

四段式有限元法分析热耦合的 流体-固体相互作用问题*

A·马拉第普¹, N·万苏法克², P·德乔姆凡²

(1. 国立金属和材料技术中心 计算机辅助研究所, 巴吞他尼 1212, 泰国;
2. 朱拉隆功大学 机械工程系, 曼谷 10330, 泰国)

摘要: 给出了一种流(体)-热-结构综合的分析方法, 固体中的热传导耦合了粘性流体中的热对流, 因而在固体中产生热应力. 应用四段式有限元法和流线逆风 Petrov-Galerkin 法分析热粘性流动, 应用 Galerkin 法分析固体中的热传导和热应力, 应用二阶半隐式 Crank-Nicolson 格式对时间积分, 提高了非线性方程线性化后的计算效率. 为了简化所有有限元公式, 采用 3 节点的三角形单元, 对所有的变量: 流体的速度分量、压力、温度和固体的位移, 使用同阶次的插值函数. 这样做的主要优点是, 使流体-固体介面处的热传导连接成一体. 数个测试问题的结果表明, 这种有限元法是有效的, 且能加深对流(体)-热-结构相互作用现象的理解.

关键词: 液体-固体相互作用; 有限元法; 四段式

中图分类号: O175.2; O242.21 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.01.008

符号说明

g	重力加速度	k	传热系数
Pe	Peclet 数	\overline{Nu}	平均的 Nusselt 数
p	流体压力	\tilde{Q}	每单位体积的产热量
t	时间	T	温度
u_1	x 方向上的速度分量	u_2	y 方向上的速度分量
v_1	x 方向上的固体位移	v_2	y 方向上的固体位移
x	水平距离	y	垂直距离
Gr	Grashof 数, 浮力和粘性力之比: $Gr = g\beta_r(T_h - T_c)L^3/\nu^2$		
Nu	局部 Nusselt 数, 对流传热与垂直于边界面的热传导之比		
Pr	Prandtl 数, 动量扩散系数(动粘度)和热扩散系数之比: $Pr = \nu/\alpha$		
Re	Reynolds 数, 惯性力和粘性力之比: $Re = \rho vd/\mu$		
希腊符号			
α	热扩散系数: $\alpha = k/\rho c$	β_t	热膨胀系数

* 收稿日期: 2010-12-16; 修订日期: 2011-08-17

基金项目: 泰国研究基金资助课题; 泰国高等教育委员会资助课题

作者简介: P. Dechaumphai, Professor(联系人. E-mail: fmepdc@eng.chula.ac.th@yahoo.com).

本文原文为英文, 海治译, 张禄坤校.

ν	动粘度, $\nu = \mu / \rho$	ρ	密度
α_{sf}	固体热扩散系数与流体热扩散系数之比: $\alpha_{sf} = \alpha_s / \alpha_f$		
K_{sf}	固体传热系数与流体传热之比: $K_{sf} = k_s / k_f$		
下标			
i, j	节点数	int	介面
o	冷表面	f	流体
s	固体		

引 言

如今,若要对由计算机辅助模拟设计出来的产品进行改进,都需要了解液体流动和热传导,与相邻固体的变形和热应力之间所存在相互的依赖关系.例如空气致冷包的设计,可以增强界面的热传导,也可以通过管道中液体的流动,增强太阳能板的热传导.流程图 1 给出了液体的流动、固体中热传导、固体的变形及其应力,以及它们的主要未知量之间的相互关系.热量可以在流体流动和固体内传导,热量可以通过界面在液体和固体中交换,流体的流动和固体内的热传导,使固体温度发生改变,导致固体的变形并产生热应力.此外,液体压力也会导致固体变形,若固体变形足够大时,能够影响到流场的状态.

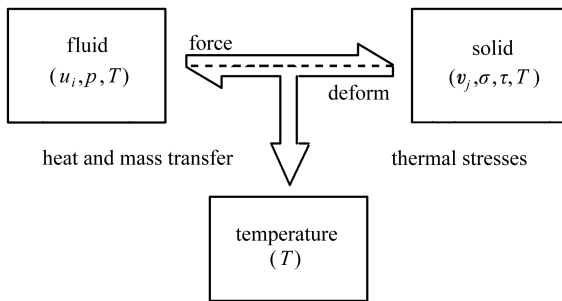


图 1 耦合的液体-固体相互作用问题

Fig. 1 Schematic diagram for the coupled fluid-solid interaction problems

为了分析液体的流动特性、固体中的温度和变形,许多学者使用不同的计算方法.有限体积法常用于分析液体的流动,有限元法则常用于固体中热传导和应力的分析.使用不同的算法,导致相互之间交换数据的困难,还造成不同的模型离散化,尤其是液-固界面离散化的困难.目前,液体流动和固体耦合的传热分析仍是最具挑战性的难题之一,因为液体运动的控制方程和固体的能量方程之间存在内在耦合.在高 Rayleigh 数下,无论是液体的自由对流还是受迫对流问题,这种耦合效应益发明显.

研究者提出了许多有限体积和有限元公式,用来分析液体和固体间流体的流动和热传导现象. Misra 和 Sarkar^[1]运用正规的 Galerkin 公式,同时求解连续、动量和能量方程; Malatip 等^[2]结合了流线逆风 Petrov-Galerkin 公式(SUPG)和隔离的有限元法,分析了结合稳定的传热问题; Malatip 等^[3]开发了一种分步算法,分析结合不稳定的传热问题; Al-Amiri 等^[4]运用了有限元法,在一个可导墙的饱和流体的多孔腔中,研究稳态的自然对流问题; Schäfer 和 Teschauer^[5]利用有限体积法,同时研究流体的流动现象和固体的热传导特性.

本文将分段式有限元法^[3]推广,分析流(体)-热-结构的相互作用问题.应用同阶次的三角形单元,对流体和固体区域离散化,建立有限元公式化体系,结合 SUPG^[6-7]的概念,公式化

体系中包含了逆风格式,应用基于半隐式的分段式法对时间积分,作为结果将非线性的动量和能量方程线性化,全面提高了计算的效率。

本文首先给出一组满足流体质量、动量和能量守恒,以及满足固体平衡方程和热传导能量守恒的偏微分方程。然后推导出相应的有限元方程,给出有限元矩阵,并简要地描述所采用的计算机算法程序。最后通过求解数个示例,对有限元公式和流(体)-热-结构综合法进行评估,并与以前文献中的数值解比较。

1 公式化理论及其求解过程

1.1 控制方程

本节简要地描述流(体)-热-结构耦合问题的控制方程。设 Ω 表示整个流体和固体区域,其中流体区域为 Ω_f , 固体区域为 Ω_s 。

1.1.1 流体区

流体区为不稳定、不可压缩、粘性的受热流体,流体的控制方程包括质量(即连续性方程)、动量和能量守恒方程,如下所示:

连续性方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0; \quad (1a)$$

动量方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + f_{fi}; \quad (1b)$$

能量方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_f \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \tilde{Q}_f; \quad (1c)$$

式中, u_i 为 Cartesian 坐标 x_i 方向的速度分量, t 为时间, ρ_f 为流体的密度, p 为压力, ν_f 为动粘度, f_{fi} 为体力(例如浮力, $f_{fi} = g_i(1 - \beta_f(T - T_0))$), T 为温度, T_0 为参考温度, β_f 为热膨胀体积系数, α_f 为热扩散系数, \tilde{Q}_f 为流体内部每单位体积的产热比。

1.1.2 固体区

固体区域有如下的平衡方程和能量方程:

平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_s f_{si} = 0; \quad (2a)$$

能量方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_s \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \tilde{Q}_s; \quad (2b)$$

其中, σ_{ij} 为应力分量, ρ_s 为密度, α_s 为热扩散系数, f_{si} 为外力(例如重力), \tilde{Q}_s 为固体内部每单位体积的产热比。

需要注意的是在有预应变条件下,固体的二维应力-应变关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_m \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{C}_m \boldsymbol{\alpha} (T_{\text{avg}} - T_0), \quad (3)$$

其中, $\boldsymbol{\sigma}$ 包括应力分量 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} , \mathbf{C}_m 为材料刚度矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 为包含热膨胀系数的矢量。对平面应力的情况,这些矩阵可参见文献[8]。应变矢量和位移梯度之间的关系如下给出:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\frac{\partial v_1}{\partial x} \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right]^T. \quad (4)$$

1.1.3 介面条件

上述偏微分的控制方程,连同液体-固体介面处的约束条件一起求解.利用流体在固体壁面上无滑移条件,及介面处温度和热通量必须连续:

$$u_{f,int} = u_{s,int}, \quad (5a)$$

$$T_{f,int} = T_{s,int}, \quad (5b)$$

$$\alpha_f \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{f,int} = \alpha_s \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{s,int}, \quad (5c)$$

其中 n 表示垂直于介面的方向.

1.2 四段式法

控制方程利用半隐式四段式法^[3,9]完成对时间积分.首先,将压力梯度项,从对流项、扩散项和外力项中解耦出来;其次,对方程(1b)和(1c)中的对流项和粘性项,应用 Crank-Nicolson 的二阶半隐式时间推进格式;第三,然后根据连续性方程解出压力;最后,根据计算的压力,修正速度分量:

第一步

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{u}_i \hat{u}_j + u_i^n u_j^n) = \\ - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} \right) + f_{\hat{u}_i}, \end{aligned} \quad (6a)$$

第二步

$$\frac{u_i^* - \hat{u}_i}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right), \quad (6b)$$

第三步

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{2\rho}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i}, \quad (6c)$$

第四步

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \right), \quad (6d)$$

第五步

$$\begin{aligned} \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (T^{n+1} u_j^{n+1} + T^n u_j^n) = \\ \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial T^n}{\partial x_j} \right) + \tilde{Q}_i, \end{aligned} \quad (6e)$$

其中, Δt 为时间增量, \hat{u}_i 和 u_i^* 为中间速度,上标 n 表示时间级.为了得到指定的求解精度,对半隐式法的时间增量有所限制.方程(6e)也可用来分析固体的热传导问题,为此设定的速度分量 u_j 为 0.

1.3 有限元公式

本文采用 3 节点的三角形单元,因为三角形单元的插值函数比较简单,同时流体区和固体区网格的离散化处理也方便.需要注意的是,液体-固体介面离散化必需相同.假设 3 节点三角形单元,对所有的速度分量、压力、温度和固体位移分量,都呈如下形式的线性分布:

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) \phi_i, \quad (7)$$

其中, ϕ 表示传输属性(u_1, u_2, p, T, v_1 和 v_2), N_i 为单元的插值函数.

这里给出算法的基本思想:用 2 个动量方程解出 2 个速度分量;用连续性方程解出压力;用能量方程解出流体区的温度;仍用能量方程解出固体区的温度;用平衡方程解出固体区的位移分量.与动量、连续、能量和平衡方程对应的有限元方程由下节给出.

1.3.1 流线逆风的 Petrov-Galerkin 法

在流线逆风的 Petrov-Galerkin 法中,为了抑制数值解中可能产生的非物理的时空振荡,在对流项上附加一个修正的权重函数 W_α , 权重函数由文献[7]给出:

$$W_\alpha = N_\alpha + \frac{\Delta t_e}{2} u_j \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j}, \quad (8)$$

其中

$$\Delta t_e = \frac{\lambda h_{\min}}{|U|}, \quad (9a)$$

$$\lambda = \coth \frac{Pe}{2} - \frac{2}{Pe}, \quad (9b)$$

$$Pe = \frac{|U| h_{\min}}{2\nu}, \quad |U| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad (9c)$$

式中, Pe 为 Peclet 数, h_{\min} 为最小单元尺寸, $|U|$ 为平均合速度.

1.3.2 时间离散化

联合使用加权余量法和流线逆风的 Petrov-Galerkin 法,来离散化有限元方程.首先,将方程(6a)~(6e)乘以权函数,然后使用 Gauss 定理对它们进行分部积分,按下列步骤得到有限元方程:

第一步 动量方程离散化

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} N_\alpha \left(\frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} \right) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} W_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{u}_i \hat{u}_j + u_i^n u_j^n) \right) d\Omega + \\ & \frac{1}{2} \nu \int_{\Omega} \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} \right) d\Omega = \\ & - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} W_\alpha \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) d\Omega + \nu \int_{\Gamma} W_\alpha \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \hat{n}_k \right) d\Gamma + \int_{\Omega} W_\alpha f_{in} d\Omega, \end{aligned} \quad (10)$$

其中, Ω 为有限元区域, Γ 为计算区域的边界.

第二步 建立中间速度方程

$$\int_{\Omega} N_\alpha \left(\frac{u_i^* - \hat{u}_i}{\Delta t} \right) d\Omega = \frac{1}{2\rho} \int_{\Omega} W_\alpha \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) d\Omega. \quad (11)$$

第三步 压力方程离散化

为了导出离散化的压力方程,对连续方程(1a)使用加权余量法:

$$\int_{\Omega} W_\alpha \left(\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_i} (u_i^{n+1}) d\Omega + \int_{\Gamma} W_\alpha (u_i^{n+1} n_i) d\Gamma = 0. \quad (12)$$

其中, n_i 为与计算区域边界垂直的单位向量的方向余弦,将方程(6d)代入到方程(12),得到如下 Poisson 型的压力方程:

$$\frac{\Delta t}{2\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial W_{\alpha}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial W_{\alpha}}{\partial x_i} u_i^* d\Omega - \int_{\Gamma} W_{\alpha} (u_i^{n+1} n_i) d\Gamma. \quad (13)$$

根据 Kim 和 Moin^[10], 方程(13)中未知量 u_i^{n+1} , 可以用前期的 \hat{u}_i 近似, 在这样的近似下得到随时间步长而变化的误差如下:

$$u_i^{n+1} - \hat{u}_i = -\frac{\Delta t}{2\rho} \frac{\partial (p^{n+1} - p^n)}{\partial x_i} \approx -\frac{(\Delta t)^2}{2\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (14)$$

第四步 得到修正的速度方程

$$\int_{\Omega} N_{\alpha} \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} \right) d\Omega = -\frac{1}{2\rho} \int_{\Omega} W_{\alpha} \left(\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \right) d\Omega. \quad (15)$$

第五步 修正的温度方程

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_{\alpha} \left(\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} \right) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} W_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (T^{n+1} u_j^{n+1} + T^n u_j^n) \right) d\Omega + \\ \frac{1}{2} \alpha_f \int_{\Omega} \frac{\partial W_{\alpha}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial T^n}{\partial x_j} \right) d\Omega = \\ \alpha_f \int_{\Gamma} W_{\alpha} \left(\frac{\partial T^n}{\partial x_j} \hat{n}_k \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} W_{\alpha} q_s^n d\Gamma + \int_{\Omega} W_{\alpha} \tilde{Q}^n d\Omega. \end{aligned} \quad (16)$$

将方程(7)代入方程(10)~(16), 可以得到矩阵形式的有限元方程, 结果汇总如下:

第一步

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \frac{1}{2} (\mathbf{C} + \mathbf{K}_m) \right) \hat{\mathbf{u}}_i = \\ \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} - \frac{1}{2} (\mathbf{C} + \mathbf{K}_m) \right) u_i^n - \mathbf{G}_i p_i^n + \mathbf{R}_{g_i}^n + \mathbf{R}_{b_i}^n; \end{aligned} \quad (17a)$$

第二步

$$\mathbf{M} u_i^* = \mathbf{M} \hat{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G}_i p_i^n; \quad (17b)$$

第三步

$$\mathbf{K}_p p_i^{n+1} = \mathbf{R}_i^* + \mathbf{R}_b^*; \quad (17c)$$

第四步

$$\mathbf{M} u_i^{n+1} = \mathbf{M} u_i^* - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G}_i p_i^{n+1}; \quad (17d)$$

第五步

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \frac{1}{2} (\mathbf{C} + \mathbf{K}_T) \right) T^{n+1} = \\ \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} - \frac{1}{2} (\mathbf{C} + \mathbf{K}_T) \right) T^n + \mathbf{R}_c^n + \mathbf{R}_q^n + \mathbf{R}_Q^n. \end{aligned} \quad (17e)$$

上述方程中单元矩阵的积分形式为

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad (18a)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \left(\mathbf{u}_j \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} \right) d\Omega, \quad (18b)$$

$$\mathbf{K}_m = \nu \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{W}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega, \quad (18c)$$

$$\mathbf{K}_T = \alpha_f \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{W}^T}{\partial x_j} \frac{\partial N}{\partial x_j} d\Omega, \quad (18d)$$

$$\mathbf{G}_i = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \frac{\partial N}{\partial x_i} d\Omega, \quad (18e)$$

$$\mathbf{K}_p = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{W}^T}{\partial x_j} \frac{\partial N}{\partial x_j} d\Omega, \quad (18f)$$

$$\mathbf{R}_{gi} = g_i \int_{\Omega} \mathbf{W}^T (1 - \beta_f (T - T_0)) d\Omega, \quad (18g)$$

$$\mathbf{R}_i = \frac{2\rho}{\Delta t} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{W}^T}{\partial x_i} (N u_i^T) d\Omega, \quad (18h)$$

$$\mathbf{R}_{bi} = \nu \int_{\Gamma} \mathbf{W}^T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \hat{n}_k \right) d\Gamma, \quad (18i)$$

$$\mathbf{R}_b = -\frac{2\rho}{\Delta t} \int_{\Gamma} \mathbf{W}^T (u_j \hat{n}_k) d\Gamma, \quad (18j)$$

$$\mathbf{R}_c = \alpha_f \int_{\Gamma} \mathbf{W}^T \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \hat{n}_k \right) d\Gamma, \quad (18k)$$

$$\mathbf{R}_q = \int_{\Gamma} \mathbf{W}^T q_s d\Gamma, \quad (18l)$$

$$\mathbf{R}_Q = \int_{\Omega} \mathbf{W}^T Q d\Omega. \quad (18m)$$

从对流和扩散的局部时间步长中,选取最小的时间步长:

$$\Delta t = \min(\Delta t_{\text{conv}}, \Delta t_{\text{diff}}), \quad (19a)$$

$$\Delta t_{\text{conv}} = \frac{h_{\min}}{|U|}, \quad \Delta t_{\text{diff}} = \frac{h_{\min}^2}{2\alpha_f}. \quad (19b)$$

与流体区使用的3节点三角形单元相类似,按照同样的方式对固体区的方程(2a)运用 Galerkin 有限元法,可以导出有限元方程如下:

$$\mathbf{K}_s \boldsymbol{\delta}_s = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_t, \quad (20)$$

其中

$$\mathbf{K}_s = \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s d\Omega, \quad (21a)$$

$$\mathbf{F}_0 = \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \alpha (T_{\text{avg}} - T_0) d\Omega, \quad (21b)$$

$$\mathbf{F}_b = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{F} d\Omega, \quad (21c)$$

$$\mathbf{F}_t = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T T d\Gamma. \quad (21d)$$

上述方程中的矢量 $\boldsymbol{\delta}_s$ 包含单元节点未知的面内位移, \mathbf{K}_s 为单元刚度矩阵, \mathbf{B}_s 为应变-位移插值矩阵,由文献[8]给出, \mathbf{F}_0 为热荷载矢量, \mathbf{F}_b 为体力荷载矢量, \mathbf{F}_t 为表面牵引荷载矢量.

1.3.3 计算过程

计算过程的流程见图2. 首先假设初始节点的速度分量、压力和温度,由方程(17a)~(17b)得到中间节点的速度分量,由方程(17c)得到最新的节点压力 p^{n+1} ,由方程(17d)和(17e)分别得到新节点的速度分量和温度;然后,如像最新的温度、压力和体力固体边界条件那样,分别由方程(20)和方程(3),确定面内位移和应力分量.反复持续以上过程,直到满足收

敛准则。需注意的是,由于速度分量、压力和温度方程是分开求解的,因此这种分离的解法有助于减少计算存储器的占用。

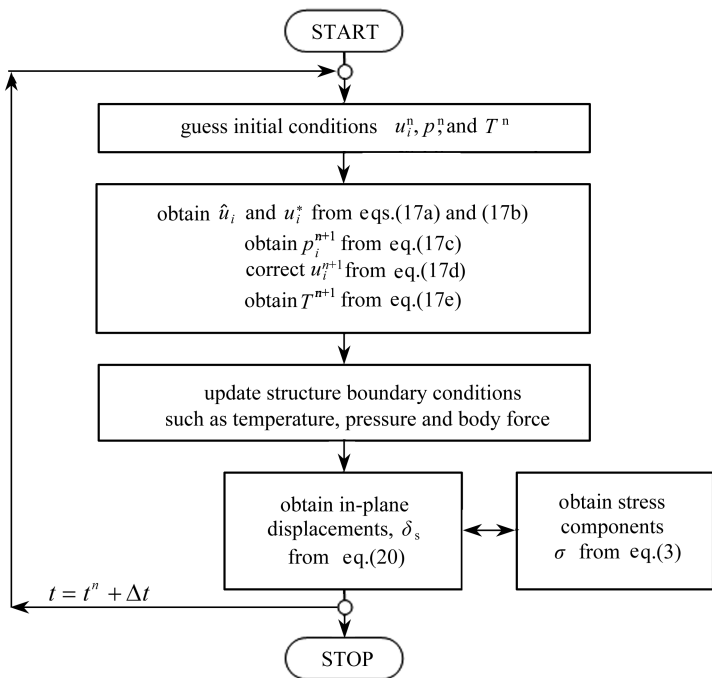


图2 计算过程的流程图

Fig. 2 Schematic diagram of the computational procedure

2 示 例

本文用4个例子,给出了流(体)-热-结构综合分析方法性能的评价。前3个例子:逆流式换热器、流过矩形块体时的强迫对流致冷和方形腔内的自然对流,评估固体-流体相互作用问题分析的有限元公式。第4个例子:装有散热片管道内的自由对流,用来证明分析更加复杂区域时公式的效率。

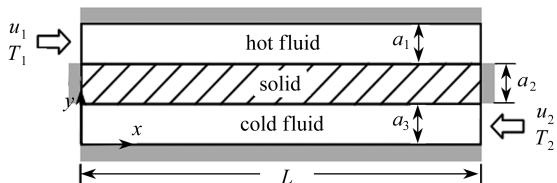


图3 逆流式换热器示意图

Fig. 3 A counter flow heat exchanger

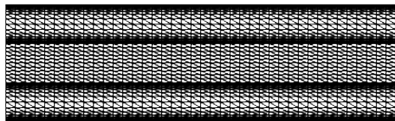
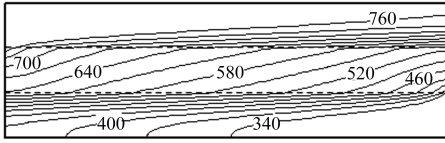
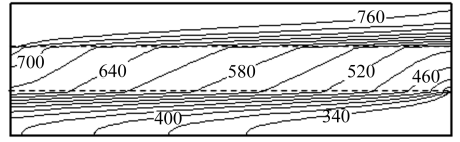
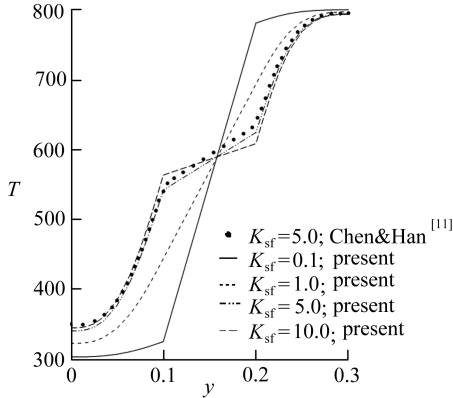


图4 逆流式换热器的有限元模型

Fig. 4 Finite element model for the counter flow heat exchanger

2.1 逆流式换热器

第一个评估有限元公式并进一步验证计算程序的例子是逆流式换热器。图3给出了换热器的结构示意图,由2个宽度分别为 a_1 和 a_3 平行的流体通道,被一个厚度为 a_2 的固体平板所分隔。假设流体通道的外墙是绝热的。假设热流和冷流的入口速度和温度分布是均匀的,且属性相同。计算时采用的参数如下:几何尺寸 $a_1 = a_2 = a_3 = 0.1$, $L = 1.0$, 固体-液体的热扩散

(a) $K_{sf} = 5$ (b) $K_{sf} = 10$ 图5 当 $K_{sf} = 5$ 和 10 时, 逆流式换热器预期的等温线图形Fig. 5 Predicted temperature contours of the counter flow heat exchanger for $K_{sf} = 5$ and 10图6 当 $K_{sf} = 0.1, 1, 5, 10$ 时, $x = L/2$ 处逆流式换热器中的温度分布, 并与 Chen 和 Han 的有限体积法结果 ($K_{sf} = 5$) 相比较Fig. 6 Temperature distributions at $x = L/2$ for $K_{sf} = 0.1, 1, 5,$ and 10 of a counter flow heat exchanger compared with the finite volume results from Chen and Han ($K_{sf} = 5$)

系数之比 $\alpha_{sf} = 1$; 上通道中的流体参数: $u_1 = 0.2$, 温度 $T_1 = 800$, Reynolds 数 $Re = 133.33$ 和 Prandtl 数为 $Pr = 0.75$; 下通道中的流体参数: $u_2 = -0.1$, $T_2 = 300$, $Re = 66.67$ 和 $Pr = 0.75$. 图 4 给出了本文使用的有限元模型, 包含 1 763 个节点和 3 360 个三角形单元. 图 5 就固体-液体的传热系数之比 $K_{sf} = 5$ 和 10 时, 给出了整个区域中预期的等温线图形. 图 6 在 K_{sf} 取不同取值时, 给出了 $x = L/2$ 处预期的温度分布, 图 6 显示, 当 $K_{sf} = 5$ 时预期的温度分布, 与 Chen 和 Han^[11] 给出的有限体积法的结果吻合得很好.

通过流体-固体界面处固体温度和流体压力的计算, 来分析固体的变形及其热应力. 假设在平面应变条件下的热膨胀系数为 $6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, 零应力的参考温度为 300 K, Young 氏弹性模量为 $7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, Poisson 比为 0.3. 图 7 给出了有限元模型和边界条件, 包含 451 个节点和 800 个三角形单元.

图 8 和图 9 分别就 $K_{sf} = 1$ 和 10 时, 给出了固体平板的温度分布、von Mises 应力分布 (MPa) 和变形

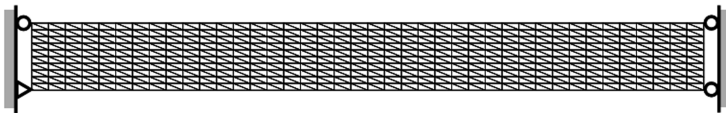


图7 固体平板热应力分析时的有限元模型和边界条件

Fig. 7 Finite element model and boundary conditions for thermal stress analysis on a solid plate

后节点的位移矢量图. 表 1 就 $K_{sf} = 1, 5$ 和 10 时, 给出了固体变形最大的垂直位移和最大的水平位移. 这时候固体的变形很小, 对场特性的影响可以忽略不计.

表1 逆流式换热器中固体平板最大的垂直位移和最大的水平位移

Table 1 Maximum vertical and horizontal displacement of the solid plate for the counter flow heat exchanger

maximum displacement $\delta_{\max} / \text{mm}$	solid-fluid conductivity ratio K_{sf}		
	1	5	10
vertical	0.405 6	0.408 2	0.411 2
horizontal	0.105 0	0.186 5	0.210 3

2.2 流过矩形块体时的强迫对流致冷

图 10 给出了流体在平行平板间流经 3 个受热固体块体问题, 作为第 2 个测试例题. 流体

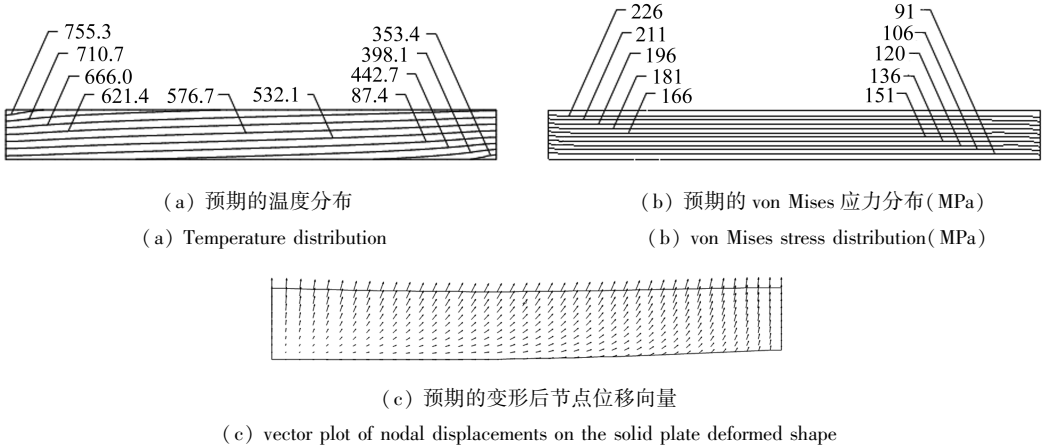


图 8 当 $K_{sf} = 1$ 时,预期的温度分布,预期的 von Mises 应力分布,以及预期的变形后节点位移向量图

Fig. 8 Predicted temperature, von Mises stress distribution and vector plot of nodal displacements on the solid plate deformed shape for $K_{sf} = 1$

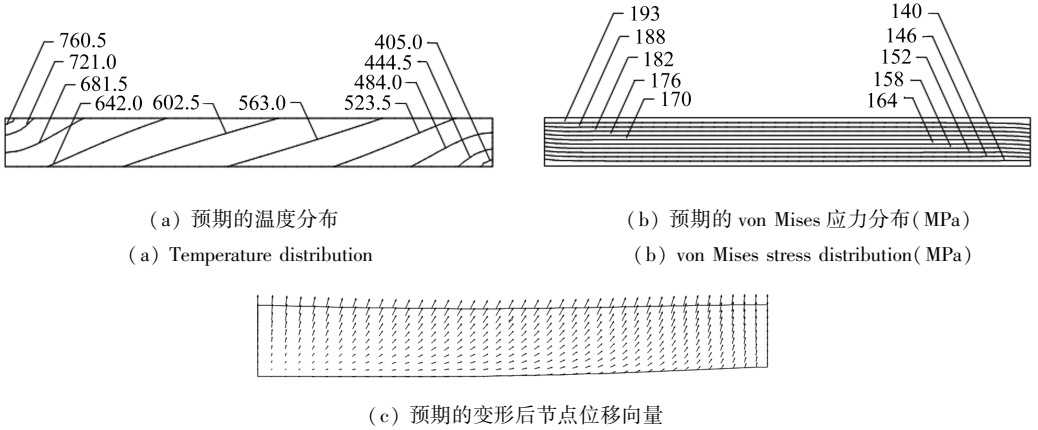


图 9 当 $K_{sf} = 10$ 时,预期的温度分布,预期的 von Mises 应力分布,以及预期的变形后节点位移向量图

Fig. 9 Predicted temperature, von Mises stress distribution and vector plot of nodal displacements on the solid plate deformed shape for $K_{sf} = 1$

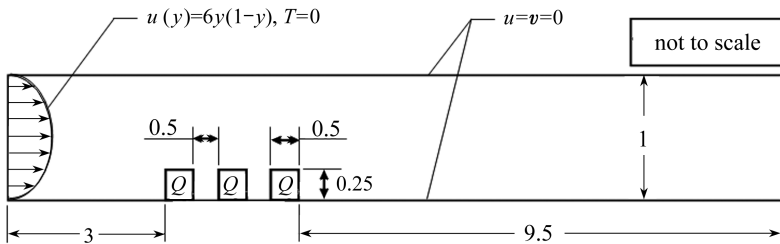


图 10 流过矩形块体时的强迫对流致冷问题示意图

Fig. 10 Problem statement of forced convection cooling across rectangular blocks

以充分发展的外形从计算区域的左侧进入,并从计算区域的右侧离开。假设固体块体内产热量

为常量 $\tilde{Q} = 8$. 图 11 给出了固体块体附近区域精密网格的有限元模型, 包含 5 653 个节点和 10 933 个三角形单元. 计算中用到的参数如下: 固体-流体的热扩散系数之比 $\alpha_{sf} = 10$, Prandtl 数 $Pr = 0.7$, 固体-流体的传热系数之比 $K_{sf} = 10$.

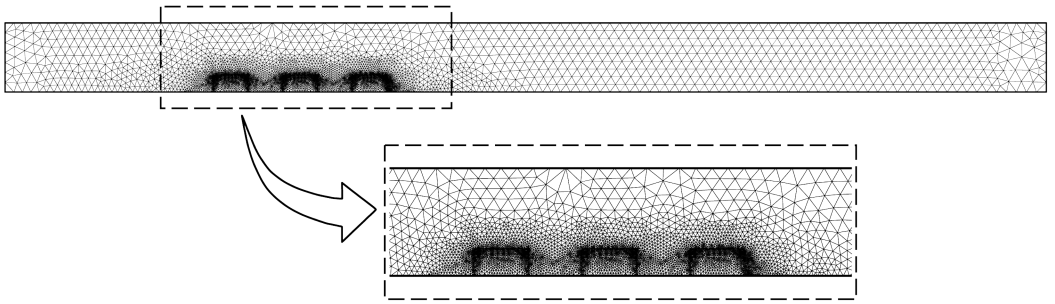


图 11 流过矩形块体时的强迫对流致冷问题的有限元模型

Fig. 11 Finite element model for the forced convection cooling across rectangular blocks



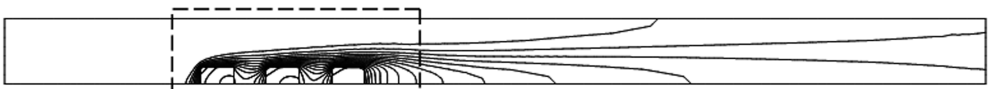
(a) 等压线

(a) Pressure contours



(b) 流线

(b) Streamline contours



(c) 等温线

(c) Temperature contours

$T_{\max} = 0.2813$

图 12 流过矩形块体时的强迫对流致冷等压线, 流线, 以及等温线(其中 $Re = 100$)

Fig. 12 Forced convection cooling across rectangular blocks pressure contours, streamline contours, and temperature contours for $Re = 100$

图 12 就 Reynolds 数 $Re = 100$ 时, 给出了预期的等压力线、流线和等温线图形. 图 13 就 Reynolds 数 $Re = 100, 500$ 和 1000 时, 给出了固体-流体介面处计算温度的分布, 与 Davalath 和

Bayazitoglu^[12] 给出的实验数据 ($Re = 100$ 和 $1\ 000$ 时) 吻合得很好。

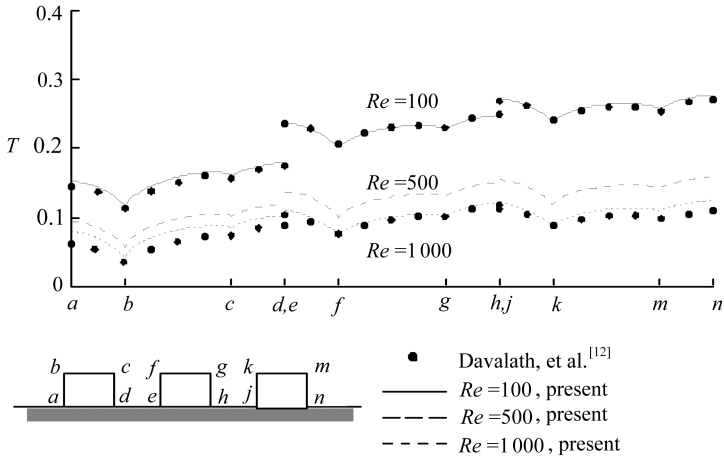


图 13 当 $K_{sf} = 10$ 和 Re 分别取 $100, 500$ 和 $1\ 000$ 时, 矩形块体的固体-流体界面处壁面温度分布的比较

Fig. 13 Comparison of the wall temperature distributions along the solid-fluid interface of the rectangular blocks for $Re = 100, 500$ and $1\ 000$, all at $K_{sf} = 10$

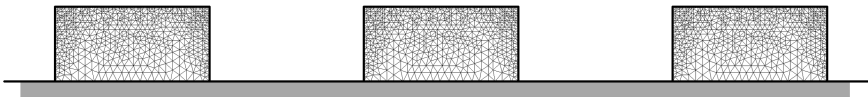


图 14 流过矩形块体时的强迫对流致冷的有限元模型和边界条件

Fig. 14 Finite element model and boundary conditions for the forced convection cooling across rectangular blocks

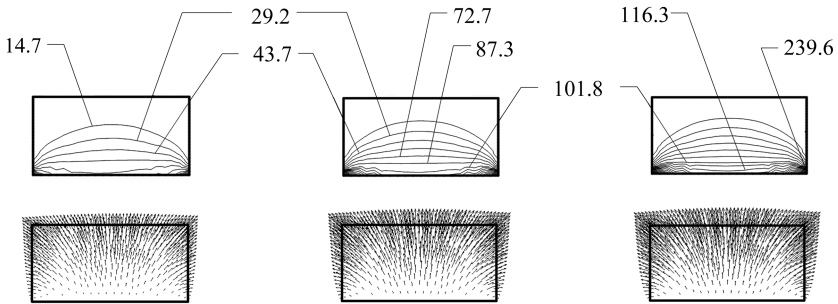


图 15 当 $Re = 100$ 时, 固体块体的等 von Mises 应力图和节点的位移矢量图

Fig. 15 von Mises stress contours and nodal displacement vectors plots for $Re = 100$

表 2 散热个体块体最大的 von Mises 应力和最大的位移

Table 2 Maximum von Mises stresses and displacements of the cooling fins

Re	maximum von Mises stress $\sigma_{\max \text{ Mises}} / \text{kPa}$	maximum displacement $\delta_{\max} / \text{mm}$
100	239.6	5.65×10^{-4}
500	134.8	3.18×10^{-4}
1 000	104.6	2.47×10^{-4}

将所计算散热块体中的温度分布, 以及固体块体表面的压力分布, 作为分析 3 个固体块体变形和热应力分析时的边界条件. 假设平面应变条件下: 热膨胀系数为 $6 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, 零应力的参考温度为 0°C , Young 氏弹性模量为 $7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, Poisson 比为 0.3. 图 14 给出了 3 个固体块

体的有限元模型和边界条件,包含 2 073 个节点和 3 780 个三角形单元。

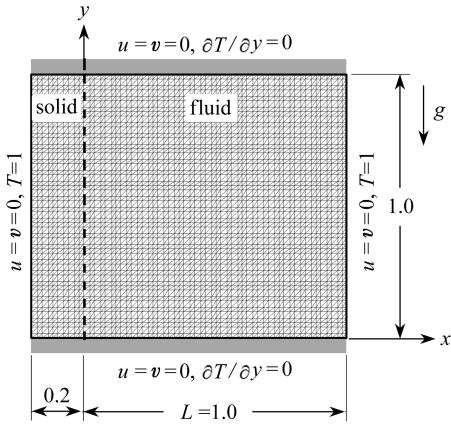


图 16 方形腔内有引导墙时的自然对流问题示意图

Fig. 16 Problem statement and finite element model of the natural convection in a square cavity with a conducting wall

图 15 给出了当 $Re = 100$ 时, 计算出等 von Mises 应力图和节点的位移矢量图(极大地夸张了)。表 2 给出了 $Re = 100, 500$ 和 $1\ 000$ 时, 散热固体块体最大的 von Mises 应力和最大的变形。这些固体块体深入流场, 但它们的变形很小, 对流场特性的影响无关紧要。

2.3 方形腔内有引导墙时的自然对流

为进一步评估流(体)-热-结构综合分析法的效率, 选择图 16 所示方形腔内有引导墙时的自然对流问题。方形腔内流体沿左侧受到温度较高的固体壁面加热, 沿右侧保持温度为 0, 其他边界均为绝热。图 16 还给出了固体壁面和流体区的有限元模型, 包含 3 111 个节点和 6 000 个三角形单元。

图 17 给出了流体和固体区域中预期的流线和等温线图形, 其中固体-流体的传热系数之比 $K_{sf} = 10$, Grashof 数 $Gr = 10^5$, Prandtl 数 $Pr = 0.71$ 和固体-液体

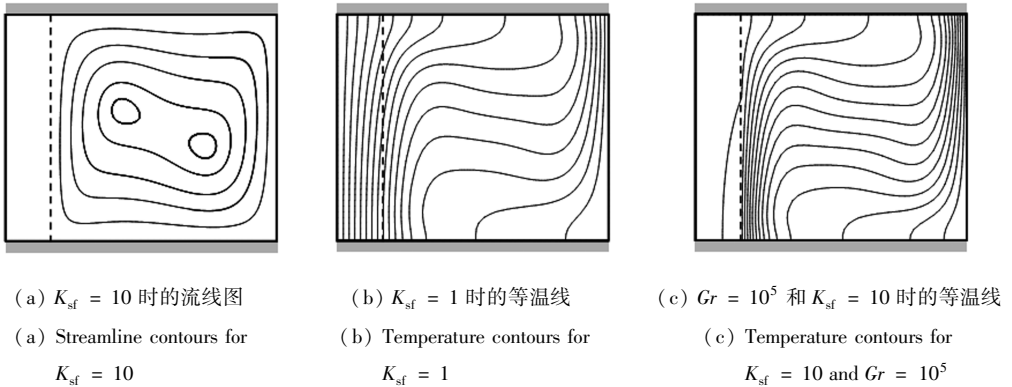


图 17 流体和固体区域中的流线和等温线图

Fig. 17 Predicted streamline and temperature contours in both the fluid and solid regions

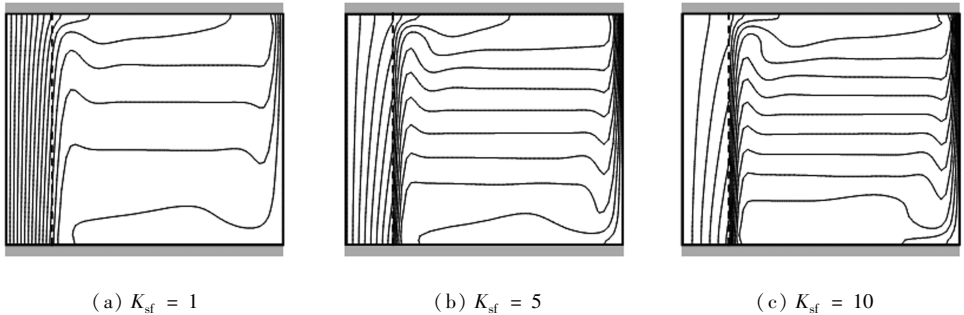


图 18 当 $Gr = 10^7$ 和 K_{sf} 分别取 1, 5 和 10 时的等温线

Fig. 18 Temperature contours for $Gr = 10^7$ at $K_{sf} = 1, 5$ and 10 , respectively

热扩散系数之比 $\alpha_{sf} = K_{sf}$ 。图 18 就 Grashof 数为 10^7 时,计算出固体壁面和流体区的等温线图形。表 3 对介面处预期的平均 Nusselt 数 $\overline{Nu}_{x=0}$, 与 Hribersek 等^[13] 的边界-区域积分法的结果,以及 Wansophark 等^[14] 的流线逆风有限元法的结果,列表进行比较。从表 3 可以看出,对所有的温度和热通量,平均 Nusselt 数都吻合得很好。

表 3 平均 Nusselt 数的变化

Table 3 Variation of the overall Nusselt numbers

Gr	average Nusselt number along interface (% difference from ref. [13])			
	conductivity ratio K_{sf}	1	5	10
10^3	Hriberšek, et al. [13]	0.87	1.02	1.04
10^3	Wansophark, et al. [14]	0.85 (2.29%)	1.03 (0.98%)	1.04 (0.0%)
10^3	present	0.87 (0.0%)	1.02 (0.0%)	1.04 (0.0%)
10^4	Hriberšek, et al. [13]	1.35	1.83	1.92
10^4	present	1.35 (0.0%)	1.83 (0.0%)	1.91 (0.52%)
10^5	Hriberšek, et al. [13]	2.08	3.42	3.72
10^5	Wansophark, et al. [14]	2.04 (1.92%)	3.30 (3.51%)	3.60 (3.22%)
10^5	present	2.08 (0.0%)	3.40 (0.58%)	3.70 (0.54%)
10^6	Hriberšek, et al. [13]	2.87	5.88	6.78
10^6	present	2.83 (1.39%)	5.80 (1.36%)	6.69 (1.33%)
10^7	Hriberšek, et al. [13]	3.53	9.07	11.25
10^7	present	3.45 (2.27%)	8.73 (3.75%)	10.88 (3.29%)

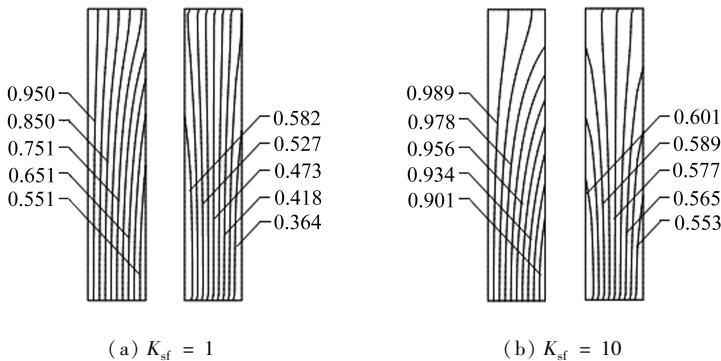
图 19 当 $Gr = 10^5$ 和 $K_{sf} = 1$ 和 10 时的等温线(左侧)和等 von Mises 应力线(右侧)Fig. 19 Predicted temperature (left) and von Mises stress (right) distribution for $K_{sf} = 1$ and 10 at $Gr = 10^5$

表 4 在有引导墙的方腔内,作自然对流时固体壁面的最大水平位移

Table 4 Horizontal maximum displacement of the solid wall for the natural convection in a square cavity with a conducting wall

Gr	horizontal maximum displacement $\delta_{\max H}$ /mm		
	$K_{sf} = 1$	$K_{sf} = 5$	$K_{sf} = 10$
10^3	2.06×10^{-3}	2.19×10^{-3}	2.21×10^{-3}
10^5	1.88×10^{-3}	2.14×10^{-3}	2.18×10^{-3}
10^7	1.51×10^{-3}	1.90×10^{-3}	2.03×10^{-3}

用计算所得的固体温度和固体壁面处的压力分布,求解固体的变形和热应力.假设平面

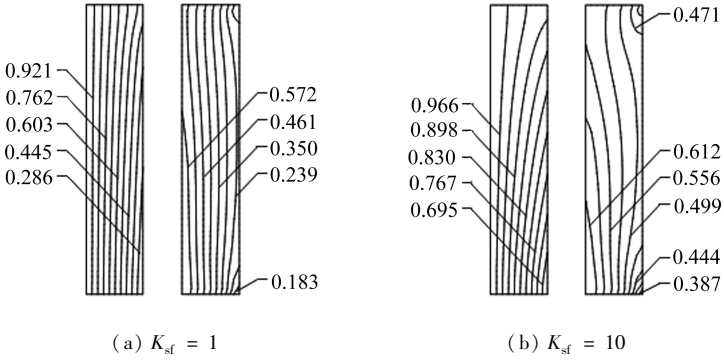


图 20 当 $Gr = 10^7$ 和 $K_{sf} = 1$ 和 10 时的等温线 (左侧) 和等 von Mises 应力线 (右侧)

Fig. 20 Predicted temperature (left) and von Mises stress (right) distribution for $K_{sf} = 1$ and 10 at $Gr = 10^7$

应变条件下: 热膨胀系数为 $6 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, 零应力时的参考温度为 0°C , Young 氏弹性模量为 $7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, Poisson 比为 0.3. 有限元模型包含 561 个节点和 1 000 个三角形单元. 图 19 和 20 中的 Gr 分别取 10^5 和 10^7 时, 给出了 $K_{sf} = 1$ 和 10 时的等温线 (左侧) 和等 von Mises 应力线 (右侧) 图形. 表 4 对不同 Grashof 数和 K_{sf} 值, 给出了固体壁面最大的水平位移.

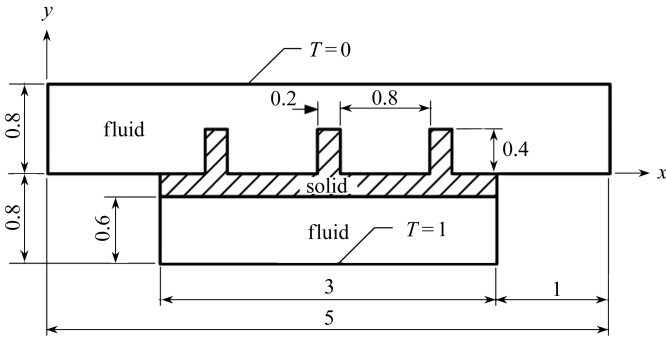


图 21 装有散热片管道的自由对流问题

Fig. 21 Problem statement of free convection in channel with cooling fins

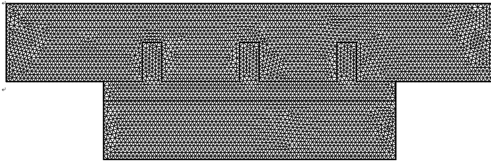


图 22 装有散热片管道自由对流问题的有限元模型

Fig. 22 Finite element model for free convection in channel with cooling fins

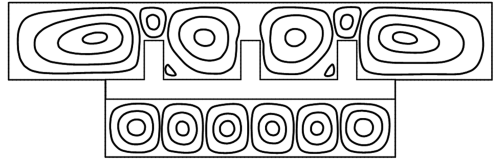


图 23 当 $K_{sf} = 10$ 时, 装有散热片管道自由对流时的流线图

Fig. 23 Streamline contours for free convection in channel with cooling fins at $K_{sf} = 10$

2.4 装有散热片管道的自由对流

图 21 给出了最后一个评估流 (体)-热-结构综合分析法性能的例子: 装有散热片管道的自由对流问题. 装有散热片管道的流体, 将底部 ($y = -0.8$) 较高的温度, 传向维持零温度的顶部 ($y = 0.8$), 其它均为绝热边界. 图 22 给出了固体和流体区域的综合有限元模型, 包含 4 742 个

节点和 9 152 个三角形单元, 计算中采用的参数如下: 固体-流体的热扩散系数之比 $\alpha_{sf} = K_{sf}$, Prandtl 数 $Pr = 0.71$, 流体的热膨胀系数 $\beta_f = 100$, 固体-液体传热系数之比 K_{sf} 取 1, 10 和 100. 图 23 给出了 $K_{sf} = 10$ 时, 预期稳态解所呈现的流线图.

图 24 给出了固体-流体传热系数之比取不同值时的等温线图形. 图 25(a) ~ 25(c) 分别给出了固体-液体传热系数之比 K_{sf} 取 1, 10 和 100 时, 沿散热片表面预期温度随时间的分布.

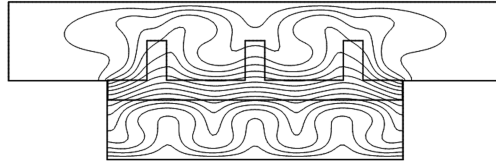
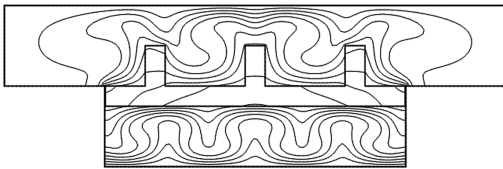
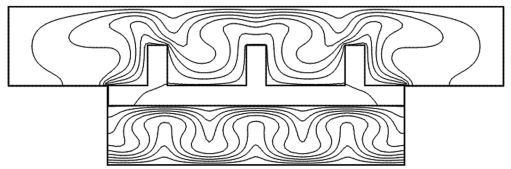
(a) $K_{sf} = 1$ (b) $K_{sf} = 10$ (c) $K_{sf} = 100$

图 24 当 $K_{sf} = 1, 10$ 和 100 时, 装有散热片管道自由对流时的等温线图形

Fig. 24 Temperature contours for free convection in channel with cooling fins at $K_{sf} = 1, 10$ and 100

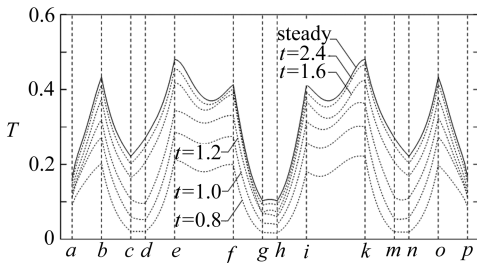
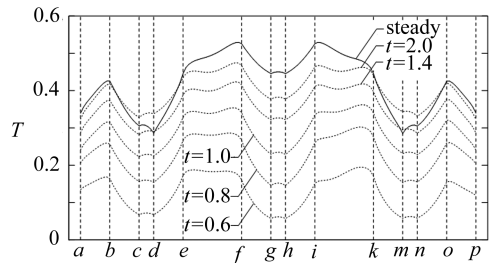
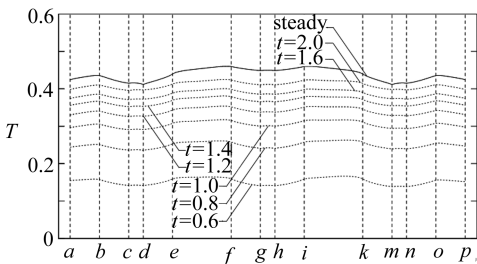
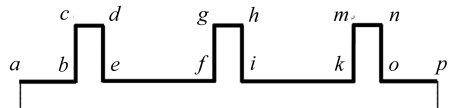
(a) $K_{sf} = 1$ (b) $K_{sf} = 10$ (c) $K_{sf} = 100$ 

图 25 当 $K_{sf} = 1, 10$ 和 100 时, 沿散热片表面的壁面温度分布随时间变化的比较

Fig. 25 Comparison of the wall temperature distribution along the fins surface that varies in times for $K_{sf} = 1, 10$ and 100

将计算所得散热片的温度分布和沿散热片表面的压力分布, 用来分析散热片的热应力. 假

设平面应变条件下:热膨胀系数为 $6 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, 零应力的参考温度为 30°C , Young 氏弹性模量为 $7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, Poisson 比为 0.3. 图 26 给出了综合有限元模型和结构的边界条件, 包含 726 个节点和 1 230 个三角形单元. 图 27 和图 28 分别就 K_{sf} 取 10 和 100 时, 计算出的等温线和放大处理后的 von Mises 应力图形.

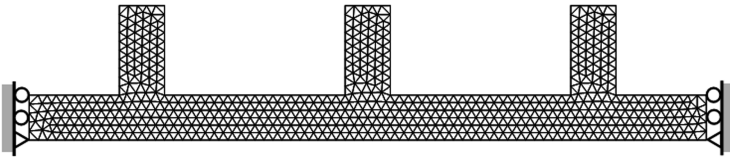
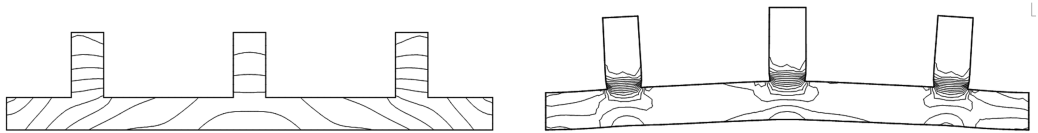


图 26 散热片热应力分析的有限元模型及其边界条件

Fig. 26 Finite element model and boundary condition for thermal stress analysis on cooling fins



(a) 预期的等温线

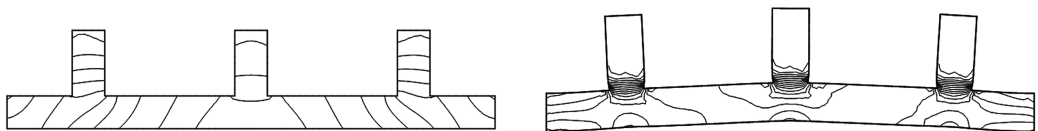
(b) 变形放大 50 000 倍后的 von Mises 应力

(a) Temperature contours

(b) von Mises stress on the 50 000 times deformation shape

图 27 当 $K_{sf} = 10$ 时, 预期的等温线和变形放大 50 000 倍后的 von Mises 应力

Fig. 27 Predicted temperature and von Mises stress on the 50 000 times deformation shape on cooling fins at $K_{sf} = 10$



(a) 预期的等温线

(b) 变形放大 50 000 倍后的 von Mises 应力

(a) Temperature contours

(b) von Mises stress on the 50 000 times deformation shape

图 28 当 $K_{sf} = 100$ 时, 预期的等温线和变形放大 50 000 倍后的 von Mises 应力

Fig. 28 Predicted temperature and von Mises stress on the 50 000 times deformation shape on cooling fins at $K_{sf} = 100$

表 5 给出了当 $K_{sf} = 1, 5, 10$ 和 100 时, 该模型最大的 von Mises 应力和最大的位移. 图 27 和图 28 清楚地显示出散热片的变形: 散热片温度的升高引起的热应力, 诱发散热片的变形. 散热片温度的改变, 是由于散热片上下相邻流体温度的不同所造成. 该示例展示了, 使用单一连续网格的有限元法, 分析流(体)-热-结构耦合特性的优越性.

表 5 散热片最大的 von Mises 应力和最大的位移的变化

Table 5 Variation of the maximum von Mises stress and the maximum displacement on cooling fins

K_{sf}	maximum von Mises stress $\sigma_{\max \text{ Mises}} / \text{kPa}$	maximum displacement $\delta_{\max} / \text{mm}$
1	278.5	1.895×10^{-3}
5	242.6	2.083×10^{-3}
10	240.6	3.310×10^{-3}
100	230.8	3.142×10^{-3}

3 结 论

本文给出流(体)-热-结构综合的有限元法,分析流体的流动与固体之间的耦合特性.应用四段式有限元法和流线逆风 Petrov-Galerkin 法,分析流动现象的同时,应用 Galerkin 有限元法,分析固体的变形和应力.对流体和固体区域采用单一的有限元网格模型,流-固介面离散化一致.在分析耦合问题时,相同的界面离散化,便于流体和固体之间的数据交换.

应用流线逆风 Petrov-Galerkin 法求解流体的 Navier-Stokes 方程,是为了在求解过程中,抑制可能发生的非物理时空的振荡.详细地推导并给出了所有的有限元方程.本文还给出了数个例子,来评估流(体)-热-结构综合有限元法的性能.这些例子充分表明了流(体)-热-结构综合有限元法的优点,可以在建立模型的同时,求解流体和固体的行为,还可以直接确定流体-固体介面处的温度.

致谢 作者衷心感谢国立金属和材料技术中心、泰国研究基金、高等教育委员会和朱拉隆功大学对该研究项目的支持.

参考文献(References):

- [1] Misra D, Sarkar A. Finite element analysis of conjugate natural convection in a square enclosure with a conducting vertical wall[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, **141**(3/4): 205-219.
- [2] Malatip A, Wansophark N, Dechaumphai P. Combined streamline upwind Petrov Galerkin method and segregated finite element algorithm for conjugated heat transfer problems[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2006, **20**(10): 1741-1752.
- [3] Malatip A, Wansophark N, Dechaumphai P. A second-order time-accurate finite element method for analysis of conjugate heat transfer between solid and unsteady viscous flow[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2009, **23**(3): 775-789.
- [4] Al-Amiri A, Khanafer K, Pop I. Steady-state conjugate natural convection in a fluid-saturated porous cavity[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, **51**(17/18): 4260-4275.
- [5] Schäfer M, Teschauer I. Numerical simulation of coupled fluid-solid problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **190**(28): 3645-3667.
- [6] Brooks A N, Hughes T J R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1982, **32**(1/3): 199-259.
- [7] Zienkiewicz O C, Taylor R L, Nithiarasy P. *The Finite Element Method for Fluid Dynamics* [M]. 6th ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [8] Dechaumphai P. *Finite Element Method; Fundamentals and Applications* [M]. Oxford: Alpha Science International, 2010.
- [9] Choi H G, Choi H, Yoo J Y. A fractional four-step finite element formulation of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations using SUPG and linear equal-order element methods [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, **143**(3/4): 333-348.
- [10] Kim J, Moin P. Application of a fractional step method to incompressible Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1985, **59**(2): 308-323.
- [11] Chen X, Han P. A note on the solution of conjugate heat transfer problems using SIMPLE-like

- algorithms[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2000, **21**(4): 463-467.
- [12] Devalath J, Bayazitoglu Y. Forced convection cooling across rectangular blocks[J]. *Journal of Heat Transfer*, 1987, **109**(2): 321-328.
- [13] Hriberšek M, Kuhn G. Conjugate heat transfer by boundary-domain integral method[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2000, **24**(4): 297-305.
- [14] Wansophark N, Malatip A, Dechaumphai P. Streamline upwind finite element method for conjugate heat transfer problems[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, **21**(5): 436-443.

Fractional Four-Step Finite Element Method for Analysis of Thermally Coupled Fluid-Solid Interaction Problems

A. Malatip¹, N. Wansophark², P. Dechaumphai²

- (1. *Computer-Aided Research University, National Metal and Materials Technology Center, Pathumthani 12120, Thailand;*
2. *Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University, Patumwan, Bangkok 10330, Thailand*)

Abstract: An integrated fluid-thermal-structural analysis approach, where the heat conduction in a solid was coupled with the heat convection in viscous flow of the fluid resulting in the thermal stress in the solid, was presented. The fractional four-step finite element method and streamline upwind Petrov-Galerkin method were used for the analysis of viscous thermal flow in the fluid whereas the analyses of heat transfer and thermal stress in solid were performed using the Galerkin method. The second-order semi-implicit Crank-Nicolson scheme was applied for time integration and the resulting nonlinear equations were linearized to improve the computational efficiency. The integrated analysis method employ the three-node triangular element with equal-order interpolation functions for all variables of the fluid velocity components, pressure, temperature and the solid displacements in order to simplify the overall finite element formulation. The main advantage of the presented method was to consistently couple heat transfer along the fluid-solid interface. Results from several tested problems illustrated the effectiveness of the presented finite element method that can provide insight into the integrated fluid-thermal-structural interaction phenomena.

Key words: fluid-solid interaction; finite element method; fractional four steps