

Maxwell 流体在有限长管道中作不稳定的蠕动传输:食道吞咽进程分析*

S·K·潘迪¹, D·特里帕蒂²

(1. 印度大学 技术学院 应用数学系, 瓦拉纳西 221005, 印度;
2. 印度罗帕技术学院 数学系, 旁遮普邦 140001, 印度)

摘要: 解析地研究了有限长管道中 Maxwell 流体的不稳定蠕动传输. 管壁受到不超过静止边界的收缩波作用. 对无量纲形式的方程, 应用长波长近似进行分析. 导出了轴向速度和径向速度的表达式, 评估了沿波长和管道长度方向的压力. 讨论了回流现象, 确定了回流极限区域. 对食道中咀嚼食物(如面包、蛋白等)传输的数学公式给出了物理上的解释. 可以看出, 与 Newton 流体相比, Maxwell 流体有利于在食道中的流动. 与 Takahashi 等 [Rheology, 1999, 27: 169-172] 的实验结果相符合. 进一步揭示了松弛时间既不影响剪应力, 也不影响回流极限. 发现了压力的峰值, 对整数波列是相同的, 而对非整数波列是不同的.

关键词: 蠕动传输; Maxwell 流体; 食道; 轴对称流动; 回流

中图分类号: O357.2 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.01.002

引 言

生理学上的蠕动, 有如一只泵, 包含某些流体的输送管管壁, 产生一系列协调的、连续的、有节奏的肌肉收缩和松弛. 这是一个典型的、无活塞抽吸管内流体的泵. 生理学上几乎所有的传输, 主要都是依靠蠕动来完成的. 血液在动脉和静脉中的流动、尿液在输尿管中的流动、胆汁从胆囊到十二指肠的流动、胃肠道中食糜的移动、食物团块通过消化道的传输, 这些都是生理学上蠕动传输的常见例子. 生物泵的机理是一致的, 它们保留了管内流体的纯度.

近年来, 研究非 Newton 流体蠕动传输的势头日益增长. 作为生理流体, 大部分属非 Newton 类, 许多研究者对 Maxwell 流体表现出浓厚的兴趣^[1-4]. 在这些研究中, 将管道考虑为无限长的. 令我们感兴趣的是, 食道被模拟为一段有限长的圆柱体管道. 食道是一段可收缩的, 长 18~26 cm、宽 1.5~2.5 cm, 从上括约肌到下括约肌的肌肉管道. 上括约肌是一个入口, 调节所咀嚼食物从嘴到食道的通道; 而下括约肌作为一个出口, 控制流体进入胃的通道, 并在消化系统中作进一步处理. 上面的论述清楚地表明: 长宽比的尺寸有限的, 接近于 12:1; 因而, 考虑为有限长度更加合适.

* 收稿日期: 2011-03-24; 修订日期: 2011-09-22

作者简介: Dharmendra Tripathi (联系人. E-mail: dtripathi@iitpr.ac.in; dtripathi.rs.apm@itbhu.ac.in).

本文原文为英文, 黄雅意译, 张禄坤校.

一般的生理器官,尤其是食道,紧随收缩之后是松弛,而松弛不会超过管道的自由边界。只有当食物团块碰到上括约肌,并有一个信息传输到食道,食道被激活达到完全膨胀,从而将物块传输到食道;否则它都处于关闭状态。食物吞咽的发生,是由于食道壁周期性地收缩。由于折回的收缩,物块后面部分受到了压力的作用,同时前面部分出现松弛,从而使物块向前移动。实际收缩并不是对称的;然后,收缩零内腔并挤压它,不使任何一部分食物团块,不可思议地反方向滑出。任何不平衡,都可能引起逆向的运动。这在模拟壁面运动中已经考虑进去。

尽管生物系统中有着多种形式的蠕动运动,如触发式蠕动(rush peristalsis)、群发式蠕动(mass peristalsis)和反式蠕动(anti-peristalsis)^[5],我们的目的是研究最常见的蠕动,即触发式蠕动。

另一个事实是,被吞咽的食物可能是 Newton 流体,如水,或者是不同类型的非 Newton 流体,如粘弹性流体。食物材料如面包、蛋白等^[6]属粘弹性类。一个有趣的现象是,几乎所有可食用的半固体食品,同时具有粘性和弹性的特性。

Li 和 Brasseur^[7]建立起 Newton 流体(应用于水)在有限长管道中蠕动传输的模型。紧接着, Misra 和 Pandey^[8]将其扩展到幂律流体,研究有限长圆柱形管道中的蠕动流。接着,文献[9-18]给出了不同条件下,各种非 Newton 流体的研究报告。他们所考虑的壁面运动,与食道自然壁面的运动相类似。我们下面要研究(称为 Maxwell 模型^[19])粘弹性流体的吞咽。这里还调查了非整数值波列沿管壁的传播,有着有限长商用泵的典型特征^[7]。

1 数学模型

当管道的壁面受到周期性径向收缩波作用时,最初是入口处部分管壁开始收缩,然后入口处管壁出现松弛,同时,紧靠入口处前面那部分管壁开始收缩,呈现出收缩波向出口处的传播。松弛限于管道的自然边界,不再向自然边界外膨胀(见图 1)。这是一个连续过程,直到传输过程结束。这样一个运动可以用如下形式的方程来描述(参考 Misra 和 Pandey 的文献[8]):

$$\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) = a - 0.5\tilde{\phi}\left\{1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}(\tilde{x} - c\tilde{t})\right\}, \quad (1)$$

其中, \tilde{x} 为轴向坐标, \tilde{t} 为时间, a 为管道半径, $\tilde{\phi}$ 为波幅, λ 为波长, c 为波速, \tilde{h} 为管壁离中心线的径向位移。

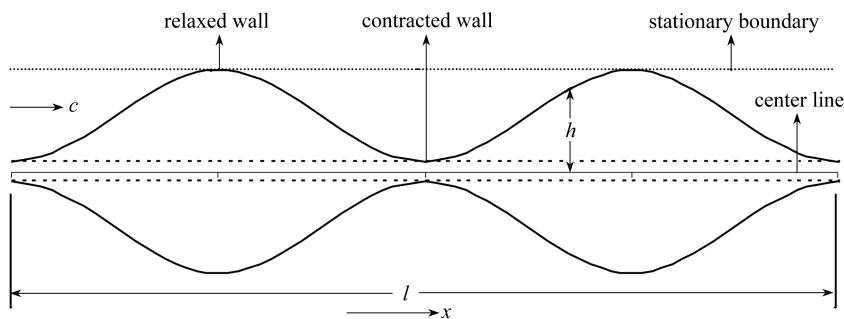


图 1 收缩波沿着管道壁面前进时的传播图

(见方程(5),管道内的流体时而收缩,时而松弛,但不越出自然边界)

Fig. 1 The diagram, based on eq. (5), represents the propagation of a progressive wave along the walls of the tube containing fluid, which undergoes contraction and relaxation but no expansion beyond the boundary

流体模型为 Maxwell 流体的流动方程如下:

$$\left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{\mathbf{S}} = \mu \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{W}}, \quad (2)$$

其中, μ 为粘性系数, $t_m = \mu/\nu$ 为松弛时间, ν 为弹性系数, $\tilde{\mathbf{S}}$ 为附加应力张量, $\tilde{\mathbf{W}}$ 为速度分量.

Maxwell 流体作轴对称流动时,其控制方程为

$$\begin{cases} \rho \left(1 + \tilde{t}_m \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{D\tilde{u}}{D\tilde{t}} = - \left(1 + \tilde{t}_m \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \mu \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \right\}, \\ \rho \left(1 + \tilde{t}_m \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{D\tilde{v}}{D\tilde{t}} = - \left(1 + \tilde{t}_m \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r}\tilde{v}) \right) + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} \right\}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial (\tilde{r}\tilde{v})}{\partial \tilde{r}} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\frac{D}{D\tilde{t}} \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}}$.

为了完成更进一步的分析,引入以下无量纲参数:

$$\begin{cases} x = \frac{\tilde{x}}{\lambda}, r = \frac{\tilde{r}}{a}, t = \frac{c\tilde{t}}{\lambda}, t_m = \frac{c\tilde{t}_m}{\lambda}, u = \frac{\tilde{u}}{c}, v = \frac{\tilde{v}}{c\alpha}, h = \frac{\tilde{h}}{a}, \\ l = \frac{\tilde{l}}{\lambda}, \phi = \frac{\tilde{\phi}}{a}, p = \frac{\tilde{p}a^2}{\mu c \lambda}, \psi = \frac{\tilde{\psi}}{\pi a^2 c}, Q = \frac{\tilde{Q}}{\pi a^2 c}, Re = \frac{\rho c a \alpha}{\mu}. \end{cases} \quad (4)$$

其中, ρ 为流体密度, $\alpha = a/\lambda$ 定义为波数, r 为径向坐标, t 为时间, u 为轴向速度, v 为径向速度, l 为管道长度, p 为压力, ψ 为流函数, Q 为体积流量率, “ \sim ” 表示参数有量纲时的形式.

引入无量纲参数后,方程(1)和(3)可分别简化为

$$h(x, t) = 1 - \phi \cos^2 \pi(x - t), \quad (5)$$

$$\begin{cases} \left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{Du}{Dt} = - \frac{1}{Re} \left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}, \\ \left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{Dv}{Dt} = - \frac{1}{Re\alpha^2} \left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) + \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

在长波长近似(即 $\lambda \gg a$) 和低 Reynolds 数(即 $Re \rightarrow 0$) 假设下,方程(6)可简化为

$$\begin{cases} \left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

假设壁面的无滑动条件,即

$$u(x, r, t) \Big|_{r=h} = 0, \quad (8)$$

壁面本身仅作径向振动,其速度为

$$v(x, r, t) \Big|_{r=h} = \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (9)$$

此外,中心线的径向速度以及径向的速度梯度均为 0,即

$$v(x, r, t) \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial u(x, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0. \quad (10)$$

有限长管道的两端要求有压力作用,假设压力是固定的:

$$p \Big|_{x=0} = p_0, \quad p \Big|_{x=l} = p_l. \quad (11)$$

在条件(8)和(10)下,由方程(7)可得到轴向速度

$$u = \frac{1}{4} (r^2 - h^2) \left\{ \left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right\} \quad (12)$$

和径向速度

$$v = \frac{r}{4} \left[h \frac{\partial h}{\partial x} \left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{4} (r^2 - 2h^2) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right\} \right]. \quad (13)$$

在方程(13)中利用条件(9),得到

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h^3}{16} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial h}{\partial x} \left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (14)$$

对方程(14)从0到 x 进行积分,在作一系列运算后,进一步从0到 t 进行积分,得到压力梯度:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = e^{-\nu t_m} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{t=0} + \frac{1}{t_m} \int_0^t \frac{e^{\tau/t_m}}{h^4} \left\{ \gamma(\tau) + 16 \int_0^x h \frac{\partial h}{\partial t} ds \right\} d\tau \right], \quad (15)$$

其中, $\partial p / \partial x \Big|_{t=0}$ 为时间 $t=0$ 对应的压力梯度, $\gamma(t)$ 为 t 的任意函数,最终定义为

$$p(x, t) - p(0, t) = e^{-\nu t_m} \left[\{ p(x, 0) - p(0, 0) \} + \frac{1}{t_m} \int_0^x \int_0^t \frac{e^{\tau/t_m}}{h^4} \left\{ \gamma(\tau) + 16 \int_0^s h \frac{\partial h}{\partial \tau} ds_1 \right\} d\tau ds \right]. \quad (16)$$

方程(16)对 t 求导,并作更进一步运算后,从方程(15)得到评估函数 $\gamma(t)$ 如下:

$$\gamma(t) = \frac{\left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t} \right) (p_l - p_0) - 16 \int_0^l \frac{1}{h^4} \int_0^x h \frac{\partial h}{\partial t} ds dx}{\int_0^l \frac{1}{h^4} ds}. \quad (17)$$

体积流量率

由方程(12),可以得体积流量率 $Q(x, t) = \int_0^h 2rudr$ 为

$$Q(x, t) = -\frac{h^4}{8} \left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (18)$$

同样地,可以分别得到波动坐标系和实验室坐标系下的体积流量率

$$\bar{Q} = q + 1 - \phi + \frac{3\phi^2}{8} = Q - h^2 + 1 - \phi + \frac{3\phi^2}{8}, \quad (19)$$

两个坐标系间有如下变换:

$$X = x - t, \quad R = r, \quad U = u - 1, \quad V = v, \quad q = Q - h^2. \quad (20)$$

对方程(19)从0到 t 进行积分,得到另一个形式的压力梯度

$$\frac{\partial p}{\partial x} = e^{-\nu t_m} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{t=0} - \frac{8}{t_m} \int_0^t \frac{e^{\tau/t_m} Q(x, \tau)}{h^4} d\tau \right],$$

在0和 x 之间积分后,得到

$$p(x, t) - p(0, t) = e^{-\nu t_m} \left[p(x, 0) - p(0, 0) - \frac{8}{t_m} \int_0^x \int_0^t \frac{e^{\tau/t_m} Q(s, \tau)}{h^4} d\tau ds \right]. \quad (21)$$

局部壁面剪应力

壁面上局部壁面剪应力如下给出:

$$\tau_w(x, t) = \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=h} = \frac{h}{2} \left(1 + t_m \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial x},$$

这里,利用方程(15),可进一步简化为

$$\tau_w(x, t) = \frac{1}{2h^2} \left[\gamma(t) + 16 \int_0^x h \frac{\partial h}{\partial t} ds \right]. \quad (22)$$

它和 Newton 流体的局部壁面剪应力表达式相同.

2 回流极限

一般地说,回流是指流体颗粒的移动,与净流动方向相反方向的移动(参考 Shapiro 等的文献[20]),回流极限是指内部出现回流范围的界限.细菌向着尿液流动方向相反的移动,胃-食道的回流,是少数回流的实例.在这种现象中,回流出现在管道边界附近.

为了评估回流的极限,波动坐标系中流函数的无量纲形式定义为

$$d\tilde{\psi} = 2\pi\tilde{R}(\tilde{U}d\tilde{R} - \tilde{V}d\tilde{X}). \quad (23)$$

利用变换式(20)以及方程(12)和(13),给出无量纲形式的流函数

$$\psi = (2r^2h^2 - r^4) \frac{\bar{Q} - 1 + \phi - 3\phi^2/8 + h^2}{h^4} - r^2. \quad (24)$$

壁面的流函数定义为

$$\psi|_{r=h} = \psi_w = \bar{Q} - 1 + \phi - \frac{3\phi^2}{8}, \quad (25)$$

回流体积流量率为

$$Q_\psi(x) = \psi + r^2(\psi, x). \quad (26)$$

由方程(26)得到一个周期里平均的回流流量率为

$$\bar{Q}_\psi = \psi + \int_0^1 r^2(\psi, x) dz. \quad (27)$$

r^2 的展开式,即 $r^2(\psi, x) = h^2 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots$, 前面两项的系数,由方程(24)和(25)得到

$$\begin{cases} a_1 = -1, \\ a_2 = -\frac{\bar{Q} - 1 + \phi - 3\phi^2/8 + h^2}{h^4}. \end{cases} \quad (28)$$

当回流条件随 $\varepsilon \rightarrow 0$ 满足 $\bar{Q}_\psi/\bar{Q} > 1$ 时,回流发生.从而得到回流极限为

$$\bar{Q} < 1 - \phi + \frac{3\phi^2}{8} - \frac{\int_0^1 h^{-2} dz}{\int_0^1 h^{-4} dz}. \quad (29)$$

3 数值结果及其讨论

3.1 整数值波列

首先,考虑自由泵(即 $p_l = p_0 = 0$) 的情况.在这种情况下,仅考虑蠕动本身的作用.考虑两个波的波列沿着管壁的传播.为了考察松弛时间对流动模式的时间效应,松弛时间 t_m 在 $0.0 \sim 0.09$ 间取值,以方程(16)为基础,瞬时 t 在 $0.0 \sim 1.0$ 之间取值,用图形绘出了压力和轴向距离

之间的关系.可以发现,一旦传输开始,过程将持续循环下去.物块一进入管道,它将获得活性;但是,由于物块的进入,压力分布将彻底改变.这里,作为一个连续过程来讨论.这就是为什么,我们在图形中取 $t = 1, 2, \dots$, 而不是 $t = 0$. 此外, $t_m = 0$ 是一个极限情况.

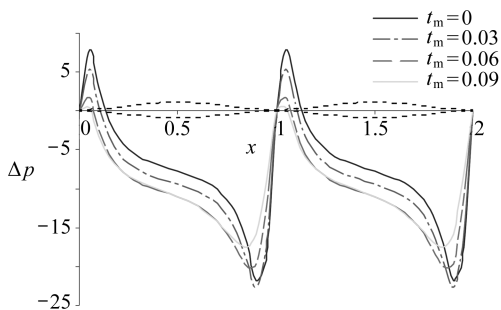
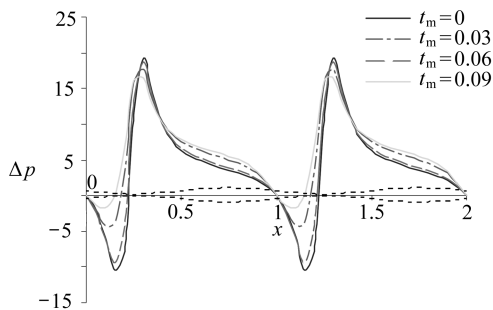
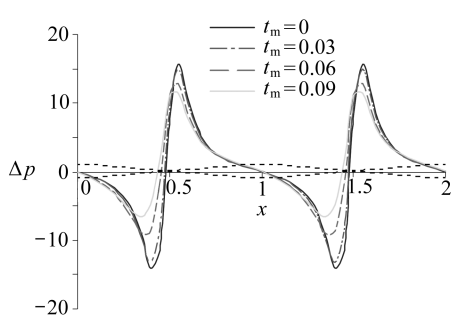
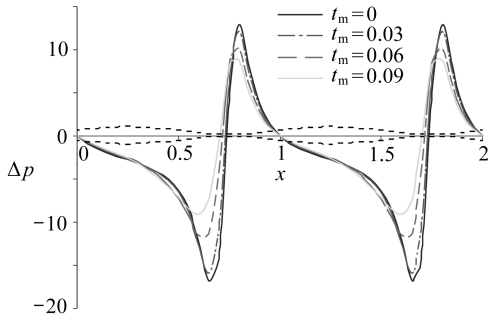
(a) $t = 0.0$ ($t = 1.0$ 时, 分布类似)(a) $t = 0.0$ (similar is the distribution for $t = 1.0$)(b) $t = 0.25$ (c) $t = 0.5$ (d) $t = 0.75$

图2 压力随轴向距离的变化(见方程(16)),对于不同的松弛时间 $t_m = 0.0, 0.03, 0.06, 0.09$, $\phi = 0.9$ 和 $l = 2.0$, Maxwell 流体沿管长流动,点线表示物块的位置,实线表示压力的分布)

Fig. 2 Pressure vs. axial distance (dotted lines represent the position of bolus and solid lines show the pressure distribution, based on eq. (16), across the length of the tube passing Maxwell fluid for different $t_m = 0.0, 0.03, 0.06, 0.09$, $\phi = 0.9$ and $l = 2.0$)

图2给出了瞬时 $t = 0.0 \sim 1.0$, 不稳定流动沿管长传输时的压力分布,用以检验其时间效应.当 $t = 0$ 时(见图2(a)),可以看到,压力在入口端急剧上升,达到峰值,然后在物块中点处,以一个较低的速率,下降到0,更进一步地倾斜成凹槽,然后它急剧上升,相遇于第一个物块的末端,使得传输可控地进行下去.对于下一个物块,重复着同样的压力分布.直到压力在另一端为0.它阐明了这种类型泵的主要关系:确保安全可靠地传输,胜于利用泵机的最大功效.

经过 $1/4$ 的循环周期之后(见图2(b)),物块向前移动,又一个物块紧跟着进入了管道,上括约肌压力下降,在物块前端再次减小为0,然后急剧上升,使得前一个物块不会发生任何后退运动;相反,下括约肌压力下降到0,为物块的流出作好准备.更高的 t 值,表示出食道中物块的系统进程.最终, $t = 1$ 时(见图2(a)),代表一个周期的结束,压力分布与 $t = 0$ 时相类似:表示一个新的循环又将开始.

可以看出,一开始,即对于 $t = 0$ 时,随着包含 t_m 项的消失,方程(16)与 t_m 无关.这就是为什么,图2(a)给出了对所有 t_m 值,压力分布都相同.图2显示了不同瞬时, t_m 对流动模式的影响.展示出两个物块间压力的分布,显示出压力分布以一种可控制的方式,沿管长的变化.进一

步可以观察到,随着松弛时间的增加,压力差沿管长而减小.因而,可以得到结论:Maxwell 型粘弹性流体有利于吞咽.

3.2 非整数值波列

我们同时考虑非整数值波列的传播,非整数值波列是有限长管道的固有特征.可以看到,非整数值波列与整数值波列之间有着巨大的差异.作为一个特例,取 $l = 1.8$.

可以看到,不同于整数值波列,对于非整数值波列,压力分布的差别源于,物块被包裹在完整波里,或是包裹在非完整波里.无论时间取何值,完整波的压力 3 次达到 0 值:两次在物块端部达到 0 值,一次在半途(依赖于 t 值)达到 0 值;而非完整波的压力,只有在物块两端两次达到 0 值.而两种情况间有一个重大的差异:在完整波中,物块在两种不同类型下压力峰值是相同的;而在非完整波中,峰值是不同的(参见图 3).Li 和 Brasseur^[7] 针对 Newton 流体,有着类似的结果报道:不同的整数波,波幅出现相当显著的振荡,进入管道波的相位差所致.

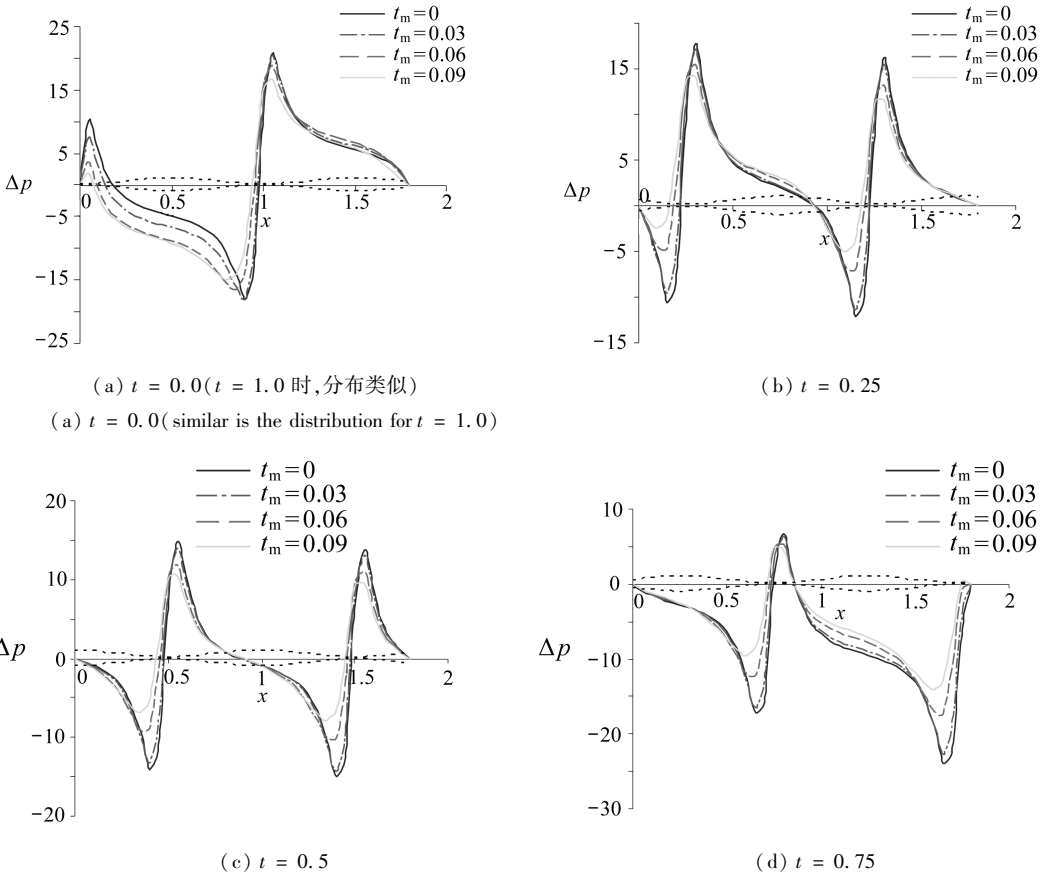


图 3 压力随轴向距离的变化(见方程(16)),对于不同的松弛时间 $t_m = 0.0, 0.03, 0.06, 0.09$, $\phi = 0.9$ 和 $l = 1.8$, Maxwell 流体沿管长流动,点线表示物块的位置,实线表示压力的分布)

Fig. 3 Pressure vs. axial distance(dotted lines represent the position of bolus and solid lines show the pressure distribution, based on eq. (16), across the length of the tube passing Maxwell fluid for different $t_m = 0.0, 0.03, 0.06, 0.09$, $\phi = 0.9$ and $l = 1.8$)

3.3 一个波长上的压力差随时间平均流量率的变化

图 4 就 $t_m = 0.0 \sim 0.09$ 的 Maxwell 流体,给出了一个波长上的压力差,随时间平均流量率的变化.可以看出,随着松弛时间的增大,对于相同的时间平均流量率,需要的压力差较小.

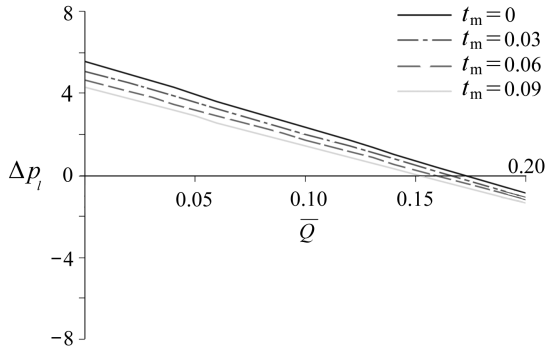


图4 一个波长上的压力差随时间平均流量率的变化

(见方程(21), 其中松弛时间 t_m 取不同数值, $\phi = 0.4$ 时的 Maxwell 流体)

Fig. 4 Pressure difference across one wavelength vs. time-averaged flow rate (based on eq. (21), for Maxwell fluid for different t_m and $\phi = 0.4$)

3.4 应用:食道的吞咽进程

对于一个成年人来说,食道是一段长 18 ~ 26 cm、宽 1.5 ~ 2.5 cm 的强健肌肉,从嘴巴延伸到胃,并被限制在两个括约肌内,完成食物团块的进出,极好地控制着食物的吞咽。平时食道是萎陷的,并且始终保持萎陷状态,直到被咀嚼食物团块唤醒上括约肌信号,咀嚼进程开始。这时鼻腔是关闭的。食道被激活并充分伸展;括约肌慢慢地允许食物进入其中。一旦食物进入食道,上部的括约肌关闭,食道上部几乎是完全闭塞的。括约肌附近食物后面部分的壁面开始收缩,同时,食物最前面部分的壁面开始松弛。这样一个过程一直持续到物块到达下括约肌,唤醒下约肌闭,并将食物传送到胃,随后关闭下括约肌。正如引言中所讨论的,面包块、水果酱和某些非蔬菜类食物是粘弹性的。因此,前面基于有限长管道收缩波传播的分析,与食道壁面的收缩是类似的,可以直接用来分析这类生理现象,食道的长度与半径之比为 10 ~ 15。所得到的结果在物理上可以解释:粘弹性的食物比 Newton 类食物更易于吞咽。若运动是轴对称的,作相同的吞咽动作,可能吞咽更多的流体。Newton 流体和粘弹性流体的回流区域将是一样的。

4 结 论

本文的目的是,研究粘弹性流体的流动特点,并与 Newton 流体进行对比。由于方程中 Maxwell 流体项是隐式的,它们的 Newton 流体的对应项是极限情况(松弛时间 $\rightarrow 0$)^[7]。

由计算机模拟可知,吞咽粘弹性的食物,比吞咽 Newton 类的食物更容易。Takahashi 等^[21]就普通的商品酸奶和试验用食物,讨论了无规则吞咽时的粘弹性特性,证实了我们的结果。对无限长度管道,在这一点上,无法得到直截了当的推论^[1-2]。另外,在他们的报告中,松弛时间参数的变化超过了可接受的极限。

还可以推断,如果松弛时间越大,对于相同的时间平均流量率,所需的压力差较低。

更重要的是发现了,松弛时间与回流现象和局部壁面剪应力无关。从而得到结论:Maxwell 流体与 Newton 流体的回流极限相同。

本文进一步显示了,在整数值波列情况下,压力的峰值是相同的,而在非整数值波列的情况下,压力的峰值是不同的。Newton 流体呈现了相似的特征。在一个无限长管道中,这些截然不同的情况是不可能出现的。然而,对整数值波列和非整数值波列这两种情况,松弛时间的效应却是类似的。

参考文献 (References) :

- [1] Hayat T, Ali N, Asghar S. Hall effects on peristaltic flow of a Maxwell fluid in porous medium [J]. *Physics Letters A*, 2007, **363**(5/6): 397-403.
- [2] Tsiklauri D, Beresnev I. Non-Newtonian effects in the peristaltic flow of a Maxwell fluid[J]. *Phys Rev E*, 2001, **64**(3): 036303-1-036303-5.
- [3] Tripathi D. Peristaltic transport of fractional Maxwell fluids in uniform tubes: application of an endoscope[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2011, **62**(3): 1116-1126.
- [4] Tripathi D. Peristaltic transport of a viscoelastic fluid in a channel[J]. *Acta Astronautica*, 2011, **68**(7/8): 1379-1385.
- [5] Misra J C, Pandey S K. Peristaltic transport of physiological fluids [C]//*Biomathematics Modelling and Simulation*. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2006.
- [6] Barnes H A, Hutton J F, Walters K. *An Introduction to Rheology*[M]. Amsterdam: Elsevier, 1989.
- [7] Li M, Brasseur J G. Nonsteady peristaltic transport in finite length tubes[J]. *J Fluid Mech*, 1993, **248**: 129-151.
- [8] Misra J C, Pandey S K. A mathematical model for oesophageal swallowing of a food bolus [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2001, **33**(8/9): 997-1009.
- [9] Pandey S K, Tripathi D. Influence of magnetic field on the peristaltic flow of a viscous fluid through a finite-length cylindrical tube[J]. *Applied Bionics and Biomechanics*, 2010, **7**(3): 169-176.
- [10] Pandey S K, Tripathi D. Unsteady model of transportation of Jeffrey fluid by peristalsis[J]. *International Journal of Biomathematics*, 2010, **3**(4): 453-472.
- [11] Pandey S K, Tripathi D. Peristaltic transport of a casson fluid in a finite channel: application to flows of concentrated fluids in oesophagus[J]. *International Journal of Biomathematics*, 2010, **3**(4): 473-491.
- [12] Pandey S K, Tripathi D. Effects of non-integral number of peristaltic waves transporting couple stress fluids in finite length channels[J]. *Zeitschrift Fuer Naturforsch*, 2011, **66a**: 172-180.
- [13] Pandey S K, Tripathi D. Unsteady peristaltic flow of micro-polar fluid in a finite channel[J]. *Zeitschrift Fuer Naturforsch*, 2011, **66a**: 181-192.
- [14] Tripathi D. A mathematical model for the movement of food bolus of varying viscosities through the oesophagus[J]. *Acta Astronautica*, 2011, **69**(7/8): 429-439.
- [15] Pandey S K, Tripathi D. Peristaltic flow characteristics of Maxwell and magneto-hydrodynamic fluids in finite channels[J]. *Journal of Biological Systems*, 2010, **18**(3): 621-647.
- [16] Pandey S K, Tripathi D. A mathematical model for swallowing of concentrated fluids in oesophagus[J]. *Applied Bionics and Biomechanics*, 2011, **8**(3/4): 309-321, doi:10.3233/ABB-2011-0044.
- [17] Pandey S K, Tripathi D. A mathematical model for peristaltic transport of micro-polar fluids [J]. *Applied Bionics and Biomechanics*, 2011, **8**(3/4): 279-293, doi:10.3233/ABB-2011-0003.
- [18] Tripathi D. A mathematical model for swallowing of food bolus through the oesophagus under the influence of heat transfer[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2011, doi:10.1016/j.ijthermalsci.2011.07.014.

- [19] Maxwell J C. On the dynamic theory of gases[J]. *Phil Trans Soc*, 1867, **157**: 49.
- [20] Shapiro A H, Jaffrin M Y, Weinberg S L. Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number[J]. *J Fluid Mech*, 1969, **37**(4): 799-825.
- [21] Takahashi T, Ogoshi H, Miyamoto K, Yao M L. Visco-elastic properties of commercial plain yogurts and trial foods for swallowing disorders[J]. *Rheology*, 1999, **27**: 169-172.

Unsteady Peristaltic Transport of Maxwell Fluid Through a Finite Length Tube: Application to Oesophageal Swallowing

S. K. Pandey¹, Dharmendra Tripathi²

(1. *Department of Applied Mathematics, IT- BHU, Varanasi-221005, India*;

2. *Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Ropar, Punjab-140001, India*)

Abstract: Unsteady peristaltic transport of Maxwell fluid in a finite tube was investigated. The walls of the tube were subjected to contraction waves that do not cross the stationary boundaries. The analysis was carried out by using long wavelength approximation in non-dimensional form. The expressions for axial and radial velocities were derived and pressures across a wavelength and also across the tube-length were also estimated. The reflux phenomenon was discussed that culminates into determination of the reflux limit. Mathematical formulations were physically interpreted for the flow of masticated food materials such as bread, white eggs etc. in the oesophagus. It is revealed that Maxwell fluids are favorable to flow in the oesophagus in comparison with Newtonian fluids. This endorses the experimental finding of Tomoko Takahashi et al. [Rheology, 1999, **27**: 169-172]. It is further revealed that relaxation time affects neither shear stress nor reflux limit. It is found that the peaks of pressure are identical in the integral case while the peaks are different in the non-integral case.

Key words: peristaltic transport; Maxwell fluid; oesophagus; axisymmetric flow; reflux