

# 非一致性界面热流固耦合作用的整体求解\*

殷亮<sup>1</sup>, 蒋军成<sup>1</sup>, 张立翔<sup>2</sup>

(1. 南京工业大学 城市建设与安全工程学院,南京 210009;

2. 昆明理工大学 工程力学系,昆明 650051)

**摘要:** 提出了非一致性界面热流固耦合作用整体求解的一种方法.热流体求解基于 Boussinesq 假设和不可压缩的 Navier-Stokes 方程.流体区域的运动采用任意 Lagrange-Euler(ALE)方法.拟固体元方法实现流体区域的变形.使用几何非线性的热弹性动力学描述固体运动.为了保证界面处应力和传热的平衡,采用了基于 Gauss 积分点的数据交换方法,对热流固耦合最终形成的强非线性方程实现整体求解.数值实例分析表明该方法的健壮性和有效性.

**关键词:** 热流固耦合系统(TFSI); 非一致性界面; 整体求解

**中图分类号:** O343.6; O357.1; O242.2 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.02.006

## 引言

等温和非等温的流固耦合作用在很大范围的多种物理问题中是相当重要的.例如:在航空业中,对飞机机翼进行不同 Mach 数下的震动预测和稳定性分析<sup>[1]</sup>;在透平机中,计算飞机发动机叶片附近的跨音速流动<sup>[2-3]</sup>;在生物工程中,模拟分析脉冲流动引起的细长固体壁的运动<sup>[4]</sup>;在化工单元操作中,超限的应力状况导致了机械的损坏,并最终威胁到组件的结构完整性<sup>[5]</sup>;在船舶工业中,研究复合材料的螺旋桨在亚空泡流和空泡流中的特性<sup>[6]</sup>.

最近几年,流固耦合的数值模拟技术成为了众多研究课题的焦点<sup>[7]</sup>.当前已经有一些流固耦合问题的不同求解方法<sup>[8]</sup>.其求解方法包括松耦合的分区求解方法、强耦合的分区求解方法及整体求解方法.松耦合的分区求解方法是在每个时间步长分别对流体和固体采用不同的求解器,该方法中流固两区域间的解存在时间上的滞后<sup>[9]</sup>.强耦合的分区求解是在松耦合的分区求解步骤的外围增加迭代进程,该方法具有较好的收敛性和稳定性,但要耗费大量的计算资源<sup>[10]</sup>.在强耦合作用下,整体求解的方法不管在求解的稳定性及耦合系统的收敛性方面都具有优势.该方法是将整个系统构造成一个方程,并同时求解.然而,一个方程系统的形式会导致病态的系统矩阵,该矩阵在对角线项中包含零项,因此有必要开发合适的预处理系统用于方程的求解<sup>[11-12]</sup>.

在处理流固间的热传递过程中也存在类似的求解方法.第1种是直接的耦合,其中变量在一个方程系统中采用整体求解的方法同时求解<sup>[13]</sup>.第2种方法是分别对各部分进行求解,让

\* 收稿日期: 2011-05-24; 修订日期: 2011-11-30

作者简介: 殷亮(1978—),男,江苏泰兴人,讲师,博士生(联系人. Tel: +86-25-58877526; E-mail: umo-ni@sina.com).

各部分的求解器直接交换边界条件. 在这两种算法中, 边界处都采用 Neumann/Dirichlet 边界条件法. 另一种可能是使用 Lagrange 乘子实现全耦合的限制条件<sup>[14]</sup>. Lagrange 乘子粘接子区域, 具有通量的物理意义<sup>[15]</sup>. 如此, 在界面处的热流量不必显式地表达出来. 该方法适用于非一致性界面网格, 因此本文采用该方法来实现传热耦合.

多数的研究仅进行动量传递的纯流固耦合问题的讨论. 文献中少有进行热流固数值算法的研究. 对热流固耦合进行分析仍然是研究领域一项具有挑战性的任务. 在本文中, 我们将结合多种数值离散方法, 提出有效的求解算法对耦合的离散非线性方程进行求解. 其求解过程如下: 我们考虑不可压缩的 Newton 流体及 Boussinesq 假设用于流体流动. 流体区域的计算使用任意的 Lagrange-Euler(ALE) 描述, 该坐标系统中包含了由于固体位移所引起的流体区域变形对求解的影响<sup>[16-17]</sup>. 固体建模采用了标准的有限元技术. 本文的方法适用于非一致性界面的流体和固体网格, 及界面两侧具有独立有限元类型的场合. 界面处数据采用有限元差值, 该格式实现界面处强的运动限制条件, 并保证了应力和热流在界面处直接传递.

整体离散的模型包括了耦合的非线性方程. 其耦合关系如下: 流体通过界面对固体施加应力, 引起固体变形, 界面的热流用于求解固体温度场; 另一方面, 固体位移定义了流体区域的几何和几何的变化. 在离散的有限元形式中, 该过程可看作 3 个问题的耦合: 流体流动、流体网格的运动、固体动力学.

最后需要的求解步骤是对当前时间的所有未知量进行有效而健壮的求解. 在上述的离散过程完成后, 最后步骤的求解具有相当的难度, 一般而言是采用滞后分区的求解格式进行求解. 然而由于在执行序列求解过程中需要相互间的数据交换, 这些方法经常缺少精确性和健壮性, 因此对时间步长带来了限制. 在本文中, 采用基于 Newton-Raphson 方法的整体求解格式, 通过数值差分实现线性化, 从而实现所有求解未知量的拟二次收敛.

## 1 控制方程

### 1.1 流体方程的弱形式

让  $u^h, \varpi^h, \varphi^h, \psi^h$  为在  $\Omega^h$  内合适的有限元空间, 其中  $\Omega^h = \cup_{e \in \mathcal{E}_1} \Omega_e$  为流体区域  $\Omega^h$  含有  $n_{e1}$  个有限单元的标准离散. 权重函数及形函数从这些函数空间内选择, 同时合理的函数空间要满足 inf-sup 条件或 LBB (Ladyzenskaya-Babuška-Brezzi) 条件.

在 Lagrange 坐标系和 Euler 坐标系外, ALE 描述中, 引入了任意的参考坐标. 通常该坐标对应于有限元网格. ALE 描述方程可由物质时间导数与参考坐标时间导数间的基本关系推导出, 其基本关系为

$$\frac{\partial f(X_i, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(x_i, t)}{\partial t} + w_i \frac{\partial f(x_i, t)}{\partial x_i}, \quad (1)$$

其中,  $X_i$  为 Lagrange 坐标,  $x_i$  为参考坐标,  $w_i$  为对流速度.

对流速度可表达为

$$w_i = u_i - v_i, \quad (2)$$

其中,  $u_i$  为物质速度,  $v_i$  为参考点的速度. 因此对流速度实际上是物质运动与网格的相对速度.

对于  $t \in I$  的时间域, 寻找  $\mathbf{u}^h \in u^h, p^h \in \varphi^h$  和  $T^h \in \varpi^h$  以使它们对于任意选择的  $\delta \mathbf{u}^h \in \psi^h, \delta p^h \in \varphi^h$  和  $\delta T^h \in \varpi^h$  满足以下的 ALE 方程的弱形式:

$$\begin{aligned} R^f(\mathbf{u}^h, p^h, T^h; \delta \mathbf{u}^h, \delta p^h, \delta T^h) &= R_{\text{Gal}}(\mathbf{u}^h, p^h, T^h; \delta \mathbf{u}^h, \delta p^h, \delta T^h) = \\ R_{\text{Gal}}(u_i^h, p^h, T^h; \delta u_i^h) &+ R_{\text{Gal}}(u_i^h, p^h, T^h; \delta p^h) + R_{\text{Gal}}(u_i^h, p^h, T^h; \delta T^h) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

为了表达的简洁性,在下面的形式中省略上标  $h$ . 对动量方程而言,其弱形式为

$$\begin{aligned} R_{\text{Gal}}(u_i, p, T; \delta u_i) = & \int_{\Omega} (\delta u_i \rho_0 (\dot{u}_i + w_j u_{i,j}) + \delta u_{i,j} \sigma_{ij} - \delta u_i G_i (\rho_0 \beta (T - T_0))) d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma = \\ & \int_{\Omega} (\delta u_i \rho_0 (\dot{u}_i + w_j u_{i,j}) - \delta u_{i,i} p + \delta u_{i,j} [\mu (u_{i,j} + u_{j,i})] - \\ & \delta u_i G_i (\rho_0 \beta (T - T_0))) d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma, \end{aligned} \quad (4)$$

对连续性方程,其弱形式为

$$R_{\text{Gal}}(u_i, p, T; \delta p) = \int_{\Omega} \delta p u_{i,i} d\Omega, \quad (5)$$

其中,  $\sigma_{ij}$  为 Cauchy 应力,  $p$  为压力,  $t$  为时间,  $\mu$  为动力粘性系数,  $\rho$  为密度,  $\beta$  为热膨胀系数,  $G_i$  为常矢量代表单位质量的重力加速度.

对热传递方程,其弱形式为

$$\begin{aligned} R_{\text{Gal}}(u_i, p, T; \delta T) = & \int_{\Omega} \delta T (\rho_0 c_p (\dot{T} + w_j T_{,j}) - k T_{,j,j}) d\Omega = \\ & \int_{\Omega} (\delta T \rho_0 c_p \dot{T} + \delta T w_j T_{,j} + k \delta T_{,j} T_{,j}) d\Omega - \int_{\Gamma} \delta T k T_{,j} n_j d\Gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $T$  为流体温度,  $T_0$  为参考温度,  $\rho_0$  为参考密度,  $c_p$  为比定压热容,  $k$  为导热系数. Boussinesq 假设仅考虑动量方程重力项中的密度随温度的变化,而其它物理属性随温度的变化被忽略.

## 1.2 固体的弱形式

固体力学问题使用贴体的 Lagrange 坐标  $\xi^i$  表达更为方便. 对于未变形的构型,我们指定位移矢量  $\mathbf{r}(\xi^i)$ , 切向矢量  $\mathbf{g}_i = \partial \mathbf{r} / \partial \xi^i$ , 度量张量  $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ , 微元体积  $dv = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$ , 其中  $g = \det g_{ij}$ . 参考构型为应力自由体, 由于热膨胀, 微元体积从  $dv$  变为  $\Theta dv$ , 所有的长度增长  $\Theta^{1/d}$  的因子, 其中  $\Theta$  为体积增长率,  $d$  为空间的维度. 对于变形(当前)构型, 我们指定位移矢量  $\mathbf{R}(\xi^i)$ , 切向矢量  $\hat{\mathbf{G}}_i = \partial \mathbf{R} / \partial \xi^i$ , 度量张量  $G_{ij} = \hat{\mathbf{G}}_i \cdot \hat{\mathbf{G}}_j$ . 那么描述从应力自由构型到平衡状态当前构型的应变张量为

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (G_{ij} - \tilde{g}_{ij}) = \frac{1}{2} (G_{ij} - \Theta^{2/d} g_{ij}). \quad (7)$$

本文中所有的矢量都解析到固定的直角坐标基上. 未变形构型的 Euler 坐标用作 Lagrange 坐标, 则未变形的度量张量为 Kronecker 张量(单位矩阵). 变形构型上的切向矢量  $\hat{\mathbf{G}}_i$  同时也是相对于未变形构型 Euler 坐标的变形梯度张量  $\hat{\mathbf{G}}$ .

完全的 Lagrange 形式能方便地表达固体部分. 实际上, 处理未变形的几何要比处理变形几何更容易些. Piola-Kirchoff(或第二 Piola-Kirchoff) 应力张量  $\sigma_{\kappa}$ , 使用未变形的表面表达未变形的构型表面上的应力. 固体看作是超弹性体, 由 Saint-Venant-Kirchoff 模型来描述, 其应力应变关系如下:

$$\sigma_{\kappa ij} = C_{ijkl} \gamma_{kl}, \quad (8)$$

其中  $C_{ijkl}$  为常弹性模量.

固体的有限元形式由此可表达为, 对任意  $t \in I$ , 找到  $\mathbf{R}^h \in \mathcal{R}^h$  和  $T^h \in \mathcal{T}^h$  以使对任意的  $\delta \mathbf{R}^h \in \mathcal{Q}^h$  和  $\delta T^h \in \mathcal{V}^h$  (其中  $\mathbf{R}^h$  和  $T^h$  为适当的有限元空间), 满足

$$G^s(\mathbf{R}^h, T^h; \delta \mathbf{R}^h, \delta T) = G^s(\mathbf{R}^h, T^h; \delta \mathbf{R}^h) + G^s(\mathbf{R}^h, T^h; \delta T) =$$

$$G^s(R_i^h, T^h; \delta R_i^h) + G^s(R_i^h, T^h; \delta T), \quad (9)$$

上式中

$$G^s(R_i^h, T^h; \delta R_i^h) = \int_{\Omega} \left( \left( \rho \frac{\partial^2 R_i}{\partial t^2} - f_i \right) \delta R_i + \sigma_{kkl} \delta \gamma_{kl} \right) \Theta d\Omega - \int_{\Gamma} \tau_i \delta R_i d\Gamma = 0, \quad (10)$$

其中,  $\rho$  为自由应力状态的密度,  $\tau_i$  为在变形体表面  $\Gamma$  上所施加的表面应力,  $f_i$  为自由应力状态下单位体积的体积力, 它能通过质量守恒与变形体的单位体积力相联系,  $f_i \Theta = \sqrt{G/g} F_i$ .

如果在物质体内存在相对于参考温度的温度分布, 则会产生热应力, 由此方程(10)中热膨胀率表达为

$$\Theta = \alpha (T - T_{\text{ref}}), \quad (11)$$

其中,  $\alpha$  为热膨胀系数,  $T_{\text{ref}}$  为参考温度.

对能量方程来说, 其弱形式为

$$G^s(R_i, T; \delta T) = \int_{\Omega} \delta T (\rho_0 c_p \dot{T} - k T_{j,j}) d\Omega = \int_{\Omega} (\delta T \rho_0 c_p \dot{T} + k \delta T_{,j} T_{,j}) d\Omega - \int_{\Gamma} \delta T k T_{,j} n_j d\Gamma. \quad (12)$$

与流体的传热方程(6)相比, 固体的传热方程不包含对流项.

使用方程(7), 应变张量的变分表达为

$$\delta \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^i} \cdot \delta \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^j} \cdot \delta \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^i} \right). \quad (13)$$

由于第二 Piola-Kirchhoff 张量是对称的, 应变能的变分表达为

$$\begin{aligned} \int \sigma_{kij} \delta \gamma_{ij} dv &= \int \sigma_{kij} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^i} \cdot \delta \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^j} dv = \\ &= \int \sigma_{kij} \frac{\partial R_k}{\partial \xi^i} \cdot \delta \frac{\partial R_k}{\partial \xi^j} dv = \\ &= \int \sigma_{kij} \hat{G}_{i,i} \delta \hat{G}_{i,i} dv. \end{aligned} \quad (14)$$

使用方程(14)代入方程(10), 则方程(10)变为

$$G^s(R_i^h, T^h; \delta R_i^h) = \int_{\Omega} \left( \left( \rho \frac{\partial^2 R_i}{\partial t^2} - f_i \right) \delta R_i + \sigma_{kkl} \frac{\partial R_i}{\partial \xi^k} \cdot \delta \frac{\partial R_i}{\partial \xi^l} \right) \Theta d\Omega - \int_{\Gamma} \tau_i \delta R_i d\Gamma = 0. \quad (15)$$

## 2 界面模型

在完成流体流动和固体运动的空间和时间离散后, 还需要连接界面边界处的流体元和固体元, 在此动量和热量是守恒的, 而速度和温度是一致的.

满足界面处几何连续性和动量守恒的限制条件为

$$\mathbf{u} - \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{f-s}, \quad (16)$$

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{f-s}, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\tau}_f + \boldsymbol{\tau}_s = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{f-s}. \quad (18)$$

方程(16)为流固界面  $\Gamma_{f-s}$  上的非滑移条件. 量  $\dot{\mathbf{R}}$  为界面  $\Gamma_{f-s}$  上的速度矢量场. 界面处流体区域的参考坐标速度与固体位移矢量需要满足连续性要求方程(17), 其保证了参考区域的边

界能精确的代表固体的当前构型. 本文中拟固体方法用于升级流体网格以确保方程(17)满足. 在界面处的应力平衡由方程(18)表达, 其中  $\boldsymbol{\tau}_f$  和  $\boldsymbol{\tau}_s$  分别为流体和固体作用于界面的应力矢量,  $\boldsymbol{\sigma}$  为界面处计算出的流体应力.

流体和固体界面处的网格可以不完全匹配, 甚至界面处的单元也可不必相同, 因此未知量在界面处有不同的表达. 已经有一些方法用于解决该类问题. 本文中对连续性的要求通过弱形式进行满足, 并采用基于 Neumann/Dirichlet 边界条件的方法处理界面.

在不考虑热辐射的条件下, 流体和固体的温度边界条件为  $\Gamma_g$  和  $\Gamma_h$ , 即为指定值  $g$  或指定热流量  $h$ :

$$T = g \text{ 或 } \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i = h, \quad \text{在 } \Gamma_g \text{ 或 } \Gamma_h. \quad (19)$$

界面  $\Gamma_{f-s}$  处, 温度和热流边界条件需要满足:

$$T_s - T_f = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{f-s}, \quad (20)$$

$$q_s + q_f = \mathbf{n}_s \cdot (k_s \nabla T) + \mathbf{n}_f \cdot (k_f \nabla T) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{f-s}. \quad (21)$$

方程(20)要求流固界面处  $\Gamma_{f-s}$  满足热平衡条件. 界面处热流平衡由关系式(21)表达, 其中  $q_s$  和  $q_f$  分别为固体和流体在边界外法线方向上的热流.

## 2.1 动量的传递

界面应力的连续性要求通过以下方法满足. 界面的固体元承受来自流体作用给它们的应力. 当计算固体元的残差时, 我们需要计算在单元 Gauss 积分点处的作用力. 本文提供了一个查找格式, 能获得与固体元指定 Gauss 积分点对应的流体单元, 该流体单元的局部坐标, 影响该点流体应力的自由度. 固体元的残差对这些自由度的依赖在计算固体元的 Jacobi 矩阵时用到. 这些自由度还包括了流体元的坐标, 因为它们在将流体网格作为弹性体看待时也是未知量. 这一操作称为形导数. 通过有限差分的方法将这些依赖性线性化, 并使用 Netown 方法确保拟二次收敛.

在界面处固体元的界面坐标成为流体网格单元拟弹性方程在界面处的边界条件. 使用 Lagrange 乘子方法确保边界处流体网格与固体边界对齐, 然后通过非滑移边界条件升级界面处流体速度.

Lagrange 乘子的物理含义为表面作用力, 其使得流体区域边界与固体边界构型相匹配:

$$- \int_{\Gamma_{f-s}} \delta R_i^f \tau_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{f-s}} \delta \tau_i (R_i^f - R_i^s) d\Gamma, \quad (22)$$

其中,  $R_i^f$  为变形流体区域的位移矢量,  $R_i^s$  为变形固体区域的位移矢量,  $\tau_i$  为 Lagrange 乘子. 此动量传递方法以权重余差的形式满足了几何连续性, 同时还满足了动量守恒.

## 2.2 热量的传递

热量的传递类似于位移条件的满足. Lagrange 乘子用于确保非一致性元的热量和温度的统一, 该方法被称之为 mortar 方法<sup>[14]</sup>. 本文中该 Lagrange 乘子定义在界面的流体元侧, 它具有热流量的物理意义. 当计算固体元的残差时, 我们要计算对应于固体元的 Gauss 积分点处流体元的 Lagrange 乘子的值, 方法类似于动量传递. 热量和动量传递的不同点在于动量的传递是显式地使用流体界面元的速度和压力表达的, 而热量的获取则直接使用 Lagrange 乘子的值. 在 mortar 方法中, 温度条件是通过弱形式满足的, 因此我们还需要获得在流体元的 Gauss 积分点处所对应的固体元温度值. 该数据的传递类似于流体到固体的数据传递方法. 同理, 在计算 Jacobi 矩阵时, 所使用的传递值涉及到的自由度对残差的影响通过线性化的方法实现其作用.

### 2.3 界面处数据的传递

正如上文所述,为了满足动量和热量的界面边界条件,我们有效地采用了基于有限元 Gauss 积分点的数据传输方法,见图 1. 其方法可以描述为

$$x_A^{s-f} = \varphi_A(x_b^f) = \sum_{b=1}^{M_f} c_{Ab} x_b^f, \quad (23)$$

这里,  $\varphi_A(\cdot)$  为固体元 Gauss 积分点  $A$  的变换运算符. 其中对应于该 Gauss 点的流体元处的值  $x$  通过有限元的方法进行计算,这一计算涉及  $M_f$  个流体的自由度  $x_b^f$ , 这些自由度作为该 Gauss 点对应的单元外部自由度用于 Jacobi 矩阵的计算. 系数  $c_{Ab}$  代表了与自由度  $x_b^f$  相联系的权重系数,该值在模拟过程中是不变的. 同理,可定义针对于流体 Gauss 积分点的变换运算符.

### 2.4 网格的升级

当固体位移变大时,内部有限元节点的运动应该使得网格的质量不至于变差. 有很多方法用于升级网格. 如果几何比较简单,在实际分析前固体的运动可以预测,则网格的运动可以使用简单的函数进行描述,使用函数方法升级网格的好处在于升级的耗费比较小. 应用于结构性网格的代数模型就是其代表性的方法,但其很难用于非结构性网格中.

对大变形的状况,由于难以提前精确地预测固体的变形,网格的代数类型升级很难. 本文采用了拟弹性技术进行网格升级. 此方法中,网格被看作一弹性体. 使用固体力学中标准的有限元方法将网格适应于区域新的几何构型. 对于小的几何变形,线性弹性模型就足够了. 在存在大的流体区域变形时,超弹性模型更为适用. 在本文的拟弹性方法中,网格被看作简单的超弹性连续体.

## 3 求解算法

已知在时刻  $t_n$  时的解,则要求解非线性耦合方程系统以获得在下一个时刻  $t_{n+1}$  的未知量的值. 求解的方法是基于 Newton-Raphson 方法,其求解非线性方程系统  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . 求解过程的  $k+1$  次迭代可视为对解的升级的求解:

$$\mathbf{J}^k \Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{r}(\mathbf{x}^k). \quad (24)$$

随后升级未知量:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k, \quad (25)$$

其中第  $k$  次的 Jacobi 矩阵定义为

$$\mathbf{J}^k = \left. \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k}. \quad (26)$$

要解释 Jacobi 矩阵的组成,可将状态变量  $\mathbf{x}$  分组为包含流体的变量  $\mathbf{x}_f$  和包含固体的变量  $\mathbf{x}_s$ . 流体的变量  $\mathbf{x}_f$  包括了在网格节点的流体速度、单元或网格节点处流体的压力、流体的温

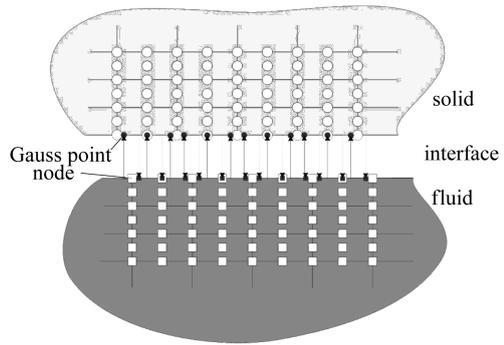


图 1 基于 Gauss 点的界面数据传递

Fig. 1 The data transfer for the Gauss points at the interface

度、网格节点的坐标、及在流固界面处涉及坐标和温度的 Lagrange 乘子。固体的变量  $\mathbf{x}_s$  包括固体的节点坐标和节点处固体温度。对于强耦合的流固耦合问题,总体的残差  $\mathbf{r}$  由流体部分的残差  $\mathbf{r}_f(\mathbf{x}_f, \mathbf{x}_s)$ , 及固体部分的残差  $\mathbf{r}_s(\mathbf{x}_f, \mathbf{x}_s)$  共同组成。流体  $\mathbf{r}_f$  包含了在流体区域的流动和能量方程的残差,还包括了界面的坐标和温度一致性要求引起的残差。而  $\mathbf{r}_s$  包含了固体区域的运动和能量方程的残差。通过结合这些未知量于一个离散方程系统中,其形式表达为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_f \\ \mathbf{r}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

方法可描述为

$$\mathbf{J}^k \Delta \mathbf{x}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{ff}^k & \mathbf{J}_{fs}^k \\ \mathbf{J}_{sf}^k & \mathbf{J}_{ss}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_f^k \\ \Delta \mathbf{x}_s^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_f^k \\ \mathbf{r}_s^k \end{bmatrix}, \quad (28)$$

其中,状态未知量的升级通过方程(25)。Jacobi 子矩阵中使用的符合关系如  $\mathbf{J}_{fs} = \partial \mathbf{r}_f / \partial \mathbf{x}_s$ 。非对角线的矩阵块  $\mathbf{J}_{fs}^k$  和  $\mathbf{J}_{sf}^k$  起源于流体与固体的相互作用。 $\mathbf{J}_{fs}^k$  包含了流体残差相对于固体未知量的导数,并包含固体坐标和温度。 $\mathbf{J}_{sf}^k$  包含了固体残差对流体未知量的导数,并包含了流体的压力、速度、温度、Lagrange 乘子及流体网格的坐标。 $\mathbf{J}_{ss}^k$  和  $\mathbf{J}_{ff}^k$  通过分析的方法获得。而  $\mathbf{J}_{fs}^k$  和  $\mathbf{J}_{sf}^k$  则通过有限差分的方法获得。两类 Lagrange 乘子确保了位移和温度的一致性。由于界面作用力是显式的计算的,没有使用 Lagrange 乘子,则在下一个迭代进行前对界面的流体速度要进行非滑移升级。方程(28)的求解,可以通过直接求解或迭代求解。由于对角线零项的存在,如果使用迭代求解,要开发合适的预处理系统。在本文中侧重于耦合算法的研究,因此采用了直接求解的方法。

## 4 数值案例

我们讨论受二维切向流作用的平板的案例。其板两端固定,使用常物性参数的热弹性材料模拟该板。在未变形构型中,其板与水平方向平行。流体流动的机械力和传热引起的热应力使得板发生弯曲。

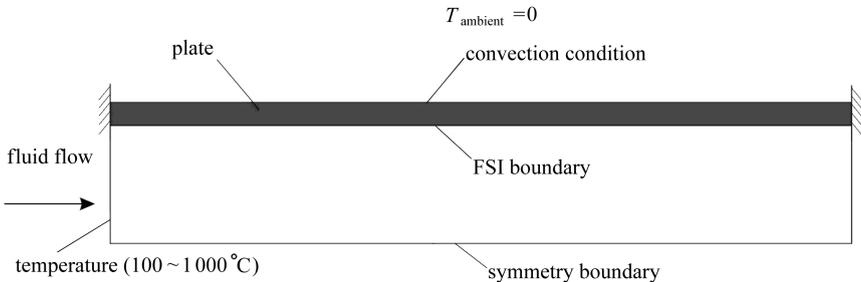


图2 切向流作用下的平板:几何图形和边界条件

Fig.2 A plate subjected to tangential fluid flow: geometry and boundary conditions

其几何及边界条件见图2。在入口处,我们设定流体的速度分布为 Poiseuille 流,其最大速度为  $u_{\max} = 0.1 \text{ m/s}$ , 温度为均匀分布。出口自由应力边界条件,热通量为0。流体的下边界为对称性边界条件,垂直方向上流体速度和热流为0。板的下边界与流体接触,上边界的面垂直

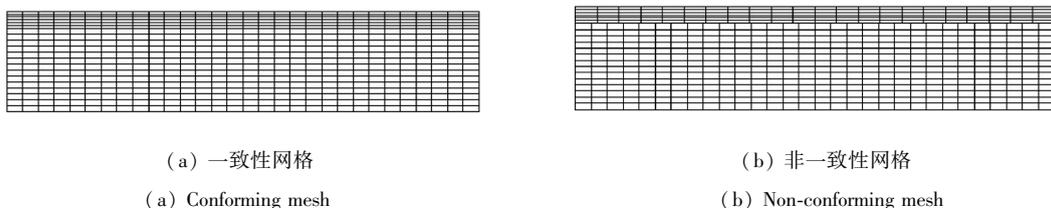


图3 流体和固体的有限元网格

Fig.3 Fluid and solid finite element meshes

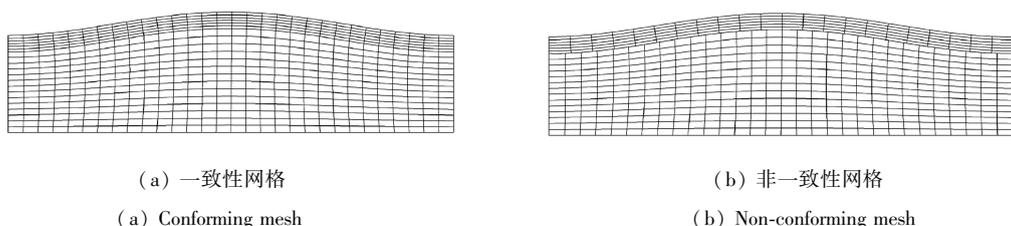


图4 流体和固体的在  $T = 1\ 000\ ^\circ\text{C}$  变形后的网格

Fig.4 Fluid and solid finite element meshes at inlet temperature  $T = 1\ 000\ ^\circ\text{C}$

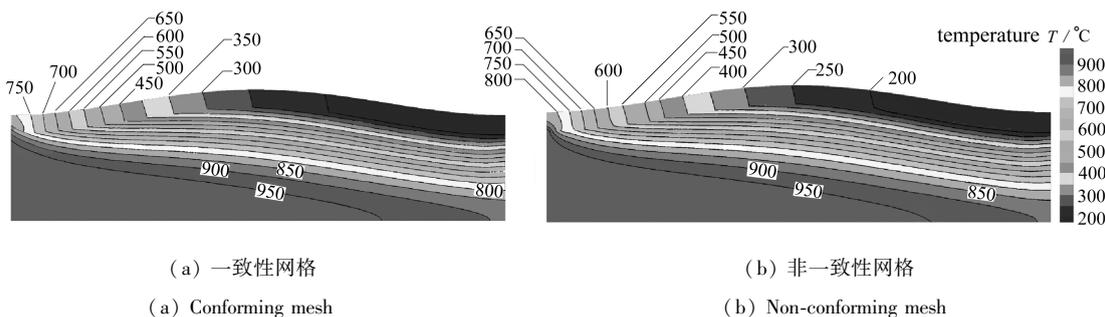


图5 流体和固体的在  $T = 1\ 000\ ^\circ\text{C}$  时的流线和温度分布

Fig.5 Temperature contours at inlet temperature  $T = 1\ 000\ ^\circ\text{C}$  in steady flow

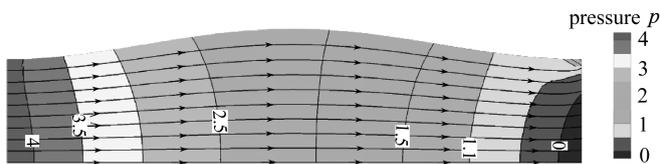


图6  $T = 1\ 000\ ^\circ\text{C}$  时的压力分布和流线

Fig.6 A pressure contour and streamline at inlet temperature  $T = 1\ 000\ ^\circ\text{C}$  in steady flow

方向的应力为 0。流体的物性参数粘性系数、密度、比定压热容、导热系数分别取  $\mu_f = 1\ \text{Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\rho_f = 20\ \text{kg}/\text{m}^3$ ,  $C_f = 100\ \text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,  $K_f = 1\ \text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ , 固体物性参数弹性模量、Poisson 系数、密度、比定压热容、导热系数、热膨胀系数分别取  $E = 1 \times 10^5\ \text{Pa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho_s = 1 \times 10^3\ \text{kg}/\text{m}^3$ ,  $C_s = 1 \times 10^3\ \text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,  $K_s = 100\ \text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $\alpha = 6 \times 10^{-5}\ \text{K}^{-1}$ 。我们假设固体为平面应变条件。上述参数的选取是任意的,它们仅为展示数值模拟算法。

整个流体区域都为 ALE 区域,网格升级使用拟固体方法,参数选择与板参数一样。进行两种类型的计算来验证界面数据传输的算法。第 1 种为一致性网格,第 2 种为非一致性网格,其

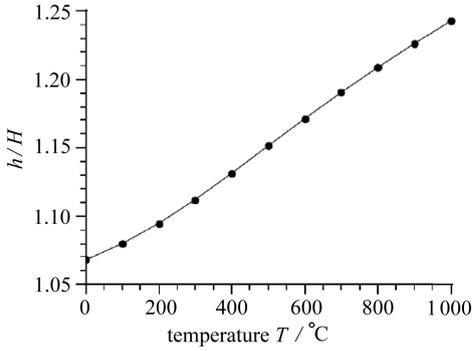


图7 温度-高度曲线:无量纲最大垂直高度  $h/H$  ( $H$  为未变形构型的高度) 随入口温度的变化(从  $0^\circ\text{C}$  到  $1000^\circ\text{C}$ )

Fig. 7 A temperature-height diagram; the non-dimensional maximum vertical position  $h/H$  ( $H$  is the height of undeformed configuration) as a function of inlet temperature  $T$  from  $0^\circ\text{C}$  to  $1000^\circ\text{C}$

固体网格更粗些,见图3。它们都有420个流体元,在一致性网格中有180个固体元,而在非一致性网格中有132个固体元。对固定入口最大速度  $0.1\text{ m/s}$  的条件下不同入口温度进行数值模拟。

图4为在为  $T = 1000^\circ\text{C}$  时变形后的一致性网格和非一致性网格。其流动特性和温度分布见图5和图6。不同入口温度下最大的高度见图7。

基于以上结果,我们可以得到:

1) 图4表示在不同的网格下,几何变形是相同的,表明界面数值算法是有效的,能适用于非一致性网格,由此在我们的整体求解方法中,流体和固体可以使用不同的函数空间离散。

2) 图5表示结果的一致性。仅在固体左边角温度有差别,这是由于非一致性网格采用了较粗的网格,其它部位的值得对应得很好。界面处温度的光滑过度表明实施了正确的界面数据传递算法,由于界面

条件及流体对流作用,界面处存在温度分层。

3) 图4和图5显示变形几乎对称,最大变形在中央,但在其它参数条件下未必如此,如大的长高比的情况下。图6表明从入口到出口发生了压力降,板的变形使得沿流固界面的压力降要小于沿流体下边界的对称面上的压力降。两端固定及中心很大部分具有均一的压力分布也许是产生对称变形的缘由。

4) 图7画出了无量纲的最高垂直位置随入口温度的变化,表明了系统的温度位移特性。很明显,温度引起了最大位移及平板变形几乎线性的增长,这是与线性的热膨胀假设一致。从变形看,热应力的足与流体机械力的作用相比,甚至在某些情况下温度对变形的影响更大。

## 5 结 论

本文提出了非一致性界面热流固耦合作用整体求解的一种方法。所采用的计算框架容许流体和固体进行独立离散。界面方法是基于有限元积分 Gauss 点的数据传递方法。耦合系统的求解依赖于差分方法的界面线性化和流体及固体完全的有限元离散,从而实现统一的计算框架,并实现残差的拟二次收敛。同时我们发现流体固体相互作用产生的非对角矩阵块对求解的收敛性具有影响。

虽然本文的数值案例限于二维稳态的情况,但该方法同样适用于非稳态和三维构型。

该方法对大自由度和极端参数情况下的有效性还需要进行进一步的研究。具体相关的报告将会在以后发表。

## 参考文献 (References) :

- [1] Kamakoti R, Shyy W. Fluid-structure interaction for aeroelastic applications[J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2004, **40**(8) : 535-558.
- [2] Sadeghi M, Liu F. Coupled fluid-structure simulation for turbomachinery blade rows[C]// *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2005 : 2005-0018.
- [3] Kroyer R. Fsi analysis in supersonic fluid flow[J]. *Computers & Structures*, 2003, **81**(8) : 755-764.
- [4] Van Loon R, Anderson P D, Baaijens F, van de Vosse F N. A three-dimensional fluid-structure interaction method for heart valve modelling[J]. *Comptes Rendus Mecanique*, 2005, **333**(12) :856-866.
- [5] Kang D G, Jhung M J, Chang S H. Fluid-structure interaction analysis for pressurizer surge line subjected to thermal stratification[J]. *Nuclear Engineering and Design*, 2010, **241**(1) : 257-269.
- [6] Young Y. Fluid-structure interaction analysis of flexible composite marine propellers[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2008, **24**(6) : 799-818.
- [7] Bungartz H J. *Fluid Structure Interaction II : Modelling, Simulation, Optimization*[M]. Springer Verlag, 2010:1-424.
- [8] Dettmer W, Peric D. A computational framework for fluid-structure interaction: finite element formulation and applications[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, **195**(41/43) : 5754-5779.
- [9] Pironkov P. Numerical simulation of thermal fluid-structure interaction[D]. PhD Thesis. Technische Universitat Darmstadt, 2010: 31-50.
- [10] Le Tallec P, Mouro J. Fluid structure interaction with large structural displacements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, **190**(24/25) :3039-3067.
- [11] Walhorn E, Kolke A, Hubner B, Dinkler D. Fluid structure coupling within a monolithic model involving free surface flows[J]. *Computers & Structures*, 2005, **83**(25) :2100-2111.
- [12] Heil M, Hazel A L, Boyle J. Solvers for large-displacement fluid-structure interaction problems: segregated versus monolithic approaches[J]. *Computational Mechanics*, 2008, **43**(1) :91-101.
- [13] Duchaine F, Corpron A, Pons L, Moureau V, Nicoud F, Poinot T. Development and assessment of a coupled strategy for conjugate heat transfer with large eddy simulation: application to a cooled turbine blade[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2009, **30**(6) : 1129-1141.
- [14] Zienkiewicz O C, Taylor R L, Zhu J Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*[M]. Volume 1. Amsterdam, London: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005 : 430-452.
- [15] Haupt M, Niesner R, Unger R, Horst P. Coupling techniques for thermal and mechanical fluid-structure-interactions in aeronautics[J]. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, **5**(1) :19-22.
- [16] Donea J, Huerta A, Ponthot J P, Rodriguez-Ferran A. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Meth-*

- ods[M]. Encyclopedia of computational mechanics. West Sussex, England: John Wiley & Sons, 2004: 1-25.
- [17] Souli M, Ouahsine A, Lewin L. Ale formulation for fluid-structure interaction problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, **190**(5/7):659-675.

## Monolithic Approach to Thermal Fluid Structure Interaction With Non-Conforming Interfaces

YIN Liang<sup>1</sup>, JIANG Jun-cheng<sup>1</sup>, ZHANG Li-xiang<sup>2</sup>

- (1. *College of Urban Construction and Safety Engineering, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, P. R. China;*
- (2. *Department of Engineering Mechanics, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650051, P. R. China)*

**Abstract:** A monolithic approach to thermal fluid structure interaction with non-conforming interfaces was presented. The thermal viscous flow was governed by the Boussinesq approximation and the incompressible Navier-Stokes equations. The motion of the fluid domain was accounted for by an arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) strategy. A pseudo-solid formulation was used to manage the deformation of the fluid domain. The structure was described by geometrically nonlinear thermoelastic dynamics. An efficient data transfer strategy based on Gauss points was proposed to guarantee equilibrium of the stresses and heat along the interface. The resulting strongly coupled set of non-linear equations for fluid, structure, heat was solved by a monolithic solution procedure. Numerical example was presented to demonstrate the robustness and efficiency of the methodology.

**Key words:** thermal fluid structure interaction; non-conforming interface; monolithic solution