

上三角算子矩阵的本征函数展开法在 应力形式的二维弹性问题中的应用*

额布日力吐, 阿拉坦仓

(内蒙古大学 数学科学学院, 呼和浩特 010021)

摘要: 深入研究了求解基于应力形式的二维弹性问题的本征函数展开法. 根据已有的研究结果, 将基于应力形式的二维弹性问题的基本偏微分方程组等价地转化为上三角微分系统, 并导出了相应的上三角算子矩阵. 通过深入研究, 分别获得了该算子矩阵的两个对角块算子更为简洁的正交本征函数系, 并证明了它们在相应空间中的完备性, 进而应用本征函数展开法给出了该二维弹性问题的更为简洁实用的一般解. 此外, 对该二维弹性问题, 还指出了什么样的边界条件可以应用此方法求解. 最后应用具体的算例验证了所得结论的合理性.

关键词: 本征函数展开法; 二维弹性问题; 上三角算子矩阵; 一般解

中图分类号: O175.3 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.02.007

引 言

上世纪90年代, 钟万勰教授利用结构力学与最优控制的模拟理论, 将无穷维 Hamilton 系统应用于结构分析而建立了弹性力学求解新体系^[1-2]. 此后, 学者们利用基于 Hamilton 系统的分离变量法研究了应用力学各领域中出现的大量的非自伴问题^[3-8], 为用分离变量法求解方程开辟出了一条新路, 拓宽了 Sturm-Liouville 问题和传统的分离变量法. 然而这种方法的数学基础——辛本征函数的展开定理只得到了部分解决^[9-11], 还有很多问题有待于进一步研究. 例如, 基于应力形式的二维弹性问题基本方程所导出的 Hamilton 系统的辛本征函数展开定理还没给出证明, 故此方程应用 Hamilton 系统的分离变量法求解的理论基础还不够充分. 另一方面, 给定一个力学方程, 一般可以将其转化为许多等价的微分系统^[12], Hamilton 系统只是其中的一类. 在所有的微分系统中, 上三角这一类微分系统在求解问题时具有一定的优势. 关于上三角算子矩阵, 目前国内外有许多学者从不同角度正在进行研究, 并已成为算子理论的一个研究热点.

文献[13]将基于应力形式的二维弹性问题基本方程组转化为上三角微分系统, 导出相应

* 收稿日期: 2011-02-25; 修订日期: 2011-12-01

基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20070126002); 国家自然科学基金资助项目(10962004)

作者简介: 额布日力吐(1972—), 男, 内蒙古人, 副教授, 博士生(E-mail: nmgbeb@sohu.com); 阿拉坦仓(1963—), 男, 内蒙古人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人, E-mail: alatanca@imu.edu.cn).

的上三角算子矩阵,并证明其两个对角块算子均具有完备的正交本征函数系,进而应用本征函数展开法给出了该问题的一般解.但是所得一般解的解析表达式过于繁琐,不便于实际应用.

本文在新的定义域中对文献[13]所研究的二维弹性问题进行了深入研究,给出了该问题更加简洁适用的一般解.进一步,对该二维弹性问题,还指出了什么样的边界条件可以应用此方法求解.

1 算子矩阵的性质

对非负常数 h 和 l , 令 $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq l\}$. 则在平面矩形区域 Ω 上平面弹性问题的基于应力解法的基本偏微分方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0, & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + f_y = 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) + (1 + \nu) \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中, f_x 和 f_y 表示体力. 我们考虑如下边界条件:

$$\sigma_x = 0, \quad v = 0, \quad \text{当 } x = 0, h \text{ 时.} \quad (2)$$

引入状态函数^[13]

$$p = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}, \quad (3)$$

则由式(1)可导出如下上三角微分系统:

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ -(1 + \nu) \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

相应的上三角算子矩阵为

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dx} & 0 & -1 \\ -\frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dx} \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

应力与位移关系

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x),$$

结合边界条件(2)可得

$$\sigma_y = 0, \quad p = 0, \quad \text{当 } x = 0, h \text{ 时.} \quad (6)$$

引入 Hilbert 空间 $X = L^2[0, h]$, 并取 $W = X \oplus X \oplus X \oplus X$ ^[10]. 由式(6) 知算子矩阵 \mathbf{H} 的定义

域为

$$D(\mathbf{H}) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in W \mid \begin{array}{l} \psi_2(0) = \psi_2(h) = 0, \psi_3(0) = \psi_3(h) = 0, \\ \psi_i \text{ 绝对连续, } \psi'_i \in X, i = 1, 2, 3, 4. \end{array} \right\}. \quad (7)$$

将算子矩阵 \mathbf{H} 写为如下分块算子形式:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & -\mathbf{A}^* \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, -\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix}.$$

根据算子矩阵 \mathbf{H} 的定义域(7),我们可以定义:

$$D(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in X \oplus X \mid \begin{array}{l} \psi_2(0) = \psi_2(h) = 0, \psi_i \text{ 绝对连续,} \\ \psi'_i \in X, i = 1, 2. \end{array} \right\}, \quad (9)$$

$$D(\mathbf{A}^*) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in X \oplus X \mid \begin{array}{l} \psi_3(0) = \psi_3(h) = 0, \psi_i \text{ 绝对连续,} \\ \psi'_i \in X, i = 3, 4. \end{array} \right\}. \quad (10)$$

显然 \mathbf{B}, \mathbf{C} 为全空间 $X \oplus X$ 上的有界线性算子.

下面我们利用块算子 \mathbf{A} 和 $-\mathbf{A}^*$ 求解二维弹性边值问题(1)和(2),为此先给出下列完备性定理.

定理 1 块算子 \mathbf{A} 在 Hilbert 空间 $X \oplus X$ 中具有正交的本征函数系且 \mathbf{A} 的本征值和相应本征函数系可表示为

$$\mathbf{U}_k = \begin{pmatrix} \cos \frac{k\pi}{h} x \\ \sin \frac{k\pi}{h} x \end{pmatrix}, \lambda_k = \frac{k\pi}{h}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \quad (11)$$

证明 通过直接计算可得 \mathbf{A} 的本征值和相应本征函数系为式(11),并且可得

$$(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_j) = \begin{cases} h, & \text{当 } k = j, \\ 0, & \text{当 } k \neq j, \end{cases}$$

其中 $k, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 从而本征函数系 $\{\mathbf{U}_k \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 具有正交性,故定理 1 得证.

定理 2 由式(11)给出的块算子 \mathbf{A} 的本征函数系 $\{\mathbf{U}_k \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, 在 Hilbert 空间 $X \oplus X$ 中 Cauchy 主值意义下是完备的,即对每一个 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X \oplus X$ 都存在常数列 $\{c_k\}_{k=0}^{+\infty}$

和 $\{c_{-k}\}_{k=1}^{+\infty}$ 使得

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = c_0 \mathbf{U}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k \mathbf{U}_k + c_{-k} \mathbf{U}_{-k}). \quad (12)$$

证明 对 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 取

$$c_k = \frac{1}{h} \int_0^h \left(f(t) \cos \frac{k\pi}{h} t + g(t) \sin \frac{k\pi}{h} t \right) dt.$$

将其代入表达式(12)的右端可得

$$c_0 \mathbf{U}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k \mathbf{U}_k + c_{-k} \mathbf{U}_{-k}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \int_0^h f(t) dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{h} \int_0^h f(t) \cos \frac{k\pi}{h} t dt \cos \frac{k\pi}{h} x \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{h} \int_0^h g(t) \sin \frac{k\pi}{h} t dt \sin \frac{k\pi}{h} x \end{pmatrix}. \quad (13)$$

又知函数系

$$1, \cos \frac{\pi}{h} x, \cos \frac{2\pi}{h} x, \dots, \cos \frac{k\pi}{h} x, \dots \quad (14)$$

和

$$\sin \frac{\pi}{h} x, \sin \frac{2\pi}{h} x, \sin \frac{3\pi}{h} x, \dots, \sin \frac{k\pi}{h} x, \dots, \quad (15)$$

分别是 Sturm-Liouville 问题

$$\begin{cases} \frac{d^2 z}{dx^2} + \lambda z = 0, \\ z'(0) = z'(h) = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \frac{d^2 z}{dx^2} + \lambda z = 0, \\ z(0) = z(h) = 0 \end{cases}$$

的本征函数系,因此式(13)中等号右端两个分量分别是 f, g 在 Hilbert 空间 $X = L^2[0, h]$ 中按对应完备正交系展开的 Fourier 级数,从而式(12)成立,因此定理 2 得证.

类似可得下述定理 3 和定理 4.

定理 3 块算子 $-A^*$ 在 Hilbert 空间 $X \oplus X$ 中具有正交的本征函数系且 $-A^*$ 的本征值和相应本征函数系可表示为

$$\hat{\mathbf{U}}_k = \begin{pmatrix} \sin \frac{k\pi}{h} x \\ \cos \frac{k\pi}{h} x \end{pmatrix}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{h}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \quad (16)$$

证明 通过直接计算可得块算子 $-A^*$ 的本征值和相应本征函数系为式(16),并且可得

$$(\hat{\mathbf{U}}_k, \hat{\mathbf{U}}_j) = \begin{cases} h, & \text{当 } k = j, \\ 0, & \text{当 } k \neq j, \end{cases}$$

其中 $k, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 从而本征函数系 $\{\hat{\mathbf{U}}_k | k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 具有正交性,故定理 3 得证.

定理 4 由式(16)给出的块算子 $-A^*$ 的本征函数系 $\{\hat{\mathbf{U}}_k | k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, 在 Hilbert 空间 $X \oplus X$ 中 Cauchy 主值意义下是完备的,即对每一个 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X \oplus X$ 都存在常数列

$\{c_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 和 $\{c_{-k}\}_{k=1}^{+\infty}$ 使得

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = c_0 \hat{\mathbf{U}}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k \hat{\mathbf{U}}_k + c_{-k} \hat{\mathbf{U}}_{-k}). \quad (17)$$

证明 对 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 取

$$c_k = \frac{1}{h} \int_0^h \left(f(t) \sin \frac{k\pi}{h} t + g(t) \cos \frac{k\pi}{h} t \right) dt.$$

将其代入式(17)的右端可得

$$c_0 \hat{U}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k \hat{U}_k + c_{-k} \hat{U}_{-k}) = \left(\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{h} \int_0^h f(t) \sin \frac{k\pi}{h} t dt \sin \frac{k\pi}{h} x \\ \frac{1}{h} \int_0^h g(t) dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{h} \int_0^h g(t) \cos \frac{k\pi}{h} t dt \cos \frac{k\pi}{h} x \end{array} \right). \quad (18)$$

根据定理2的证明过程可知,式(18)中右端向量值函数的两个分量,分别等于函数 f 和 g 在空间 $X = L^2[0, h]$ 中由函数系(14)和(15) Fourier 展开的级数.从而展开式(17)成立,即定理4得证.

注1 由算子的定义域(9)和(10)出发,我们得到了上述4个定理.类似地,由定义域(9)和下述定义域:

$$D(A^*) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in X \oplus X \mid \psi_4(0) = \psi_4(h) = 0, \psi_i \text{绝对连续}, \right. \\ \left. \psi_i' \in X, i = 3, 4. \right\}.$$

我们也可得到类似的结果.由此可知二维弹性边值问题(1)和(2)中的边界条件(2)可以被其它适当的边界条件取代.

2 一般解

本节给出二维弹性边值问题(1)和(2)的一般解.令

$$U = \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{pmatrix}, \hat{U} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -q - f_x \\ -f_y \end{pmatrix}, \hat{F} = \begin{pmatrix} -(1 + \nu) \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

则上三角微分系统(4)可改写为

$$\frac{\partial U}{\partial y} = AU + F, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial y} = -A^* \hat{U} + \hat{F}. \quad (20)$$

为了得到问题(1)和(2)的一般解,我们应用本征函数展开法.

根据定理3和定理4,对方程(20)应用分离变量法.首先我们考虑相应的齐次方程

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial y} = -A^* \hat{U}. \quad (21)$$

设有形如 $\hat{U}(x, y) = \hat{T}(y) \hat{V}(x)$ 的解,代入方程(21)可得

$$\frac{\hat{T}'(y)}{\hat{T}(y)} = \frac{-A^* \hat{V}(x)}{\hat{V}(x)}.$$

易知该等式两边均为常数,并设此常数为 λ ,则可得

$$\hat{T}'(y) = \lambda \hat{T}(y), \quad (22)$$

$$-A^* \hat{V}(x) = \lambda \hat{V}(x). \quad (23)$$

对式(21)分离变量可得算子 $-A^*$ 的本征值问题.由定理3和定理4可知 $\lambda = \lambda_k = k\pi/h$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\hat{V}(x)$ 是本征函数 $\hat{U}_k(x)$ 的常数倍,且 $\hat{T}(y)$ 为 $e^{\lambda_k y}$ 的常数倍.由叠加原理知,

齐次方程(21)有如下形式的解:

$$\hat{U}(x, y) = \hat{T}_0(y) \hat{U}_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\hat{T}_k(y) \hat{U}_k(x) + \hat{T}_{-k}(y) \hat{U}_{-k}(x)). \quad (24)$$

下面对非齐次方程(20)采用分离变量法. 由定理3和定理4知非齐次方程(20)仍有形如式(24)的解. 此外, 式(20)中的非齐次项 \hat{F} 有如下 Fourier 展开:

$$\hat{F}(x, y) = \hat{F}_0(y) \hat{U}_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\hat{F}_k(y) \hat{U}_k(x) + \hat{F}_{-k}(y) \hat{U}_{-k}(x)), \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{F}_k(y) &= \frac{1}{(\hat{U}_k(x), \hat{U}_k(x))} (\hat{F}(x, y), \hat{U}_k(x)) = \\ &= -\frac{(1+\nu)}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \sin \frac{k\pi}{h} x dx \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (26)$$

将式(24)和式(25)代入式(20)可得

$$\hat{T}'_k(y) = \lambda_k \hat{T}_k(y) + \hat{F}_k(y) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

计算该方程可得

$$\hat{T}_k(y) = \hat{d}_k e^{\lambda_k y} + \int_0^y \hat{F}_k(t) e^{\lambda_k(y-t)} dt \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (27)$$

其中 \hat{d}_k 是待定常数. 因此方程(20)的一般解为

$$\hat{U} = (x, y) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\hat{d}_k e^{\lambda_k y} - \hat{d}_{-k} e^{\lambda_{-k} y} + \int_0^y (\hat{F}_k(t) e^{\lambda_k(y-t)} - \hat{F}_{-k}(t) e^{\lambda_{-k}(y-t)}) dt \right) \sin \frac{k\pi}{h} x, \\ q &= \hat{d}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\hat{d}_k e^{\lambda_k y} + \hat{d}_{-k} e^{\lambda_{-k} y} + \int_0^y (\hat{F}_k(t) e^{\lambda_k(y-t)} + \hat{F}_{-k}(t) e^{\lambda_{-k}(y-t)}) dt \right) \cos \frac{k\pi}{h} x, \\ &(\hat{F}_k(t) e^{\lambda_k(y-t)} \pm \hat{F}_{-k}(t) e^{\lambda_{-k}(y-t)}) = \\ &= -\frac{(1+\nu)}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial f_x(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x, t)}{\partial y} \right) \sin \frac{k\pi}{h} x (e^{\lambda_k(y-t)} \mp e^{\lambda_{-k}(y-t)}) dx. \end{aligned}$$

将式(28)中 \hat{U} 的第2个分量 q 代入方程(19)可得到一个非齐次问题. 由定理1和定理2知方程(19)有如下形式的解:

$$U(x, y) = T_0(y) U_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (T_k(y) U_k(x) + T_{-k}(y) U_{-k}(x)), \quad (29)$$

且非齐次项 F 有如下 Fourier 展开:

$$F(x, y) = F_0(y) U_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (F_k(y) U_k(x) + F_{-k}(y) U_{-k}(x)), \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned} F_k(y) &= -\frac{1}{h} \int_0^h \left(f_x \cos \frac{k\pi}{h} x + f_y \sin \frac{k\pi}{h} x \right) dx - \frac{1}{2} \left(\hat{d}_k e^{\lambda_k y} + \hat{d}_{-k} e^{\lambda_{-k} y} + \right. \\ &\left. \int_0^y (\hat{F}_k(t) e^{\lambda_k(y-t)} + \hat{F}_{-k}(t) e^{\lambda_{-k}(y-t)}) dt \right) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (31)$$

类似于求解方程(20)的方法, 直接计算可得

$$T_k(y) = d_k e^{\lambda_k y} + \int_0^y F_k(\zeta) e^{\lambda_k(y-\zeta)} d\zeta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (32)$$

其中, d_k 是待定常数. 因此方程(19)的一般解为

$$U(x, y) = \begin{pmatrix} d_0 - \hat{d}_0 y - \frac{1}{h} \int_0^y \int_0^h f_x(x, \zeta) dx d\zeta \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} E_k \\ \bar{E}_k \end{pmatrix}, \quad (33)$$

其中

$$E_k = \left(d_k e^{\lambda_k y} + d_{-k} e^{\lambda_{-k} y} + \int_0^y (F_k(\zeta) e^{\lambda_k(y-\zeta)} + F_{-k}(\zeta) e^{\lambda_{-k}(y-\zeta)}) d\zeta \right) \cos \frac{k\pi}{h} x, \quad (34)$$

$$\bar{E}_k = \left(d_k e^{\lambda_k y} - d_{-k} e^{\lambda_{-k} y} + \int_0^y (F_k(\zeta) e^{\lambda_k(y-\zeta)} - F_{-k}(\zeta) e^{\lambda_{-k}(y-\zeta)}) d\zeta \right) \sin \frac{k\pi}{h} x. \quad (35)$$

注2 根据一般解(33)在整个矩形区域 Ω 上成立, 可得

$$\tau_{xy}(x, 0) = d_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (d_k + d_{-k}) \cos \frac{k\pi}{h} x, \quad (36)$$

$$\sigma_y(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} (d_k - d_{-k}) \sin \frac{k\pi}{h} x. \quad (37)$$

另一方面, 函数系式(14)和式(15)分别是 Hilbert 空间 $L^2[0, h]$ 中完备正交的函数系. 因此对任意的边界条件

$$\tau_{xy}(x, 0) = \varphi_0(x) \in L^2[0, h], \quad \sigma_y(x, 0) = \psi_0(x) \in L^2[0, h],$$

可以计算出一般解(33)中的待定常数 d_k . 进一步, 如果给定具体的 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$, 则由边界条件 $\tau_{xy}(x, l) = \varphi_l(x) \in L^2[0, h]$ 和 $\sigma_y(x, l) = \psi_l(x) \in L^2[0, h]$ 出发也可以计算出一般解(33)中的待定常数 \hat{d}_k .

注3 一般解 $U(x, y)$ 中的两个分量 $\tau_{xy}(x, y)$ 和 $\sigma_y(x, y)$ 分别是式(1)中的剪应力和正应力, 从而正应力 $\sigma_x(x, y)$ 可由式(1)和(2)确定.

3 算例

我们来考察一个支承于两端的矩形梁, 沿上下两边作用着连续分布的铅直力^[14], 其集度均为 $-\sin 4\pi x/h$. 如图1所示, 矩形梁的某一顶点取为坐标原点建立平面直角坐标系, 其中 $0 \leq x \leq h$ 和 $0 \leq y \leq l$.

边界条件为

$$\sigma_y = -\sin \frac{4\pi}{h} x, \quad \tau_{xy} = 0,$$

当 $y = 0, l$ 时.

如果给定 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$, 则根据上述条件可以确定一般解中的待定常数 d_k 和 \hat{d}_k . 这里我们取 $f_x(x, y) = 0$ 和 $f_y(x, y) = 0$. 具体计算步骤为: 首先应用正交函数系(14)和(15)分别将给定的边界函数 $\tau_{xy}(x, 0) = 0$ 和 $\sigma_y(x, 0) = -\sin(4\pi x/h)$ Fourier 展开, 可得

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 0 \cos \frac{k\pi}{h} x, \quad (38)$$

$$\sigma_y(x, 0) = (-1) \sin \frac{4\pi}{h} x + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 4}}^{+\infty} 0 \sin \frac{k\pi}{h} x. \quad (39)$$

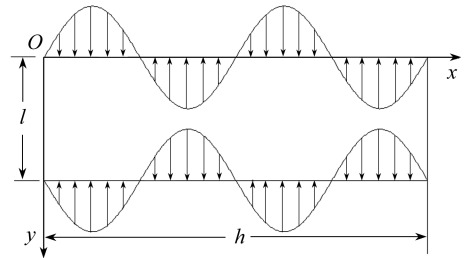


图1 矩形梁的坐标系和几何图形

Fig. 1 Geometry and coordinate system of the beam

通过比较方程(36)至(39)的相应系数,可以计算出待定系数 d_k .类似,应用正交函数系(14)和(15)分别将给定的边界函数 $\tau_{xy}(x,l)=0$ 和 $\sigma_y(x,l)=-\sin(4\pi x/h)$ Fourier 展开.然后将所得到的两个 Fourier 级数的系数与通解 $U(x,l)$ (即,通解(33)的表达式中令 $y=l$)的系数相比较,可以计算出待定系数 \hat{d}_k .最后计算可得

$$\tau_{xy}(x,y) = E_4 = \frac{2\pi}{4l\pi + h\sinh(4l\pi/h)} \exp\left[-\frac{4\pi(l+y)}{h}\right] \left[(l-y) \exp\left[\frac{4l\pi}{h}\right] + y \exp\left[\frac{8l\pi}{h}\right] - y \exp\left[\frac{8\pi y}{h}\right] + (-l+y) \exp\left[\frac{4\pi(l+2y)}{h}\right] \right] \cos \frac{4\pi}{h} x, \quad (40)$$

$$\sigma_y(x,y) = \bar{E}_4 = \frac{1}{2(4l\pi + h\sinh(4l\pi/h))} \left[\exp\left[-\frac{4\pi(l+y)}{h}\right] \left(-(h+4\pi(l-y)) \times \exp\left[\frac{4\pi(l+2y)}{h}\right] + (h-4\pi y) \exp\left[\frac{8\pi y}{h}\right] - (h+4\pi y) \exp\left[\frac{8l\pi}{h}\right] + (h+4\pi(-l+y)) \exp\left[\frac{4l\pi}{h}\right] \right) \right] \sin \frac{4\pi}{h} x. \quad (41)$$

在当前算例中我们取 $h=10$ 和 $l=1$.在文献[14]的相应算例中,我们取 $A=B=1,c=1/2$ 和 $l=10$.此时关于 $\tau_{xy}(x,y)$ 和 $\sigma_y(x,y)$ 的一些计算结果见表1.

表1 一些计算结果

Table 1 Some computed results

(x,y)	(5.00,0.25)	(5.00,0.55)	(5.00,0.75)	(5.00,0.81)	(5.00,0.94)
τ_{xy} (present)	0.014 255 1	-0.003 727 64	-0.014 255 1	-0.014 586 2	-0.007 704 85
(x,y)	(5.00,-0.25)	(5.00,0.05)	(5.00,0.25)	(5.00,0.31)	(5.00,0.44)
τ_{xy} (ref. [14])	0.014 255 1	-0.003 727 64	-0.014 255 1	-0.014 586 2	-0.007 704 85
(x,y)	(1.25,0.25)	(1.25,0.55)	(1.25,0.75)	(1.25,0.81)	(1.25,0.94)
σ_y (present)	-0.996 608	-0.994 127	-0.996 608	-0.997 707	-0.999 689
(x,y)	(1.25,-0.25)	(1.25,0.05)	(1.25,0.25)	(1.25,0.31)	(1.25,0.44)
σ_y (ref. [14])	-0.996 608	-0.994 127	-0.996 608	-0.997 707	-0.999 689

4 结 论

对基于应力形式的二维弹性问题(1),本文得到如下结论:(i)与文献[13]相比,分别得到了算子矩阵 H 的两个主对角块算子更为简洁的正交本征函数系,并证明了它们在相应空间中的完备性,进而给出了二维弹性边值问题(1)和(2)的更为简洁的一般解;(ii)若给定具体的体力函数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$,则由边界条件 $\tau_{xy}(x,0),\sigma_y(x,0),\tau_{xy}(x,l)$ 和 $\sigma_y(x,l) \in L^2[0,h]$ 可以确定一般解(33)中的待定系数;(iii)根据注1,边界条件(2)可以被其它适当的边界条件所取代.关于具体可以被哪些边界条件所取代,有待于进一步研究.

参考文献 (References):

- [1] 钟万勰. 分离变量法与哈密顿体系[J]. 计算结构力学及其应用, 1991, 8(3): 229-240. (ZHONG Wan-xie. Method of separation of variables and Hamiltonian system[J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1991, 8(3): 229-240. (in Chinese))
- [2] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995. (ZHONG Wan-xie. A

- New Systematic Methodology for Theory of Elasticity*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995. (in Chinese)
- [3] 姚伟岸, 隋永枫. Reissner 板弯曲的辛求解体系[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(2): 159-165. (YAO Wei-an, SUI Yong-feng. Symplectic solution system for Reissner plate bending[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2004, **25**(2): 178-185.)
- [4] 姚征, 张洪武, 王晋宝, 钟万勰. 基于界带模型的碳纳米管声子谱的辛分析[J]. 固体力学学报, 2008, **29**(1): 13-22. (YAO Zheng, ZHANG Hong-wu, WANG Jin-bao, ZHONG Wan-xie. Symplectic analysis for phonon dispersion of carbon nanotubes based on inter-belt model[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2008, **29**(1): 13-22. (in Chinese))
- [5] 徐新生, 王苾平, 孙发明. 二维矩形域内 Stokes 流问题的辛解析和数值方法[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(6): 639-648. (XU Xin-sheng, WANG Ga-ping, SUN Fa-ming. Analytical and numerical methods of symplectic system for Stokes flow in two-dimensional rectangular domain[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2008, **29**(6): 705-714.)
- [6] 周建方, 卓家寿, 李庆典. 基于 Hamilton 体系的分离变量法[J]. 河海大学学报, 2000, **28**(6): 27-31. (ZHOU Jian-fang, ZHUO Jia-shou, LI Qin-dian. Variable separation method based on Hamilton system[J]. *Journal of Hohai University*, 2000, **28**(6): 27-31. (in Chinese))
- [7] Luo J H, Li Q S, Liu G D. A biorthogonality relationship for three-dimensional couple stress problem[J]. *Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2009, **52**(2): 270-276.
- [8] Lim C W, Xu X S. Symplectic elasticity: theory and applications[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2010, **63**(5): 050802 (10 pages).
- [9] 张鸿庆, 阿拉坦仓, 钟万勰. Hamilton 体系与辛正交系的完备性[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(3): 217-221. (ZHANG Hong-qing, Alataancang, ZHONG Wan-xie. The Hamiltonian system and completeness of symplectic orthogonal system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 1997, **18**(3): 237-242.)
- [10] Eburilitu, Alataancang. On feasibility of variable separation method based on Hamiltonian system for a class of plate bending equations[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2010, **53**(3): 569-574.
- [11] Alataancang, Wu D Y. Completeness in the sense of Cauchy principal value of the eigenfunction systems of infinite dimensional Hamiltonian operator[J]. *Science in China, Series A: Mathematics*, 2009, **52**(1): 173-180.
- [12] 阿拉坦仓, 张鸿庆, 钟万勰. 矩阵多元多项式的带余除法及其应用[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(7): 661-668. (Alataancang, ZHANG Hong-qing, ZHONG Wan-xie. Pseudo-division algorithm for matrix multi-variable polynomial and its application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2000, **21**(7): 733-740.)
- [13] 黄俊杰, 阿拉坦仓, 王华. 基于应力形式的二维弹性问题的本征展开法[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(8): 992-1000. (HUANG Jun-jie, Alataancang, WANG Hua. Eigenfunction expansion method and its application to two-dimensional elasticity problems based on stress formulation [J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2010, **31**(8): 1039-1048.)
- [14] Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of Elasticity*[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1970: 53-56.

Eigenfunction Expansion Method of Upper Triangular Operator Matrix and Application to Two-Dimensional Elasticity Problems Based on Stress Formulation

Eburilitu, Alatancang

(*School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University,
Hohhot 010021, P. R. China*)

Abstract: The eigenfunction expansion method to solve two-dimensional (2D) elasticity problems based on stress formulation was studied. The fundamental system of partial differential equations of the 2D problems was rewritten as an upper triangular differential system based on the known results, and then the associated upper triangular operator matrix was obtained. By further researching, the two simpler complete orthogonal systems of eigenfunctions in some space were obtained, which belong to the two block operators arising in the operator matrix. Then a more simple and convenient general solution for the 2D problem was given by the eigenfunction expansion method. Furthermore, it was indicated what boundary conditions for the 2D problem can be solved by this method. Finally, the validity of the obtained results was verified by a specific example.

Key words: eigenfunction expansion method; two-dimensional (2D) elasticity problem; upper triangular operator matrix; general solution