ 里,一个占用区域 $\Omega \subset R^k, k = 2,3$ 的金属工件从等温准稳定状态,直至达到稳定状态. 假设工件占用区域的边界 $\Gamma = \cup_{l=1}^{6} \Gamma_l$ 足够规则,由 6 个彼此分开的子集组成. 假设在 Γ_1 上受到一个指定速度常量 u_N^0 的作用,$\Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$

* **收稿日期:** 2010-08-23; **修订日期:** 2011-11-20

作者简介: T. A. Angelov(E-mail: taa@imbm.bas.bg).

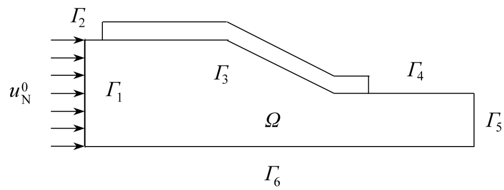
本文原文为英文,黄雅意 译,张禄坤 校.

上没有牵引力，Γ_3 为接触边界，Γ_6 为对称边界.



（a）拉曳型

（a）Drawing



（b）挤压型

（b）Extrusion

图 1 金属带拉曳和挤压的示意图

Fig. 1 Illustration of a strip drawing and extrusion

本文对重复的脚标，使用标准的求和约定公式. 记 $\boldsymbol{x}=\{x_i\}$ 为直角坐标系，δ_{ij} 为 Kronecker 符号. 又设 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\{u_i(\boldsymbol{x},t)\}$，$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)=\{\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t)\}$，$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{x},t)=\{\kappa_{ij}(\boldsymbol{x},t)\}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{x},t)=\{\dot{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{x},t)\}$，$1\leqslant i,j\leqslant k$ 分别为速度矢量、应力张量、反向应力张量（运动学硬化参数）和应变率张量，这里

$$\bar{\sigma}^0=\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}^0s_{ij}^0},\ \dot{\bar{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{2}{3}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij}},\ \bar{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=\int_0^t\dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

分别为等效的主动应力、应变率和应变（各向同性硬化参数），其中

$$s_{ij}^0=s_{ij}-\tilde{\kappa}_{ij}=\sigma_{ij}^0-\sigma_H^0\delta_{ij},\ s_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma_H\delta_{ij}, \tag{2a}$$

$$\tilde{\kappa}_{ij}=\kappa_{ij}-\kappa_H\delta_{ij},\ \sigma_{ij}^0=\sigma_{ij}-\kappa_{ij},\ \dot{e}_{ij}=\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_V\delta_{ij} \tag{2b}$$

分别为主动的偏应力分量、偏应力、偏反向应力、主动应力和应变率.

$$\sigma_H^0=\sigma_H-\kappa_H,\ \sigma_H=\frac{1}{3}\sigma_{ii},\ \kappa_H=\frac{1}{3}\kappa_{ii},\ \dot{\varepsilon}_V=\dot{\varepsilon}_{ii} \tag{2c}$$

分别为主动的静水压力、静水压力、静水反向压力和体膨胀应变率. 假设各向同性和不可压缩的工件材料，满足以下屈服准则和流动定律：

$$F(\sigma_{ij},\kappa_{ij},\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}})\equiv(\bar{\sigma}^0)^2-\sigma_p^2(\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}})=0,\ \dot{e}_{ij}=\frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}^0}s_{ij}^0. \tag{3}$$

原问题可以归结为：寻求速度场 $\boldsymbol{u}$，应力场 $\boldsymbol{\sigma}$，反向应力场 $\boldsymbol{\kappa}$ 和等效应变场 $\bar{\varepsilon}$，满足

平衡方程

$$\sigma_{ij,j}=0,\qquad 在\ \Omega\times(0,T)\ 中; \tag{4a}$$

等效的应变发展方程

$$\frac{\partial\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{x},t),\qquad 在\ \Omega\times(0,T)\ 中; \tag{4b}$$

反向应力发展方程

$$\frac{\partial\kappa_{ij}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=c_\kappa\dot{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{x},t),\qquad 在\ \Omega\times(0,T)\ 中; \tag{4c}$$

不可压缩性条件

$$\dot{\varepsilon}_V=0,\qquad 在\ \Omega\times(0,T)\ 中; \tag{4d}$$

应变率-速度关系式

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}); \tag{4e}$$

本构方程

$$\sigma_{ij}=\frac{2}{3}\frac{\sigma_{\mathrm{p}}}{\dot{\bar{\varepsilon}}}\dot{\varepsilon}_{ij}+\sigma_{\mathrm{H}}\delta_{ij}+\tilde{\kappa}_{ij}; \tag{4f}$$

边界条件

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0},\ u_{\mathrm{N}}=u_{\mathrm{N}}^{0},\qquad 在\ \Gamma_1\times(0,T)\ 上, \tag{5a}$$

$$\sigma_{\mathrm{N}}=0,\ \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0},\qquad 在\ \Gamma_2\cup\Gamma_4\cup\Gamma_5\times(0,T)\ 上, \tag{5b}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0},\ u_{\mathrm{N}}=0,\qquad 在\ \Gamma_6\times(0,T)\ 上, \tag{5c}$$

$$\begin{cases}u_{\mathrm{N}}=0,\ \sigma_{\mathrm{N}}\leqslant 0\ 且\\ 若\ |\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})|<\tau_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{u}),\ 则\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0},\\ 若\ |\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})|=\tau_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{u}),\ 则\ \exists\ 常数\ \lambda\geqslant 0,\\ 使得\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}=-\lambda\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}),\qquad 在\ \Gamma_3\times(0,T)\ 上;\end{cases} \tag{5d}$$

初始条件

$$\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=0,\ \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{0},\qquad 在\ \Omega\ 中; \tag{6}$$

这里,$\boldsymbol{n}=\{n_i\}$ 为 Γ 的单位外法线矢量;$\boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}=u_{\mathrm{N}}\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}=\{u_{\mathrm{T}i}\}$ 分别为 Γ 上速度矢量的法向分量和切向分量;$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{N}}=\sigma_{\mathrm{N}}\boldsymbol{n}$,$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}=\{\sigma_{\mathrm{T}i}\}$ 分别为 Γ 上应力矢量的法向分量和切向分量;c_κ 为一个正的材料常数;$\tau_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{u})=\mu_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x})\bar{\sigma}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{u})$, $\mu_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x})$ 为摩擦因数,$\bar{\sigma}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{u})\geqslant 0$ 为软化(mollify)边界 Γ_3 上的法向压力[6-9,12];$\sigma_{\mathrm{p}}(\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}})=\sigma_{\mathrm{p}0}(\bar{\varepsilon})+\sigma_{\mathrm{p}1}(\dot{\bar{\varepsilon}})$ 为与应变和应变率相关的单轴屈服极限,其中 $\sigma_{\mathrm{p}0}(0)=0$,$\sigma_{\mathrm{p}1}(0)=0$,不失一般性,假设 $\sigma_{\mathrm{p}0}(\bar{\varepsilon})$ 和 $\sigma_{\mathrm{p}1}(\dot{\bar{\varepsilon}})$ 是单调递增、几乎处处可微的函数,使得

$$\eta_1\leqslant\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{p}0}(\bar{\varepsilon})}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}}\leqslant\frac{\sigma_{\mathrm{p}0}(\bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon}}\leqslant\eta_2,\ \eta_3\leqslant\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{p}1}(\dot{\bar{\varepsilon}})}{\mathrm{d}\dot{\bar{\varepsilon}}}\leqslant\frac{\sigma_{\mathrm{p}1}(\dot{\bar{\varepsilon}})}{\dot{\bar{\varepsilon}}}\leqslant\eta_4,\quad \forall\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}}\in[0,\infty), \tag{7}$$

其中,η_1, η_2, η_3, η_4 为正常数.

2 变分公式及其可解性

令 V 和 H 表示如下的 Hilbert 空间:

$$V=\{\boldsymbol{v}:\boldsymbol{v}\in(H^1(\Omega))^k,\ v_{\mathrm{N}}=0,在\ \Gamma_3\cup\Gamma_6 上\},$$

$$H=(H^0(\Omega))^k\equiv(L_2(\Omega))^k,\ V\subset H\equiv H'\subset V',$$

其内积和范数分别为

$$\begin{cases}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_V=\int_\Omega\dot{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{u})\dot{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{x},\ \|\boldsymbol{u}\|_V=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_V^{1/2}, & \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V,\\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_0=\int_\Omega u_iv_i\mathrm{d}\boldsymbol{x},\ \|\boldsymbol{u}\|_0=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_0^{1/2}, & \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in H,\end{cases} \tag{8}$$

其中,V' 和 H' 分别为 V 和 H 的对偶空间. 定义 U 为 V 的闭凸子集:

$$U=\{\boldsymbol{v}:\boldsymbol{v}\in V,\ v_{i,i}=0,\ 在\ \Omega\ 中,\ v_{\mathrm{N}}=u_{\mathrm{N}}^0,\ 在\ \Gamma_1\ 上\},$$

并引入空间

$$\mathcal{H}=\{\boldsymbol{\omega}=\{\omega_{ij}\}:\boldsymbol{\omega}\in(H^0(\Omega))^{k\times k},\omega_{ij}=\omega_{ji},\ 1\leqslant i,j\leqslant k\},$$

其内积和范数为

$$(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\chi})_{\mathcal{H}}=\int_\Omega\omega_{ij}\chi_{ij}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\ \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{H}}=(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_{\mathcal{H}}^{1/2},\qquad\forall\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\chi}\in\mathcal{H}.$$

那么,对于 $\boldsymbol{u}$ 和 U 中所有的 $\boldsymbol{v}$, 将式(4a)乘以 $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})$ 后,进行内积计算,应用 Green 公式并考虑到边界条件,最后得到

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\dot{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\Gamma_3}\tau_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{u})\,|\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\,|\,\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_3}\tau_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{u})\,|\,\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}\,|\,\mathrm{d}\Gamma\geqslant 0. \tag{9}$$

进一步,假设 $\mu_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x})\in L_\infty(\Gamma_3)$,记 $H=H^0(\Omega)$,并对所有的 $\boldsymbol{w},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, 引入记号

$$a(\boldsymbol{w};\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v})=\int_\Omega \frac{2}{3}\frac{\sigma_{\mathrm{p1}}(\boldsymbol{w})}{\dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{w})}\,\dot{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{u})\dot{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{10}$$

$$j(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v})=\int_{\Gamma_3}\tau_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{u})\,|\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\,|\,\mathrm{d}\Gamma,\; j_0(\bar{\varepsilon},\boldsymbol{u})=\int_\Omega \sigma_{\mathrm{p}0}(\bar{\varepsilon})\dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{11}$$

那么,原问题(4)~(6)将和下面的变分问题联系起来:

寻求函数 $\boldsymbol{u}(t):[0,T]\rightarrow U,\bar{\varepsilon}(t):[0,T]\rightarrow H,\boldsymbol{\kappa}(t):[0,T]\rightarrow\mathscr{H}$, 满足

$$a(\boldsymbol{u};\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{\kappa},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}))_{\mathscr{H}}+j_0(\bar{\varepsilon},\,\boldsymbol{v})-\\ j_0(\bar{\varepsilon},\,\boldsymbol{u})+j(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v})-j(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{u})\geqslant 0,\qquad\forall\,\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U}, \tag{12a}$$

$$\int_\Omega\frac{\partial\bar{\varepsilon}}{\partial t}\bar{\gamma}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_\Omega\dot{\bar{\varepsilon}}\bar{\gamma}\mathrm{d}\boldsymbol{x},\qquad\forall\,\bar{\gamma}\in H, \tag{12b}$$

$$\int_\Omega\frac{\partial\kappa_{ij}}{\partial t}\omega_{ij}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_\Omega c_\kappa\dot{\varepsilon}_{ij}\omega_{ij}\mathrm{d}\boldsymbol{x},\qquad\forall\,\boldsymbol{\omega}\in\mathscr{H} \tag{12c}$$

以及初始条件 $\bar{\varepsilon}(0)=0,\boldsymbol{\kappa}(0)=0$.

考虑到式(7),可以看到构成泛函问题的式(12)有以下的性质[6-9]:对于任意固定的 $\boldsymbol{w}\in V$, $a(\boldsymbol{w};\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v}):V\times V\rightarrow\mathbf{R}$ 是对称的双线性式;对于所有的 $\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{w}\in V$,存在正常数 α_0, α_1, m 和 M, 使得

$$a(\boldsymbol{w};\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{u})\geqslant\alpha_0\,\|\boldsymbol{u}\|_V^2,\;|\,a(\boldsymbol{w};\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v})\,|\leqslant\alpha_1\,\|\boldsymbol{u}\|_V\,\|\boldsymbol{v}\|_V, \tag{13a}$$

$$a(\boldsymbol{v};\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})-a(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\geqslant m\,\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_V^2, \tag{13b}$$

$$|\,a(\boldsymbol{v};\,\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{u})-a(\boldsymbol{u};\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{u})\,|\leqslant M\,\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|_V\,\|\boldsymbol{u}\|_V. \tag{13c}$$

对于所有的 $\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{u}_1,\,\boldsymbol{u}_2\in V$ 和所有的 $\bar{\varepsilon},\,\bar{\varepsilon}_1,\,\bar{\varepsilon}_2\in H$,存在正常数 c_1, c_2, c_{f} 和 c (后面两个常数与摩擦因数相关),使得

$$0\leqslant j_0(\bar{\varepsilon},\,\boldsymbol{u})\leqslant c_1\,\|\bar{\varepsilon}\|_0\,\|\boldsymbol{u}\|_V,\;0\leqslant j(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{u})\leqslant c_{\mathrm{f}}\,\|\boldsymbol{u}\|_V\,\|\boldsymbol{u}\|_V, \tag{14a}$$

$$|\,j_0(\bar{\varepsilon}_1,\,\boldsymbol{u}_2)+j_0(\bar{\varepsilon}_2,\,\boldsymbol{u}_1)-j_0(\bar{\varepsilon}_1,\,\boldsymbol{u}_1)-j(\bar{\varepsilon}_2,\,\boldsymbol{u}_2)\,|\leqslant\\ c_2\,\|\bar{\varepsilon}_2-\bar{\varepsilon}_1\|_0\,\|\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1\|_V, \tag{14b}$$

$$|\,j(\boldsymbol{u}_1,\,\boldsymbol{u})+j(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{u}_2)-j(\boldsymbol{u}_1,\,\boldsymbol{u}_2)-j(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{u})\,|\leqslant\\ c\,\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1\|_V\,\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_2\|_V. \tag{14c}$$

根据以上性质,对所有的 $\boldsymbol{v}\in U$, 由式(12a)可知

$$\alpha_0\,\|\boldsymbol{u}\|_V^2\leqslant a(\boldsymbol{u};\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{u})+j_0(\bar{\varepsilon},\,\boldsymbol{u})+j(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{u})\leqslant\\ a(\boldsymbol{u};\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{\kappa},\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}))_{\mathscr{H}}+j_0(\bar{\varepsilon},\,\boldsymbol{v})+j(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v})\leqslant\\ (\alpha_1+c_{\mathrm{f}})\,\|\boldsymbol{u}\|_V\,\|\boldsymbol{v}\|_V+c_1\,\|\bar{\varepsilon}\|_0\,\|\boldsymbol{v}\|_V+\\ \|\boldsymbol{\kappa}\|_{\mathscr{H}}\,\|\boldsymbol{v}\|_V+\|\boldsymbol{\kappa}\|_{\mathscr{H}}\,\|\boldsymbol{u}\|_V. \tag{15}$$

适当选取 ϵ, 对式(15) 的最后一行式子, 应用不等式 $ab\leqslant\epsilon a^2+b^2/4\epsilon$, $\forall\,\epsilon>0$, a, $b\in\mathbf{R}$, 得到

$$\|\boldsymbol{u}\|_V\leqslant C_1\,\|\boldsymbol{v}\|_V+C_2\,\|\bar{\varepsilon}\|_0+C_3\,\|\boldsymbol{\kappa}\|_{\mathscr{H}}, \tag{16}$$

其中 C_1, C_2, C_3 为正常数. 因为 $u_{\mathrm{N}}^0\in H^{1/2}(\Gamma)$,存在 $\boldsymbol{v}\in U$ 和一个正常数 c_{N}^0,使得 $c_{\mathrm{N}}^0\,\|\boldsymbol{v}\|_V\leqslant$

$\| u_N^0 \|_{1/2,\Gamma}$，又因为式(12b)和(12c)，分别令 $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\kappa}$，有

$$\| \bar{\varepsilon}(t) \|_0 = \left\| \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}(\tau)) \mathrm{d}\tau \right\|_0 \leqslant \int_0^t \| \dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}(\tau)) \|_0 \mathrm{d}\tau \leqslant \int_0^t \| \boldsymbol{u}(\tau) \|_V \mathrm{d}\tau, \tag{17}$$

$$\| \boldsymbol{\kappa}(t) \|_{\mathscr{H}} = c_\kappa \left\| \int_0^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}(\tau)) \mathrm{d}\tau \right\|_{\mathscr{H}} \leqslant$$
$$c_\kappa \int_0^t \| \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}(\tau)) \|_{\mathscr{H}} \mathrm{d}\tau = c_\kappa \int_0^t \| \boldsymbol{u}(\tau) \|_V \mathrm{d}\tau. \tag{18}$$

由式(16)得到

$$\| \boldsymbol{u} \|_V \leqslant C_4 \| u_N^0 \|_{1/2,\Gamma} + C_5 \int_0^t \| \boldsymbol{u}(\tau) \|_V \mathrm{d}\tau, \tag{19}$$

其中 C_4，C_5 为正常数。最后对式(19)，应用 Gronwall 引理[4]，由式(17)～(19)得到：存在正常数 c_0'，c_0''，c_0'''，使得

$$\| \boldsymbol{u} \|_V \leqslant c_0' | u_N^0 |, \quad \| \bar{\varepsilon} \|_0 \leqslant c_0'' | u_N^0 |, \quad \| \boldsymbol{\kappa} \|_{\mathscr{H}} \leqslant c_0''' | u_N^0 |. \tag{20}$$

下面，利用时间延迟技术，证明了变量刚度参数法的收敛性[4,7]，得到如下的定理。

定理 设性质(7)、(13)和(14)成立。那么，对一个足够小的摩擦因数，变分问题(12)存在唯一解，使得

$$\boldsymbol{u} \in L_\infty(0,T;V), \ \boldsymbol{u}(t) \in \boldsymbol{U}, \ \bar{\varepsilon} \in L_\infty(0,T;H), \ \boldsymbol{\kappa} \in L_\infty(0,T;\mathscr{H}). \tag{21}$$

证明 唯一性。设 $\{\boldsymbol{u}_1(t), \bar{\varepsilon}_1(t), \boldsymbol{\kappa}_1(t)\}$，$\{\boldsymbol{u}_2(t), \bar{\varepsilon}_2(t), \boldsymbol{\kappa}_2(t)\}$ 为变分问题(12)的解，即

$$a(\boldsymbol{u}_1; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_1) + (\boldsymbol{\kappa}_1, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_1))_{\mathscr{H}} + j_0(\bar{\varepsilon}_1, \boldsymbol{v}) -$$
$$j_0(\bar{\varepsilon}_1, \boldsymbol{u}_1) + j(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) \geqslant 0, \tag{22a}$$

$$\int_\Omega \bar{\varepsilon}_1(t) \bar{\gamma} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}_1(\tau)) \mathrm{d}\tau \bar{\gamma} \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{22b}$$

$$\int_\Omega \kappa_{ij1}(t) \omega_{ij} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \int_0^t c_\kappa \dot{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{u}_1(\tau)) \mathrm{d}\tau \omega_{ij} \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{22c}$$

$$a(\boldsymbol{u}_2; \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_2) + (\boldsymbol{\kappa}_2, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_2))_{\mathscr{H}} + j_0(\bar{\varepsilon}_2, \boldsymbol{v}) -$$
$$j_0(\bar{\varepsilon}_2, \boldsymbol{u}_2) + j(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2) \geqslant 0, \tag{23a}$$

$$\int_\Omega \bar{\varepsilon}_2(t) \bar{\gamma} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}_2(\tau)) \mathrm{d}\tau \bar{\gamma} \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{23b}$$

$$\int_\Omega \kappa_{ij2}(t) \omega_{ij} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \int_0^t c_\kappa \dot{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{u}_2(\tau)) \mathrm{d}\tau \omega_{ij} \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{23c}$$

在式(22a)中取 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_2$，式(23a)中取 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1$，不等式相加并重新整理后，得到

$$j(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) + j(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1) - j(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) - j(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2) +$$
$$j_0(\bar{\varepsilon}_1, \boldsymbol{u}_2) + j_0(\bar{\varepsilon}_2, \boldsymbol{u}_1) - j_0(\bar{\varepsilon}_1, \boldsymbol{u}_1) -$$
$$j_0(\bar{\varepsilon}_2, \boldsymbol{u}_2) - (\boldsymbol{\kappa}_2 - \boldsymbol{\kappa}_1, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1))_{\mathscr{H}} \geqslant$$
$$a(\boldsymbol{u}_2; \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1) - a(\boldsymbol{u}_1; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1). \tag{24}$$

利用性质(13)和(14)，对一个足够小的摩擦因数，得到

$$0 < (m - c) \| \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 \|_V^2 \leqslant C_1 \| \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1 \|_0 \| \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 \|_V +$$
$$C_2 \| \boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2 \|_{\mathscr{H}} \| \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 \|_V, \tag{25}$$

即

$$\| \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 \|_V \leqslant C_3 \| \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1 \|_0 + C_4 \| \boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2 \|_{\mathscr{H}}, \tag{26}$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 为正常数。将式(23b)减去式(22b)，并令 $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1$，得到

$$\|\bar{\varepsilon}_2(t) - \bar{\varepsilon}_1(t)\|_0 = \left\|\int_0^t (\dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}_2(\tau)) - \dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}_1(\tau)))\mathrm{d}\tau\right\|_0 \leqslant$$

$$\int_0^t \|\dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}_2(\tau)) - \dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}_1(\tau))\|_0 \mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \leqslant \int_0^t \|\boldsymbol{u}_2(\tau) - \boldsymbol{u}_1(\tau)\|_V \mathrm{d}\boldsymbol{\tau}. \tag{27}$$

进一步将式(23c)减去式(22c)，并令 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\kappa}_2 - \boldsymbol{\kappa}_1$，得到

$$\|\boldsymbol{\kappa}_2(t) - \boldsymbol{\kappa}_1(t)\|_{\mathcal{H}} = c_\kappa \left\|\int_0^t (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}_2(\tau)) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}_1(\tau)))\mathrm{d}\tau\right\|_{\mathcal{H}} \leqslant$$

$$c_\kappa \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}_2(\tau)) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}_1(\tau))\|_{\mathcal{H}} \mathrm{d}\boldsymbol{\tau} = c_\kappa \int_0^t \|\boldsymbol{u}_2(\tau) - \boldsymbol{u}_1(\tau)\|_V \mathrm{d}\boldsymbol{\tau}. \tag{28}$$

那么，由式(26)~(28)，并利用 Gronwall 引理[4]，得到

$$\|\boldsymbol{u}_2(t) - \boldsymbol{u}_1(t)\|_V = 0, \quad \|\bar{\varepsilon}_2(t) - \bar{\varepsilon}_1(t)\|_0 = 0, \quad \|\boldsymbol{\kappa}_2(t) - \boldsymbol{\kappa}_1(t)\|_{\mathcal{H}} = 0, \tag{29}$$

从而得到 $\boldsymbol{u}_1(t) \equiv \boldsymbol{u}_2(t), \bar{\varepsilon}_1(t) \equiv \bar{\varepsilon}_2(t), \boldsymbol{\kappa}_1(t) \equiv \boldsymbol{\kappa}_2(t)$.

存在性。假设对某些 $t \in [0, T]$ 和 $\boldsymbol{\eta} > 0$，有 $\boldsymbol{u}_n^\eta(t) \in U$, $\bar{\varepsilon}^\eta(t) = \bar{\varepsilon}(t - \boldsymbol{\eta}) \in H, \boldsymbol{\kappa}^\eta(t) = \boldsymbol{\kappa}(t - \boldsymbol{\eta}) \in \mathcal{H}$，其中 $\bar{\varepsilon}(t - \boldsymbol{\eta}) = 0$, $\boldsymbol{\kappa}(t - \boldsymbol{\eta}) = 0 (0 \leqslant t \leqslant \boldsymbol{\eta}, n = 0,1,2,\cdots)$。下面考虑如下的辅助问题：寻求 $\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta(t) \in U$，满足

$$a(\boldsymbol{u}_n^\eta; \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta) + (\boldsymbol{\kappa}^\eta, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta))_{\mathcal{H}} + j_0(\bar{\varepsilon}^\eta, \boldsymbol{v}) - j_0(\bar{\varepsilon}^\eta, \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta) +$$

$$j(\boldsymbol{u}_n^\eta, \boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}_n^\eta, \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta) \geqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in U. \tag{30}$$

根据文献[6,10,13]，辅助问题有唯一解 $\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta$（对每一个 $n = 0,1,2,\cdots$）。将式(30)改写为

$$a(\boldsymbol{u}_n^\eta; \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta, \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta) + j_0(\bar{\varepsilon}^\eta, \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta) + j(\boldsymbol{u}_n^\eta, \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta) \leqslant$$

$$a(\boldsymbol{u}_n^\eta; \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{\kappa}^\eta, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta))_{\mathcal{H}} + j_0(\bar{\varepsilon}^\eta, \boldsymbol{v}) + j(\boldsymbol{u}_n^\eta, \boldsymbol{v}), \tag{31}$$

用 $\boldsymbol{u}_n^\eta$ 替换 $\boldsymbol{v}$，并利用式(13a)和(14a)，得到

$$\alpha_0 \|\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta\|_V^2 \leqslant \alpha_1 \|\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta\|_V \|\boldsymbol{u}_n^\eta\|_V + \|\boldsymbol{\kappa}^\eta\|_{\mathcal{H}} \|\boldsymbol{u}_n^\eta\|_V + \|\boldsymbol{\kappa}^\eta\|_{\mathcal{H}} \|\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta\|_V +$$

$$c_1 \|\bar{\varepsilon}^\eta\|_0 \|\boldsymbol{u}_n^\eta\|_V + c_{\mathrm{f}} \|\boldsymbol{u}_n^\eta\|_V^2. \tag{32}$$

适当地选择 ϵ，对式(32)右边的项，利用不等式 $ab \leqslant \epsilon a^2 + b^2/4\epsilon, \forall \epsilon > 0, a, b \in \mathbf{R}$，得到性质

$$\|\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta\|_V \leqslant C_0 + C_0' \|\boldsymbol{u}_n^\eta\|_V, \qquad n = 0,1,2,\cdots, \tag{33}$$

其中，C_0, C_0' 为正常数。我们将进一步看到，辅助问题(30)的解序列 $\{\boldsymbol{u}_n^\eta\} \in U \subset V$ 是 V 中的一个序列基[6-7]。为此目的，设 $\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta$ 和 $\boldsymbol{u}_{n+2}^\eta$ 是两个相继连续的解序列，相应地满足式(30)，并得到

$$a(\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta; \boldsymbol{u}_{n+2}^\eta, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{n+2}^\eta) + (\boldsymbol{\kappa}^\eta, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{n+2}^\eta))_{\mathcal{H}} + j_0(\bar{\varepsilon}^\eta, \boldsymbol{v}) - j_0(\bar{\varepsilon}^\eta, \boldsymbol{u}_{n+2}^\eta) +$$

$$j(\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta, \boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta, \boldsymbol{u}_{n+2}^\eta) \geqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in U. \tag{34}$$

用 $\boldsymbol{u}_{n+2}^\eta$ 替换式(30)中的 $\boldsymbol{v}$，用 $\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta$ 替换式(34)中的 $\boldsymbol{v}$，并将不等式相加，得到

$$a(\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta; \boldsymbol{u}_{n+2}^\eta, \boldsymbol{u}_{n+2}^\eta - \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta) - a(\boldsymbol{u}_n^\eta; \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta, \boldsymbol{u}_{n+2}^\eta - \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta) \leqslant$$

$$j(\boldsymbol{u}_n^\eta, \boldsymbol{u}_{n+2}^\eta) + j(\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta, \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta) - j(\boldsymbol{u}_n^\eta, \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta) - j(\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta, \boldsymbol{u}_{n+2}^\eta). \tag{35}$$

记 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_n^\eta + s(\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta - \boldsymbol{u}_n^\eta)$ 和 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta + s(\boldsymbol{u}_{n+2}^\eta - \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta)$，其中 $s \in [0,1]$，则对于式(35)的左边，得到

$$a(\boldsymbol{u}_{n+1}^\eta; \boldsymbol{u}_{n+2}^\eta, \boldsymbol{u}_{n+2}^\eta - \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta) - a(\boldsymbol{u}_n^\eta; \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta, \boldsymbol{u}_{n+2}^\eta - \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta) =$$

$$\int_\Omega \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{p1}}(\boldsymbol{w})}{\dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{w})}\dot{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}s\,\dot{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{u}_{n+2}^\eta - \boldsymbol{u}_{n+1}^\eta)\mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$

$$\int_\Omega \frac{4}{9}\int_0^1\left[\sigma'_{p1}(\boldsymbol{w})-\frac{\sigma_{p1}(\boldsymbol{w})}{\dot{\bar\varepsilon}(\boldsymbol{w})}\right]\left[\frac{\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{w})\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})}{\dot{\bar\varepsilon}^2(\boldsymbol{w})}\right]\mathrm{d}s\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}-\boldsymbol{u}^\eta_n)\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+$$
$$\int_\Omega \frac{2}{3}\int_0^1\left[\frac{\sigma_{p1}(\boldsymbol{w})}{\dot{\bar\varepsilon}(\boldsymbol{w})}\right]\mathrm{d}s\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1})\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1})\mathrm{d}\boldsymbol{x},\tag{36}$$

其中 $\sigma'_{p1}(\boldsymbol{w})=\mathrm{d}\sigma_{p1}(\dot{\bar\varepsilon}(\boldsymbol{w}))/\mathrm{d}\,\dot{\bar\varepsilon}(\boldsymbol{w})$. 利用式(14c)和(36),由不等式(35),得到

$$\int_\Omega \frac{2}{3}\int_0^1\frac{\sigma_{p1}(\boldsymbol{w})}{\dot{\bar\varepsilon}(\boldsymbol{w})}\mathrm{d}s\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1})\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$
$$c\,\|\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}\|_V\|\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}-\boldsymbol{u}^\eta_n\|_V+\int_\Omega\frac{4}{9}\int_0^1\left[\frac{\sigma_{p1}(\boldsymbol{w})}{\dot{\bar\varepsilon}(\boldsymbol{w})}-\sigma'_{p1}(\boldsymbol{w})\right]\times$$
$$\left[\frac{|\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{w})\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})|}{\dot{\bar\varepsilon}^2(\boldsymbol{w})}\right]\mathrm{d}s\,|\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1})\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}-\boldsymbol{u}^\eta_n)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$
$$c\,\|\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}\|_V\|\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}-\boldsymbol{u}^\eta_n\|_V+\int_\Omega\frac{2}{3}\int_0^1\left[\frac{\sigma_{p1}(\boldsymbol{w})}{\dot{\bar\varepsilon}(\boldsymbol{w})}-\sigma'_{p1}(\boldsymbol{w})\right]\times$$
$$\left[\frac{\dot{\bar\varepsilon}^2(\boldsymbol{w})+\dot{\bar\varepsilon}^2(\boldsymbol{v})}{2\dot{\bar\varepsilon}^2(\boldsymbol{w})}\right]\mathrm{d}s\,|\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1})\dot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}-\boldsymbol{u}^\eta_n)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\tag{37}$$

进一步利用性质(7)和(33),并对所有的 $\boldsymbol{u}\in U$,存在正常数 c_N,使得 $|u^0_N|\leqslant\|u_N\|_{1/2,\Gamma}\leqslant c_N\|\boldsymbol{u}\|_V$,根据式(37),存在正常数 m_1 和 m_2, 使得

$$m_1\|\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}\|^2_V\leqslant(c+m_2)\|\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}\|_V\|\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}-\boldsymbol{u}^\eta_n\|_V\tag{38}$$

或

$$\|\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}\|_V\leqslant q\|\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}-\boldsymbol{u}^\eta_n\|_V,\qquad q=(c+m_2)/m_1.\tag{39}$$

取足够小的摩擦因数,使得 $0<q<1$, 由

$$\|\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}\|_V\leqslant q^{n+1}\|\boldsymbol{u}^\eta_1-\boldsymbol{u}^\eta_0\|_V,\tag{40}$$

可知

$$\lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{u}^\eta_{n+2}-\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}\|_V=0.\tag{41}$$

由此,也可以如下证明. $\{\boldsymbol{u}^\eta_n\}$ 是有界的,从而存在一个序列,仍记为 $\{\boldsymbol{u}^\eta_n\}$, V 中的某些元素 $\boldsymbol{u}^\eta\in U$ 是弱收敛的,由于 U 在 V 中是闭的. 因为当 $n\to\infty$ 时,有

$$a(\boldsymbol{u}^\eta;\boldsymbol{u}^\eta,\boldsymbol{u}^\eta)+(\boldsymbol{\kappa}^\eta,\dot\varepsilon(\boldsymbol{u}^\eta))_{\mathcal{H}}+j_0(\bar\varepsilon^\eta,\boldsymbol{u}^\eta)+j(\boldsymbol{u}^\eta,\boldsymbol{u}^\eta)\leqslant$$
$$\liminf_{n\to\infty}[a(\boldsymbol{u}^\eta_n;\boldsymbol{u}^\eta_{n+1},\boldsymbol{u}^\eta_{n+1})+(\boldsymbol{\kappa}^\eta,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}^\eta_{n+1}))_{\mathcal{H}}+j_0(\bar\varepsilon^\eta,\boldsymbol{u}^\eta_{n+1})+j(\boldsymbol{u}^\eta_n,\boldsymbol{u}^\eta_{n+1})]\leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}[a(\boldsymbol{u}^\eta_n;\boldsymbol{u}^\eta_{n+1},\boldsymbol{v})+j(\boldsymbol{u}^\eta_n,\boldsymbol{v})]+(\boldsymbol{\kappa}^\eta,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}}+j_0(\bar\varepsilon^\eta,\boldsymbol{v})=$$
$$a(\boldsymbol{u}^\eta;\boldsymbol{u}^\eta,\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{\kappa}^\eta,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}}+j_0(\bar\varepsilon^\eta,\boldsymbol{v})+j(\boldsymbol{u}^\eta,\boldsymbol{v}),\tag{42}$$

也就是说,对所有的 $\boldsymbol{v}\in U$, $\boldsymbol{u}^\eta\in U$ 满足不等式

$$a(\boldsymbol{u}^\eta;\boldsymbol{u}^\eta,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^\eta)+(\boldsymbol{\kappa}^\eta,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^\eta))_{\mathcal{H}}+j_0(\bar\varepsilon^\eta,\boldsymbol{v})-$$
$$j_0(\bar\varepsilon^\eta,\boldsymbol{u}^\eta)+j(\boldsymbol{u}^\eta,\boldsymbol{v})-j(\boldsymbol{u}^\eta,\boldsymbol{u}^\eta)\geqslant 0.\tag{43}$$

从而,对所有的 $\boldsymbol{\eta}>0$,得到式(43)的一个有界的解序列, $\{\boldsymbol{u}^\eta\}\in L_\infty(0,T;V)$,几乎处处有 $\{\boldsymbol{u}^\eta(t)\}\in U$,从而可以导出一个序列,仍记为 $\{\boldsymbol{u}^\eta\}$,对 $L_\infty(0,T;V)$ 中的某些元素几乎处处有 $\boldsymbol{u}(t)\in U$ 是弱-*收敛,由于 U 在 V 中是弱闭合的. 对所有的 $\boldsymbol{\eta}>0$,因为序列 $\{\bar\varepsilon^\eta\}$ 在 $L_\infty(0,T;H)$ 中是有界的,存在一个序列,仍记为 $\{\bar\varepsilon^\eta\}$,对某些 $\bar\varepsilon\in L_\infty(0,T;H)$ 是弱-*收敛的. 因而,对所有的 $\bar\gamma\in L_2(0,T;H)$, 有

$$\lim_{\eta\to 0}\int_0^T\int_\Omega\bar\varepsilon^\eta(t)\bar\gamma\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t=\lim_{\eta\to 0}\int_0^T\int_\Omega\int_0^{t-\eta}\dot{\bar\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\tau))\mathrm{d}\tau\bar\gamma\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^T\int_\Omega\int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}(\tau))\mathrm{d}\tau\bar{\gamma}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega \bar{\varepsilon}(t)\bar{\gamma}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t, \tag{44}$$

这意味着几处乎处 $\bar{\varepsilon}(t) \in H$ 并满足式(12b)．类似地，对所有的 $\eta > 0$，由于序列 $\{\boldsymbol{\kappa}^\eta\}$ 在 $L_\infty(0, T; H)$ 中是有界的，存在一个序列，仍记为 $\{\boldsymbol{\kappa}^\eta\}$，对某些 $\boldsymbol{\kappa} \in L_\infty(0, T; \mathscr{H})$ 是弱-*收敛的．因而，对所有的 $\boldsymbol{\omega} \in L_2(0, T; \mathscr{H})$，有

$$\lim_{\eta\to 0}\int_0^T\int_\Omega \kappa_{ij}^\eta(t)\omega_{ij}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t = \lim_{\eta\to 0}\int_0^T\int_\Omega\int_0^{t-\eta} c_\kappa\dot{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{u}(\tau))\mathrm{d}\tau\omega_{ij}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^T\int_\Omega\int_0^t c_\kappa\dot{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{u}(\tau))\mathrm{d}\tau\omega_{ij}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega \kappa_{ij}(t)\omega_{ij}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t, \tag{45}$$

这意味着几处乎处 $\boldsymbol{\kappa}(t) \in \mathscr{H}$ 并满足式(12c)．最后，当 $\eta \to 0$，对所有的 $\boldsymbol{v} \in L_2(0,T; V)$，使得几乎处处 $\boldsymbol{v}(t) \in U$，得到

$$\int_0^T[a(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{\kappa},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}))_{\mathscr{H}} + j_0(\bar{\varepsilon},\boldsymbol{u}) + j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})]\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\liminf_{\eta\to 0}\int_0^T[a(\boldsymbol{u}^\eta;\boldsymbol{u}^\eta,\boldsymbol{u}^\eta) + (\boldsymbol{\kappa}^\eta,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{u}^\eta))_{\mathscr{H}} + j_0(\bar{\varepsilon}^\eta,\boldsymbol{u}^\eta) + j(\boldsymbol{u}^\eta,\boldsymbol{u}^\eta)]\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\lim_{\eta\to 0}\int_0^T[a(\boldsymbol{u}^\eta;\boldsymbol{u}^\eta,\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{\kappa}^\eta,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}))_{\mathscr{H}} + j_0(\bar{\varepsilon}^\eta,\boldsymbol{v}) + j(\boldsymbol{u}^\eta,\boldsymbol{v})]\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^T[a(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{\kappa},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}))_{\mathscr{H}} + j_0(\bar{\varepsilon},\boldsymbol{v}) + j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})]\mathrm{d}t, \tag{46}$$

即几乎处处 $\boldsymbol{u}(t) \in U$，并满足不等式(12a)．证毕．

注 此类问题的数值计算分析，可参考文献[8-9]．

参考文献(References)：

[1] Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*[M]. Oxford: Oxford University Press, 1950.

[2] Cristescu N D. *Dynamic Plasticity*[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co Ltd, 2007.

[3] Zienkiewicz O C. Flow formulation for numerical solution of forming processes[C]//Pittman J F T, Zienkiewicz O C, Wood R D, Alexander J M. *Numerical Analysis of Forming Processes*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1984: 1-44.

[4] Korneev V G, Langer U. *Approximate Solution of Plastic Flow Theory Problems*[M]. Teubner Texte zur Mathematik, **65**. Leipzig: Teubner, 1984.

[5] Han W, Reddy B D. *Plasticity: Mathematical Theory and Numerical Analysis*[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

[6] Angelov T A. Variational analysis of a rigid-plastic rolling problem[J]. *Int J Eng Sci*, 2004, **42**(17/18): 1779-1792.

[7] Angelov T A. Existence and uniqueness of the solution of a quasi-steady rolling problem[J]. *Int J Eng Sci*, 2006, **44**(11/12): 748-756.

[8] Angelov T A. Modelling and analysis of a class of metal-forming problems[J]. *Adv Appl Math Mech*, 2010, **2**(6): 722-745.

[9] Angelov T A. Modelling and numerical approach to a class of metal-forming problems—quasi-steady case[J]. *Math Meth Appl Sci*, 2011, **34**(11): 1330-1338.

[10] Glowinski R. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

[11] Duvaut G, Lions J-L. *Inequalities in Mechanics and Physics*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1976.

[12] Kikuchi N, Oden J T. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*[M]. Philadelphia PA: SIAM, 1988.

[13] Han W, Sofonea M. *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*[M]. Providence RI: AMS-Intl Press, 2002.

[14] Shillor M, Sofonea M, Telega J J. *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*[M]. *Lecture Notes in Physics*, **655**. Berlin: Springer, 2004.

On a Class of Metal-Forming Problems With Combined Hardening

T. A. Angelov

(*Institute of Mechanics*, *Bulgarian Academy of Sciences*, *Sofia* 1113, *Bulgaria*)

Abstract: A class of quasi-steady metal-forming problems, with incompressible, rigid-plastic, strain-rate dependent, isotropic and kinematic hardening material model and with nonlocal contact and Coulomb's friction boundary conditions was considered. A coupled variational formulation was derived and by proving the convergence of a variable stiffness parameters method with time retardation, existence and uniqueness results were obtained.

Key words: quasi-steady; rigid-plastic; combined hardening; nonlocal friction; variational analysis