

微极液体在两个多孔圆盘间的 MHD 流动及其热传导*

M·阿斯拉夫¹, A·R·威格尔夫^{1,2}

(1. 巴哈丁扎卡里亚大学 应用数学与纯数学高级研究中心, 木尔坦 60000, 巴基斯坦;
2. 斯德哥尔摩大学 数学系, 斯德哥尔摩 SE-10691, 瑞典)

摘要: 两个平行的无限大多孔圆盘, 圆盘表面有均匀注入时, 数值地研究圆盘间不可压缩导电微极流体, 在横向外加磁场作用下的轴对称稳定层流. 运用 von Kármán 的相似变换, 将非线性运动的控制方程转化为无量纲形式. 使用基于有限差分格式的算法, 在相应的边界条件下, 求解简化后耦合的常微分方程组. 讨论 Reynolds 数、磁场参数、微极参数和 Prandtl 数, 对流动速度和温度分布的影响. 在特殊情况下, 所得结果与已有文献的工作有着很好的一致性. 研究表明, 圆盘表面的传热率随着 Reynolds 数、磁场参数和 Prandtl 数的增加而增加; 剪切应力随着注入的增加而减少, 但它随着外部磁场的加强而增加. 和 Newton 流体相比较, 微极流体的剪切应力因素较弱, 有利于聚合体加工过程中流动和温度的控制.

关键词: MHD 流动; 多孔圆盘; 微极液体; 传热; 微转动

中图分类号: O361.3; O368 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.01.005

引 言

鉴于在许多工艺和工程领域中的应用, 平行圆盘间流动的研究具有十分重要的意义. 这类流动的应用领域有: 水动力学机械和仪器、旋转晶片的半导体制造、磁存储驱动器(如磁盘驱动器)、燃气涡轮发动机和其他转动机械、计算机存储驱动器、传热和传质、粘度的测定、润滑作用、晶体的生长过程, 生物力学、地热学、地球物理学、海洋学、止推轴承的设计, 以及径向扩散器等等. 磁流体动力学(MHD), 在可控热核反应的等离子体磁约束中具有重要作用, MHD 原理在 MHD 发电、光-离子束的惯性约束和航天离子推进器领域也有着重要的应用.

Elcrat^[1]就固定多孔圆盘间有任意均匀吸出或注入时, 对无转动流体流动的存在性和唯一性定理给出了证明. Rasmussen^[2]对 2 个平行多孔同轴圆盘间对称稳定的粘性流动进行了数值研究, 他利用相似变换, 将运动的 Navier-Stokes 控制方程, 简化为无量纲形式的常微分方程. Gaur 等^[3]讨论了 2 个不同渗透率的平行多孔圆盘间层流的传热和传质问题. Rudraiah 等^[4]运用摄动法, 具有较大 Reynolds 数吸出时, 对 2 个平行多孔圆盘间的 MHD 层流问题进行了分析. Phan Thien 等^[5]用正规的最优化法, 求解简化后的非线性代数方程组, 研究 2 个平行圆盘

* 收稿日期: 2011-03-16; 修订日期: 2011-09-20

作者简介: Muhammad Ashraf(联系人. Tel: +92-61-9210115; E-mail: mashraf_mul@yahoo.com).

本文原文为英文, 海治译, 张禄坤校.

间的稳定流动问题。Attia^[6]在计及离子滑移和外部磁场作用时,对无限大非传导多孔转动圆盘,研究可导电体的稳定流动和传热问题,流体运动上叠加了多孔圆盘表面均匀的注入/吸出作用,运用有限差分离散化法,对自相似控制方程进行数值求解。Fang^[7]运用扩展的 von Kármán 相似变换法,不计体力时,流过可伸展圆盘的不可压缩稳定流动的精确解进行了研究,讨论了圆盘伸展和转动的影响。Ibrahim^[8]研究了 2 个平行转动圆盘间粘性不可压缩流体的不稳定流动,运用相似变换法,将动量和能量方程转化为一组常微分方程,发现 2 个圆盘的转动,对流体温度和传热过程的影响很小,但是上圆盘快速的法向运动,对流体温度和传热进程有着决定性的影响。Frusteri 等^[9]在滑移边界条件下,讨论流体的可变特性(如密度和粘性),研究粘性导电流体流过多孔转动圆盘时的 MHD 稳定层流,运用 von Kármán 相似变换法,将偏微分的控制方程变换为常微分方程组,并运用打靶法对方程组进行数值求解。Ersoy^[10]就线性粘性流体,在 2 个绕不同竖轴转动圆盘间的流动,进行了求近似解的研究,研究表明速度分量依赖于圆盘的位置、Reynolds 数、离心率,以及角速度之比。

以上的研究均仅局限于 Newton 流体,但在工艺加工和工程应用中多数流体表现出非 Newton 流体的特征。经典的 Newton 流体模型不足以描述某些现代的工程结构,现代工程结构内部的材料常采用,诸如多晶体材料、含添加剂的液体,以及含有纤维或者粗粒结构的材料等。Eringen^[11-12]建立起的微极流体模型,是解释这类材料变形最好的理论之一。由该理论给出的非 Newton 流体数学模型,可以用来研究特种润滑剂、聚合材料悬浮液、泥浆与生物流体、动物的血液、胶体溶液和具有刚性分子液晶体的特性。Airman 等在文献[13]中对微极流体理论及其应用给出了详细的评论。Guram 等^[14]采用基于有限差分近似的算法,对不可压缩微极液体在一个转动一个静止圆盘间的稳定流动进行数值解。Guram 等^[15]对伴有注入/吸出的转动圆盘,不可压缩微极液体的稳定层流进行了数值求解。Takhar 等^[16]对不可压缩的微极流体,给出了 2 个多孔圆盘间的稳定流动和传热的有限元解。Wang 等^[17]同时考虑了热效应和空化效应,对微极流体润滑的径向轴承的非 Newton 特性进行了数值分析。他们发现:微极液体使得轴承的承载力和温度上升,但是摩擦因数和侧漏系数下降了。Sacheti 等^[18]在 2 个伴有注入/吸出的无限大平行多孔圆盘间,调查了非 Newton 流体的稳定层流和传热问题。Anwar Kamal 等^[19]给出了微极流体在 2 个多孔同轴圆盘间作稳定对称流动的数值解。为了讨论 Reynolds 数和微极结构对流动特性的影响,Ashraf 等^[20]对不可压缩微极流体,在一个可渗透一个不可渗透圆盘间,作二维的稳定层流进行了数值研究。Ashraf 等^[21]对不可压缩微极流体,在一个壁面渗透率不同的多孔管道中,作非对称稳定层流进行了数值研究。

本文在均匀磁场作用下,对不可压缩粘性导电微极流体,在 2 个无限大平行静止多孔圆盘间,作稳定流动和传热时的所有参数进行分析,迄今未见作者有所报道。运用一个以有限差分近似为基础的算法,对控制的动量、角动量和能量方程求数值解。

1 问题公式化

假设平面 $z = \pm a$ 处有 2 个静止的、半径无限大的多孔平行圆盘,考虑不可压缩导电微极流体,在 2 个圆盘间作稳定的轴对称层流,见图 1。

强度为 B_0 的均匀磁场横向作用于圆盘。假设横向的均匀静磁场 \mathbf{B} ,与 rz 平面中的速度场 \mathbf{V} 相垂直。与外加磁场相比较,感应磁场 \mathbf{b} 可以忽略不计。磁 Reynolds 数 Rm 为导电流体中传输的磁力线,与流体泄漏的磁力线之比,数值上等于流体的特征长度 L ,乘上特征速度 \mathbf{U} ,再除以磁扩散率 η_0 ,该值很小^[22]。当 Rm 较小时,磁场呈现出纯扩散状态。另外假设没有外加的极化电

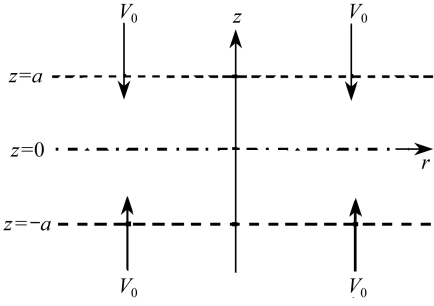


图1 圆盘的几何模型

Fig. 1 Geometr of the disks

压,即电场 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. 若流体为电绝缘体,则随着流体中电流的流动,会产生感应磁场,因此这里将流体看作导电体. 根据以上的假设,电磁力的线性表达式为 $-\sigma_e B_0^2 \mathbf{V}^{[23]}$.

根据 Eringen^[11-12],稳定的粘性不可压缩微极 MHD 层流的控制方程为

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{a} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\kappa}{a} \frac{\partial v_2}{\partial \eta} + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) - \sigma_e B_0^2 u, \quad (2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{a} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = -\frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \kappa \left(\frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{v_2}{r} \right) + (\mu + \kappa) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right), \quad (3)$$

$$\rho j \left(u \frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{w}{a} \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right) = \kappa \left(\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) - 2\kappa v_2 + \gamma \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \eta^2} \right), \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_m \mathbf{J}, \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{J} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (8)$$

其中, η 为相似变量, \mathbf{V} 为流体的速度矢量, (u, v, w) 和 (v_1, v_2, v_3) 分别为速度矢量和微转动矢量的分量, ρ 为液体密度, p 为压力, j 为微惯量, \mathbf{J} 为电流密度, μ_m 为磁渗透率, \mathbf{E} 为电场, 总磁场 \mathbf{B} 为 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$, 其中 \mathbf{b} 为感应磁场, σ_e 为流体的导电率, μ 为动粘度, κ 为流体的涡粘度. 进一步地, 从方程(5)和(6)得到 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. 这里速度矢量 \mathbf{V} 和微转动矢量 \mathbf{v} 均为未知量.

速度矢量和微转动矢量沿径向、横向和轴向的分量 (u, v, w) 和 (v_1, v_2, v_3) 可表示为

$$u = u(r, z), \quad v = 0, \quad w = w(r, z), \quad v_1 = 0, \quad v_2 = v_2(r, z), \quad v_3 = 0. \quad (9)$$

不考虑粘性扩散时的温度场方程可表示为

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{w}{a} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) - \kappa_0 \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0, \quad (10)$$

其中, $\eta = z/a$, T 为温度, c_p 为常压力下的比定压热容, κ_0 为液体的导热率.

速度场在两个多孔圆盘处的边界条件为

$$u(r, \pm 1) = 0, \quad w(r, \pm 1) = \mp V_0, \quad (11)$$

其中, V_0 为圆盘处注入速度常量.

根据文献[16], 对于微转动边界, 给出无旋转的边界条件:

$$(v_1, v_2, v_3) = (0, 0, 0), \quad \eta = \pm 1. \quad (12)$$

温度场的边界条件:

$$T = T_1, \quad \eta = -1; \quad T = T_2, \quad \eta = 1. \quad (13)$$

为了得到本问题的速度、微转动和温度场,需要在边界条件(11)~(13)下,求解方程(1)~(4)和方程(10).为此,类似于 von Kármán^[24]、Elkouch^[25]、Takhar 等^[16]和 Ashraf 等^[20],给出如下相似变换:

$$\Psi(r, \eta) = \frac{V_0 r^2}{2} f(\eta), \quad (14)$$

从而

$$u = \frac{1}{ra} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{V_0 r}{2a} f'(\eta), \quad (15)$$

$$w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -V_0 f(\eta), \quad (16)$$

$$v_2 = \frac{V_0 r}{2a^2} g(\eta), \quad (17)$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}. \quad (18)$$

方程(15)和方程(16)中的速度分量,满足连续性方程(1),代表一种可能的流体运动.将上述方程(15)~(18),代入控制方程(2)~(4),得到如下无量纲方程:

$$(1 + R)f'''' + Re(ff'''' - M^2 f'') - Rg'' = 0, \quad (19)$$

$$Cg'' - ARe\left(\frac{1}{2}f'g - fg'\right) + R(f'' - 2g) = 0, \quad (20)$$

$$\theta'' + RePrf\theta' = 0, \quad (21)$$

其中

$$Re = \frac{\rho V_0 a}{\mu}, \quad M = \sqrt{\frac{\sigma_e a B_0^2}{\rho V_0}}, \quad R = \frac{\kappa}{\mu}, \quad A = \frac{j}{a^2}, \quad C = \frac{\gamma}{\mu a^2}, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa_0}$$

分别为 Reynolds 数、磁场参数、涡粘度参数、微惯量密度参数、转动梯度粘度参数和 Prandtl 数.其中, R, A 和 C 为微极参数.对本文问题,讨论注入的情况(即 $Re < 0$).对方程(19)中的 η 积分:

$$(1 + R)f''' + Re\left(ff''' - \frac{f'^2}{2} - M^2 f'\right) - Rg' = B, \quad (22)$$

其中 B 为积分常数.

写出边界条件(11)~(13)的无量纲形式:

$$f(\pm 1) = \pm 1, \quad f'(\pm 1) = 0, \quad g(\pm 1) = 0, \quad \theta(-1) = 0, \quad \theta(1) = 1. \quad (23)$$

分别定义圆盘上的剪切应力和应力偶为

$$\tau_\omega = -(\mu + \kappa) \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\pm a} = -\mu(1 + R) \frac{rV_0}{2a^2} f''(\pm 1), \quad (24)$$

$$m_\omega = -\gamma \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=\pm a} = -\gamma \frac{rV_0}{2a^3} g'(\pm 1). \quad (25)$$

在边界条件(23)下,求解方程(20)~(22).值得注意的是,方程(20)~(22)可简化为, Newton 流体在 2 个多孔圆盘间作无微转动和无磁场作用时($R=0$ 和 $M=0$)的相应方程(参见文献[2,25]).进一步发现,这些方程和边界条件(23),与 Takhar 等^[16]得到的无外部磁场作用

($M = 0$) 时的方程相符合. 这些事实证明了本文有外部磁场作用时微极流体模型是可靠的.

2 数值解

简化后的常微分方程(20) ~ (22)是高度非线性的, 很难求得解析解. 本文使用有限差分法, 在相关边界条件(23)下, 对这些方程进行数值解. 通过代换 $q = f'$, 动量方程(20)的阶次, 可以下降 1 次. 我们把它们归结为如下方程的边值问题:

$$q = f' = \frac{df}{d\eta}, \quad (26)$$

$$(1 + R)q'' + Re\left(fq' - \frac{q^2}{2} - M^2q\right) - Rg' = B, \quad (27)$$

$$Cg'' - ARe\left(\frac{q}{2}g - fg'\right) + R(q' - 2g) = 0, \quad (28)$$

$$\theta'' + RePrf\theta' = 0, \quad (29)$$

相应的边界条件:

$$f(\pm 1) = \pm 1, \quad q(\pm 1) = 0, \quad g(\pm 1) = 0, \quad \theta(-1) = 0, \quad \theta(1) = 1. \quad (30)$$

为了得到上述边值问题的数值解, 以均匀步长 h 离散化区间 $[-1, 1]$. 应用 Gerald^[26] 的 Simpson 公式和 Milne^[27] 给出的积分方程(27). 在区间 $[-1, 1]$ 的典型网格点 $\eta = \eta_n$ 上, 应用中央差分近似, 离散化方程(27) ~ (29). 在边界条件(30)下, 应用逐次超松弛参数法(SOR), 迭代求解离散的方程组. 求解过程主要基于 Syed 等^[28] 给出的一个算法, 算法加速了迭代过程并改善了求解的精度.

如果 4 次连续迭代, 满足以下准则, 则迭代过程终止:

$$\begin{aligned} & \max(\|q^{(i+1)} - q^{(i)}\|_2, \|g^{(i+1)} - g^{(i)}\|_2, \\ & \|f^{(i+1)} - f^{(i)}\|_2, \|\theta^{(i+1)} - \theta^{(i)}\|_2) < E_{\text{TOL}}. \end{aligned} \quad (31)$$

其中 E_{TOL} 为预设的容许误差, 在 FORTRAN 90 程序中该值至少取 10^{-12} . 要得到精度更高的近似解, 可应用 Richardson 外插法, 采用 Deuffhard^[29] 的外插格式得到.

表 1 当 $Re = -20$, $M = 0.4$ 和 $Pr = 0.2$ 时, 3 种网格大小及其外推值下的无量纲温度 $\theta(\eta)$

Table 1 Dimensionless temperature $\theta(\eta)$ on three grid sizes and extrapolated values for $Re = -20$, $M = 0.4$ and $Pr = 0.2$

η	$\theta(\eta)$			
	$h = 0.02$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	extrapolated value
-1	0	0	0	0
-0.8	0.022 782	0.022 797	0.022 8	0.022 802
-0.6	0.071 236	0.071 263	0.071 271	0.071 273
-0.4	0.163 486	0.163 516	0.163 524	0.163 526
-0.2	0.311 034	0.311 046	0.311 049	0.311 051
0	0.500 039	0.500 018	0.500 014	0.500 013
0.2	0.689 034	0.688 986	0.688 975	0.688 971
0.4	0.836 561	0.836 506	0.836 493	0.836 489
0.6	0.928 789	0.928 748	0.928 738	0.928 735
0.8	0.977 227	0.977 208	0.977 203	0.977 201
1	1	1	1	1

3 结果及其讨论

本文的目的是对不可压缩粘性微极流体,在2个平行的多孔圆盘之间,作均匀磁场作用下的稳定层流及其热传导特性进行数值研究。本节将以图表的形式,对结果进行详细的数值分析、讨论并给出解释。为了更好地理解导电流体的微极结构和可渗透多孔圆盘,对流体流动和传热特性的影响,本文就 Reynolds 数 Re , 磁场参数 M , 微极参数 R 和 Prandtl 数 Pr 在一定范围内变化时,讨论两个圆盘处的剪切应力与应力偶,以及越过圆盘的速度场、温度场和微转动场。为了数值格式的稳定性,本文选取3种计算网格大小 $h = 0.02, 0.01$ 和 0.005 , 运用出色的 Richardson 外推网格,得到更高的精度。

表2 当 $M = 0, Pr = 0.1, R$ 和 Re 取不同数值时,剪切应力 $-f''(1)$ 数值结果的比较

Table 2 Comparison of numerical values of the shear stress $-f''(1)$

for $M = 0, Pr = 0.1$ and various values of R and Re

R	Re			
	-10		-5	
	present	reference [16]	present	reference [16]
5	2.264 02	2.263 92	2.382 72	2.382 59
10	2.146 91	2.146 73	2.217 13	2.216 95

表3 当 $M = 0, Pr = 0.1, R$ 和 Re 取不同数值时,应力偶 $g'(1)$ 数值结果的比较

Table 3 Comparison of numerical values of the couple stress $g'(1)$

for $M = 0, Pr = 0.1$ and various values of R and Re

R	Re			
	-10		-5	
	present	reference [16]	present	reference [16]
5	3.083 25	3.083 49	3.122 09	3.122 32
10	4.753 61	4.754 31	4.811 64	4.812 37

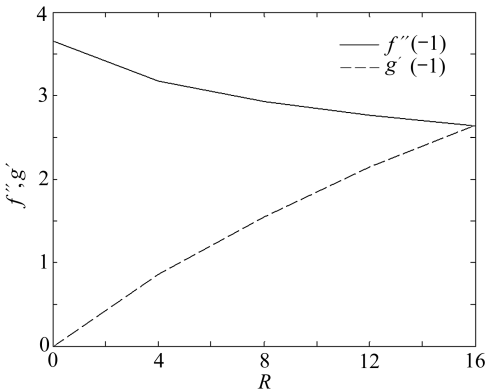


图2 当 $Re = -10, M = 1.5$ 和 $Pr = 0.2$ 时,下圆盘处剪切应力和应力偶随 R 的变化

Fig.2 Values of shear and couple stresses at the lower disk for $Re = -10, M = 1.5, Pr = 0.2$ and various values of R

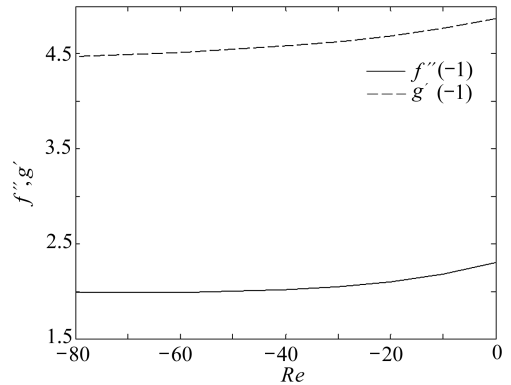


图3 当 $M = 0.4, Pr = 0.2$ 和 $R = 10$ 时,下圆盘处剪切应力和应力偶随 Re 的变化

Fig.3 Values of shear and couple stresses at the lower disk for $M = 0.4, Pr = 0.2, R = 10$ and various values of Re

表 1 在 3 种网格大小及其外推值下,给出了无量纲温度 $\theta(\eta)$ 数值结果的比较.卓越的比较结果,验证了我们的数值计算.表 2 和表 3 就无磁场作用时,给出了圆盘处的剪切应力和应力偶的数值结果,与 Takhar 等^[16]的结果进行比较,两者吻合得很好.

文献[15-16,30-32]中,微极参数 R 通常取任意值 0,4,8,12 和 16 时,讨论它们对流体特性的影响.值得注意的是,另外 2 个微极参数 A 和 C ,对速度和温度场的影响并不明显,如 Takhar 等^[16],Chang^[30]和 Lok 等^[31]的研究,可取固定值 $A = 1, C = 2$.

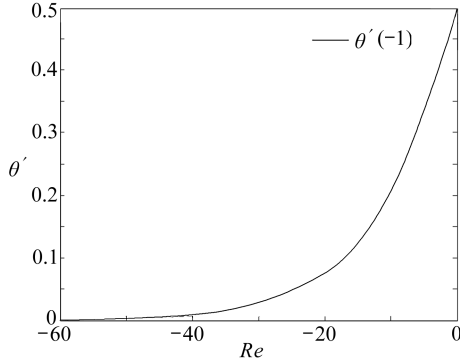


图 4 当 $M = 0.4, Pr = 0.2$ 和 $R = 10$ 时,下圆盘处传热率随 Re 的变化

Fig.4 Values of heat transfer rate at the lower disk for $M = 0.4, Pr = 0.2, R = 10$ and various values of Re

从图 2 可以看出,和 Newton 流体相比较,微极流体的剪切应力在减少,而应力偶在增加,这有助于聚合材料加工过程中对流动的控制.造成该现象的原因是,与 Newton 流体相比较,微极流体的动粘度和涡粘度,对流体运动的阻力更大.

现在研究 Reynolds 数 Re 对下圆盘处的剪切应力 $f''(-1)$,应力偶 $g'(-1)$ 和传热率 $\theta'(-1)$ 的影响.从图 3 和图 4 可以看出,随着注入速度的增强,圆盘处的剪切应力、应力偶和传热率在下降,当 $Re \rightarrow -\infty$ 时,圆盘处的传热率趋近于 0.

图 5(a) 和图 5(b) 给出了外部磁场变化对圆盘处剪切应力、应力偶和传热率的影响.当 Reynolds 数 Re 、微极参数 R 和 Prandtal 数 Pr 不变时,外加磁场导致剪切应力、应力偶和传热率的增加.

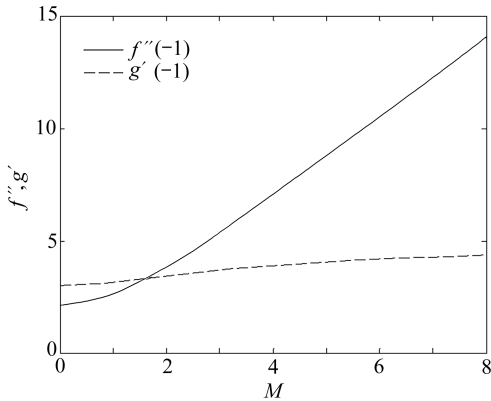


图 5(a) 当 $Re = -20, Pr = 0.2$ 和 $R = 5$ 时,下圆盘处剪切应力和应力偶随 M 的变化

Fig.5(a) Values of shear and couple stresses at the lower disk for $Re = -20, Pr = 0.2, R = 5$ and various values of M

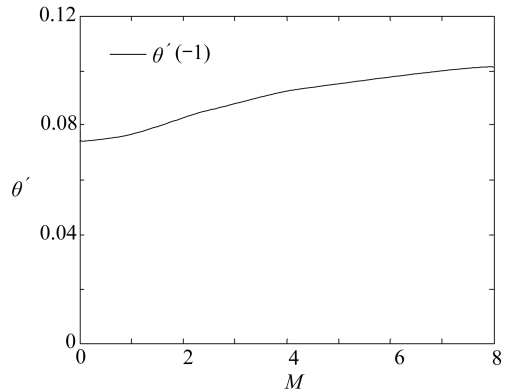


图 5(b) 当 $Re = -20, Pr = 0.2$ 和 $R = 5$ 时,下圆盘处传热率随 M 的变化

Fig.5(b) Values of heat transfer rate at the lower disk for $Re = -20, Pr = 0.2, R = 5$ and various values of M

从图 6 可以看出,随着 Prandtal 数 Pr 的增加,传热率在减少,但 Pr 的变化,对剪切应力和应力偶无影响.鉴于对称性,图 2 至图 6 仅给出下圆盘处的结果.

下面用图形给出越过圆盘后的速度、温度和微转动场.图 7 给出了 Reynolds 数 Re 对轴向速度的影响.一般情况下,轴向速度在上圆盘处取无量纲值 1,在下圆盘处取 -1 ,在中心平

面 $z = 0$ 处呈现凹形。图 7 给出的轴向速度分布图,有助于寻找由于圆盘处的注入出现粘性层的位置,粘性层位于 $f(\eta) = 0$ 的点处。在本文所讨论的 2 个多孔圆盘间对称流动问题中,粘性层位置与中心平面 $z = 0$ 一致,但在非对称流动中,粘性层位置将偏离中心平面 $z = 0$ (这种情况将另作详细讨论)。图 7 还可以看到,随着 Re 的值增加,上圆盘附近 f 值有轻微的增加,而下圆盘附近 f 值有轻微的下降,反映了注入速度的提高对轴向速度的影响,即注入速度促进了下圆盘附近的轴向速度,而阻碍了上圆盘附近的轴向速度。

图 8 就磁场参数 M 、微极参数 R 和 Prandtal 数 Pr 取一组数值时,给出了 Reynolds 数 Re 对径向速度的影响。随着圆盘注入速度的增强,流体被推向 2 个圆

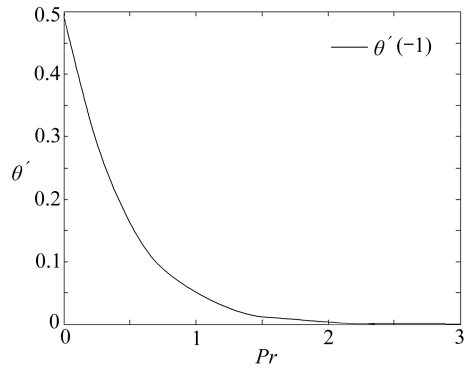


图 6 当 $Re = -50$, $M = 0.4$ 和 $R = 3$ 时,下圆盘处传热率随 Pr 的变化

Fig. 6 Values of heat transfer rate at the lower disk for $Re = -50$, $M = 0.4$, $R = 3$ and various values of Pr

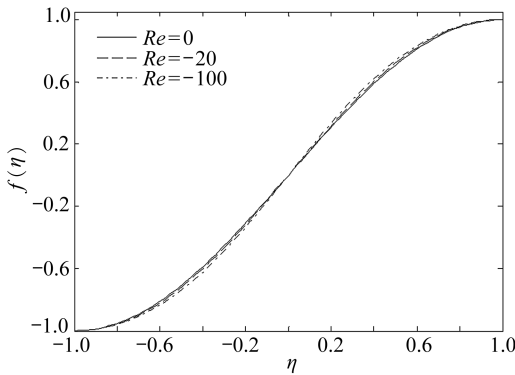


图 7 当 $M = 0.4$, $Pr = 0.2$ 和 $R = 10$, Re 取不同数值时,无量纲轴向速度 $f(\eta)$ 的变化

Fig. 7 Variation of dimensionless axial velocity $f(\eta)$ for $M = 0.4$, $Pr = 0.2$, $R = 10$ and various values of Re

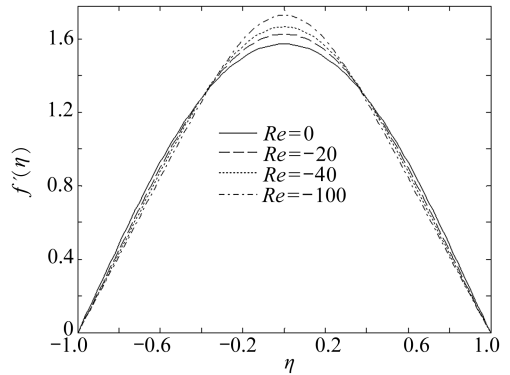


图 8 当 $M = 0.4$, $Pr = 0.2$ 和 $R = 10$, Re 取不同数值时,无量纲径向速度 $f'(\eta)$ 的变化

Fig. 8 Variation of dimensionless radial velocity $f'(\eta)$ for $M = 0.4$, $Pr = 0.2$, $R = 10$ and various values of Re

盘之间的中心区域,因此随着 Re 的增加,径向速度得到明显提高。图 9 给出了 Re 取不同数值时的微转动,在圆盘附近,微转动符号正相反。2 个圆盘处的剪切应力使流体朝着相反方向旋转,微转动为 0 的点,标示着相反的转动作用互相平衡。随着 Re 值的增加,微转动也随之增加。

图 10 中可以看出,随着注入速度的增加, $z = 0$ 平面上部区域的温度在增加,而下部区域的温度在下降。

图 11 至图 14 分别给出外部磁场对流速、微转动和温度分布的影响。从图 11 可以看出,随着磁场参数 M 的增加,下圆盘附近的轴向速度在上升,而上圆盘附近的轴向速度在下降。图 12 可以看出,与 Reynolds 数 Re 的影响相反,随着 M 的值增加,中心平面附近的径向速度在下降,流体被推向边界方向。进一步可以发现,当磁场参数 M 较小时,径向速度分布呈抛物线;随着 M

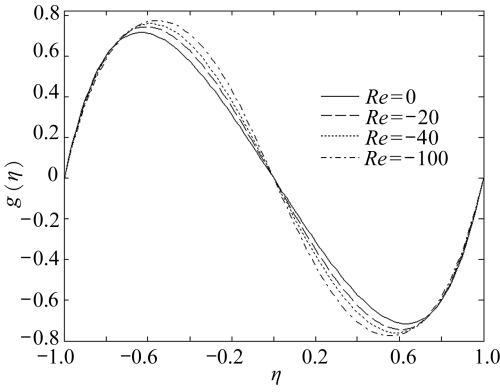


图9 当 $M = 0.4$, $Pr = 0.2$ 和 $R = 10$, Re 取不同数值时,无量纲微转动 $g(\eta)$ 的变化

Fig.9 Variation of dimensionless microrotation $g(\eta)$ for $M = 0.4$, $Pr = 0.2$, $R = 10$ and various values of Re

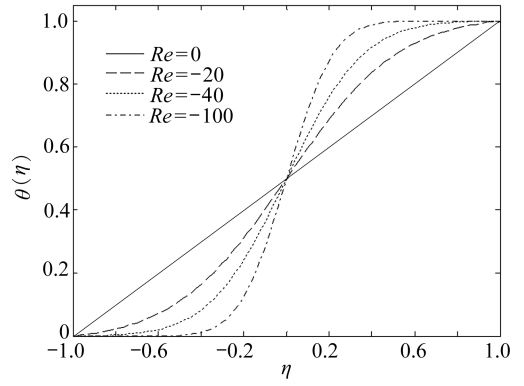


图10 当 $M = 0.4$, $Pr = 0.2$ 和 $R = 10$, Re 取不同数值时,无量纲温度 $\theta(\eta)$ 的变化

Fig.10 Variation of dimensionless temperature $\theta(\eta)$ for $M = 0.4$, $Pr = 0.2$, $R = 10$ and various values of Re

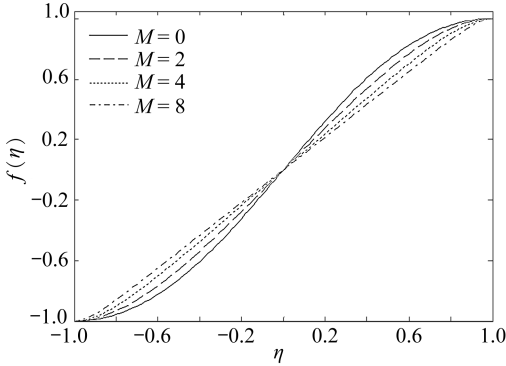


图11 当 $Re = -20$, $Pr = 0.2$ 和 $R = 5$, M 取不同数值时,无量纲轴向速度 $f(\eta)$ 的变化

Fig.11 Variation of dimensionless axial velocity $f(\eta)$ for $Re = -20$, $Pr = 0.2$, $R = 5$ and various values of M

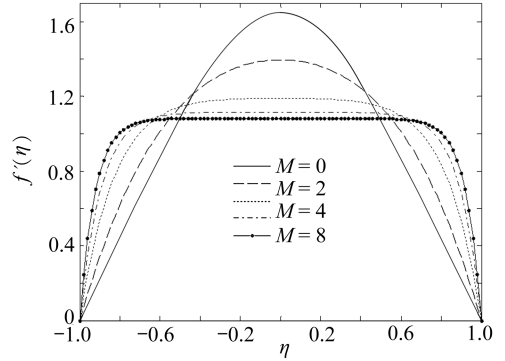


图12 当 $Re = -20$, $Pr = 0.2$ 和 $R = 5$, M 取不同数值时,无量纲径向速度 $f'(\eta)$ 的变化

Fig.12 Variation of dimensionless radial velocity $f'(\eta)$ for $Re = -20$, $Pr = 0.2$, $R = 5$ and various values of M

值的增加,径向速度分布出现扁平化特性.从图13可以看到,前半部微转动为正,而后半部为负,说明2个圆盘边界附近的转动方向正相反.由于阻尼的影响,随着 M 的增加,微转动在下降.在(出现于润滑问题的)悬浮液流动中,调节外部磁场的强度,可以降低角转动量.图14就 Re, R 和 Pr 值固定时,当 M 取不同数值,给出了无量纲温度作为 η 的函数的变化.从图14可以看出,对给定的 M 值,流体温度随着 η 的增加而增加.请注意,下圆盘附近温度分布在上升,而上圆盘附近 M 的影响恰好相反.

图15至图17绘出了微极参数 R 对速度场和微转动场的影响.图15表明,当 R 的值一定时,轴向速度 $f(\eta)$ 从 -1 增加到 1 .图16描述了不同 R 取值下的径向速度变化,对所有的微极

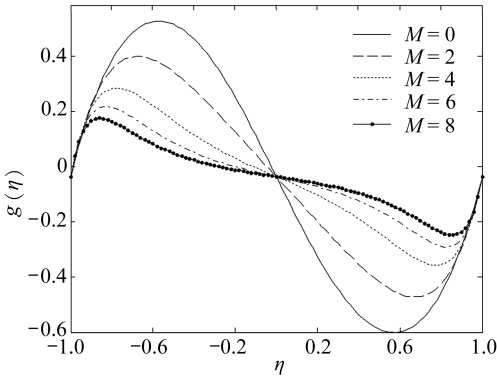


图 13 当 $Re = -20$, $Pr = 0.2$ 和 $R = 5$, M 取不同数值时,无量纲微转动 $g(\eta)$ 的变化

Fig. 13 Variation of dimensionless microrotation $g(\eta)$ for $Re = -20$, $Pr = 0.2$, $R = 5$ and various values of M

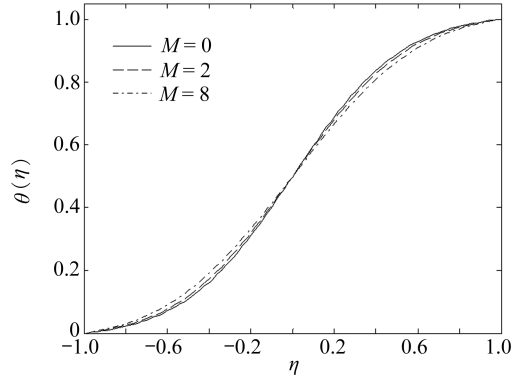


图 14 当 $Re = -20$, $Pr = 0.2$ 和 $R = 5$, M 取不同数值时,无量纲温度 $\theta(\eta)$ 的变化

Fig. 14 Variation of dimensionless temperature $\theta(\eta)$ for $Re = -20$, $Pr = 0.2$, $R = 5$ and various values of M

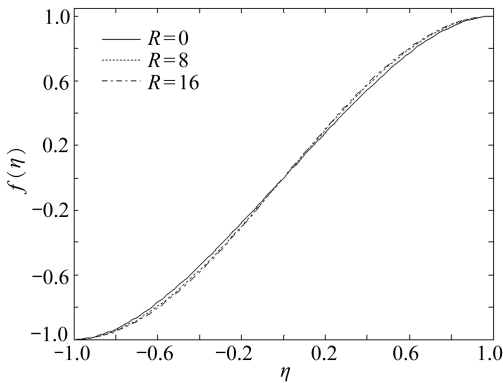


图 15 当 $Re = -10$, $M = 1.5$ 和 $Pr = 0.2$, R 取不同数值时,无量纲轴向速度 $f(\eta)$ 的变化

Fig. 15 Variation of dimensionless axial velocity $f(\eta)$ for $Re = -10$, $M = 1.5$, $Pr = 0.2$ and various values of R

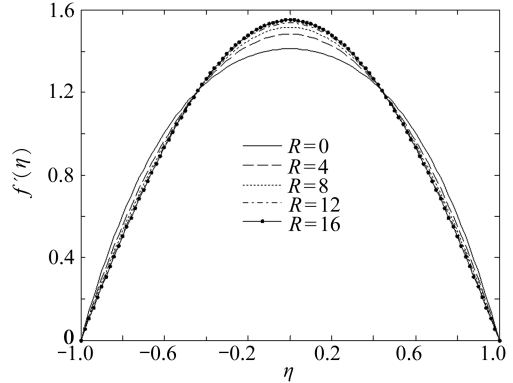


图 16 当 $Re = -10$, $M = 1.5$ 和 $Pr = 0.2$, R 取不同数值时,无量纲径向速度 $f'(\eta)$ 的变化

Fig. 16 Variation of dimensionless radial velocity $f'(\eta)$ for $Re = -10$, $M = 1.5$, $Pr = 0.2$ and various values of R

参数 R 值, 径向速度实际上呈抛物线分布。随着 R 值的增加, 中心平面附近的径向速度在增加, 但是边界附近的径向速度分布在下降。图 17 就 $Re = -10$, $M = 1.5$ 和 $Pr = 0.2$ 时, 给出了微极参数 R 对微转动的影响。 $R = 0$ 对应于 Newton 流体, 这时候没有微转动, 其他情况 ($R \neq 0$) 时, 微转动的影响是显著的; 随着 R 值的增加, 微转动在增加。 R 值的变化, 对温度没有显著影响。图 18 选择不同的 Prandtl 数 Pr , 绘出了无量纲温度 $\theta(\eta)$ 的变化。随着 Pr 值的增加, 中心平面 $z = 0$ 右侧区域的温度分布在上升; 中心平面 $z = 0$ 左侧区域的温度分布在下降。

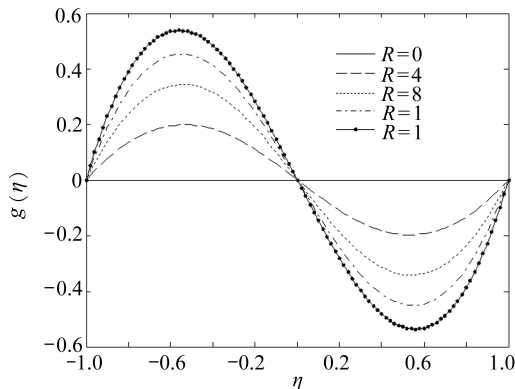


图 17 当 $Re = -10$, $M = 1.5$ 和 $Pr = 0.2$, R 取不同数值时,无量纲微转动 $g(\eta)$ 的变化

Fig. 17 Variation of dimensionless microrotation $g(\eta)$ for $Re = -10$, $M = 1.5$, $Pr = 0.2$ and various values of R

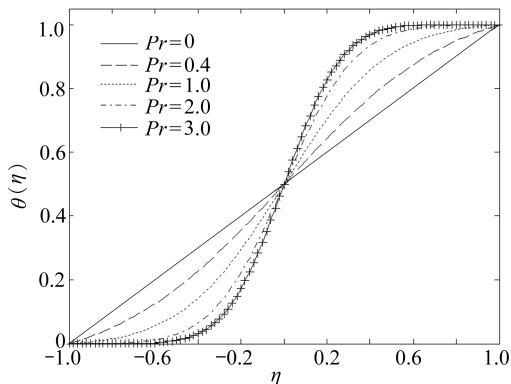


图 18 当 $Re = -50$, $M = 0.2$ 和 $R = 3$, Pr 取不同数值时,无量纲温度 $\theta(\eta)$ 的变化

Fig. 18 Variation of dimensionless temperature $\theta(\eta)$ for $Re = -50$, $M = 0.2$, $R = 3$ and various values of Pr

4 总 结

本文在外加磁场作用下,研究一些控制参数对可导微极流体流动的影响.应用有限差分离散化方法,对自相似变换后控制方程及其边界条件,进行数值求解,并得到以下结论:

- 1) 和 Newton 流体相比较,微极流体的剪切应力弱化了;
- 2) 磁场提高了剪切应力、应力偶和传热率;
- 3) 注入速度的增强,使剪切应力和传热率减少;
- 4) 传热率随着 Prandtal 数的增加而减少;
- 5) 中心平面附近的径向速度,随着 Reynolds 数和微极参数的增加而增加;而磁场参数的增大,效果适得其反;
- 6) 微转动随着 Reynolds 数和微极参数的增加而增加;然而它随着磁场参数的增大而减少.

致谢 作者衷心感谢审稿人为了提高论文质量而提出的宝贵建议.

参考文献 (References) :

- [1] Elcrat A R. On the radial flow of a viscous fluid between porous disks[J]. *Arch Rat Mech Anal*, 1976, **61**(1): 91-96.
- [2] Rasmussen H. Steady viscous flow between two porous disks[J]. *Z Angew Math Phys*, 1970, **21**(2): 187-195.
- [3] Guar Y N, Chaudhary R C. Heat transfer for laminar flow through parallel porous disks of different permeability[J]. *Indian Academy of Sciences, Section A*, 1978, **87**(9): 209-217.
- [4] Rudraiah N, Chandrasekhara B C. Flow of a conducting fluid between porous disks for suction Reynolds number[J]. *J Phys Society Japan*, 1969, **27**(4): 1041-1045.
- [5] Phan Thien N, Bush M B. On the steady flow of a Newtonian fluid between two parallel disks [J]. *ZAMP*, 1984, **35**(6): 912-919.

- [6] Attia H A. On the effectiveness of the ion slip on the steady flow of a conducting fluid due to a porous rotating disk with heat transfer[J]. *Tamkang J Sci Eng*, 2006, **9**(11): 185-193.
- [7] Fang T. Flow over a stretchable disk[J]. *Phys Fluids*, 2007, **19**(12): 128101-128105.
- [8] Ibrahim F N. Unsteady flow between two rotating disks with heat transfer[J]. *J Phys D: Appl Phys*, 1991, **24**(8): 1293-1299.
- [9] Frusteri F, Osalusi E. On MHD and slip flow over a rotating porous disk with variable properties[J]. *Int Communications in Heat and Mass Transfer*, 2007, **34**(4): 492-501.
- [10] Ersoy H V. An approximate solution for flow between two disks rotating about distinct axes at different speeds[J]. *Math Problems in Eng*, 2007, **2007**: 1-16.
- [11] Eringen A C. Simple microfluids[J]. *Int J Eng Sci*, 1964, **2**(2): 205-217.
- [12] Eringen A C. Theory of micropolar fluids[J]. *J Math Mech*, 1966, **16**(1): 1-18.
- [13] Ariman T, Turk M A, Sylvester N D. Microrotation fluid Mechanics—a review[J]. *Int J Eng Sci*, 1973, **11**(8): 905-930.
- [14] Guram G S, Anwar M. Steady flow of a micropolar fluid due to a rotating disk[J]. *J Eng Math*, 1979, **13**(3): 223-234.
- [15] Guram G S, Anwar M. Micropolar flow due to a rotating disk with suction and injection[J]. *ZAMM*, 1981, **61**(11): 589-605.
- [16] Takhar H S, Bhargava R, Agrawal R S, Balaji A V S. Finite element solution of micropolar fluid flow and heat transfer between two porous disks[J]. *Int J Eng Sci*, 2000, **38**(17): 1907-1922.
- [17] WANG Xiao-li, ZHU Ke-qin. Numerical analysis of journal bearings lubricated with micropolar fluids including thermal and cavitating effects[J]. *Tribology Int*, 2006, **39**(3): 227-237.
- [18] Sacheti N C, Bhatt B S. Steady laminar flow of a non-Newtonian fluid with suction or injection and heat transfer through porous parallel disks[J]. *ZAMM*, 2006, **56**(1): 43-50.
- [19] Anwar Kamal M, Ashraf M, Syed K S. Numerical solution of steady viscous flow of a micropolar fluid driven by injection between two porous disks[J]. *Appl Math Comput*, 2006, **179**(1): 1-10.
- [20] Ashraf M, Anwar Kamal M, Syed K S. Numerical simulation of a micropolar fluid between a porous disk and a non-porous disk[J]. *Appl Math Model*, 2009, **33**(4): 1933-1943.
- [21] Ashraf M, Anwar Kamal M, Syed K S. Numerical study of asymmetric laminar flow of micropolar fluids in a porous channel[J]. *Computers and Fluids*, 2009, **38**(10): 1895-1902.
- [22] Shercliff J A. *A Text Book of Magnetohydrodynamics*[M]. Oxford: Pergamon Press, 1965.
- [23] Rossow V J. On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field[R]. NASA: Tech Report 1358, 1958.
- [24] von Kármán M. Under laminare and turbulente[J]. *Reibung Z Zngew Math Mech*, 1921, **1**: 233-235.
- [25] Elkouh A F. Laminar flow between porous disks[J]. *J Eng Mech Div ASCE*, 1967, **93**: 5375-5377.
- [26] Gerald C F. *Applied Numerical Analysis*[M]. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- [27] Milne W E. *Numerical Solutions of Differential Equations*[M]. New York: John Wiley and Sons Inc, 1953.
- [28] Syed K S, Tupholme G E, Wood A S. Iterative solution of fluid flow in finned tubes[C]// Taylor C, Cross J T. *Proceedings of the 10th International Conference on Numerical Methods*

- in Laminar and Turbulent Flow*. UK: Pineridge Press, 1997, 429-440.
- [29] Deuffhard P. Order and step size control in extrapolation methods[J]. *Numer Math*, 1983, **41**(3): 399-422.
- [30] Chang L C. Numerical simulation of micropolar fluid flow along a flat plate with wall conduction and buoyancy effects[J]. *J Phys D: Appl Phys*, 2006, **39**(6): 1132-1140.
- [31] Lok Y Y, Pop I, Chamkha Ali. Nonorthogonal stagnation point flow of a micropolar fluid[J]. *Int J Eng Sci*, 2007, **45**(1): 173-184.
- [32] M. 阿斯拉夫, M. M. 阿斯拉夫. 微极流体向受热面的 MHD 驻点流动[J]. 应用数学和力学, 2011, **32**(1): 44-52. (Ashraf M, Ashraf M M. MHD stagnation point flow of a micropolar fluid towards a heated surface[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2011, **32**(1): 45-54.)

MHD Flow and Heat Transfer of a Micropolar Fluid Between Two Porous Disks

Muhammad Ashraf¹, A. R. Wehgal^{1,2}

(1. *Centre for Advanced Studies in Pure and Applied Mathematics,
Bahauddin Zakariya University, Multan 60000, Pakistan;*

2. *Department of Mathematics, Stockholm University, Stockholm SE-10691, Sweden*)

Abstract: A numerical study of axisymmetric steady laminar incompressible flow of an electrically conducting micropolar fluid between two infinite parallel porous disks with constant uniform injection through the surface of the disks was carried out when the fluid was subjected to an external transverse magnetic field. The governing nonlinear equations of motion were transformed in dimensionless form through von Kármán's similarity transformation. An algorithm based on finite difference scheme was used to solve the reduced coupled ordinary differential equations with associated boundary conditions. Effects of Reynolds number, magnetic parameter, micropolar parameter and Prandtl number on the flow velocity and temperature distribution were discussed. Results compare well with the previously published work for special case. Investigations predict that the heat transfer rate at the surfaces of the disks increased with an increase in the values of Reynolds number, magnetic parameter and Prandtl number. The shear stresses decreased by increasing the injection while these stresses increased with increased applied magnetic field. The shear stress factor was lower for micropolar fluids than for Newtonian fluids, which may be beneficial in flow and thermal control of polymeric processing.

Key words: MHD flow; porous disks; micropolar fluids; heat transfer; microrotations