

超声速流中含间隙和立方非线性 二元机翼的动力学分析*

郭虎伦, 陈予恕

(哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: 研究超声速流中含间隙和立方非线性二元机翼的气动弹性响应. 首先由二阶活塞理论得到了双楔机翼的气动力和气动力矩. 然后由平均法得到了气动弹性方程的极限环响应, 并用 Floquet 理论分析了极限环的稳定性. 结果表明, 间隙系统在超临界 Hopf 分岔的条件下也存在 Fold 分岔和幅值的跳跃现象. 而后, 数值解与平均法的结果进行了对比, 两者吻合得很好. 最后, 详细研究了间隙参数对气动弹性响应的影响.

关键词: 间隙和立方非线性; 平均法; 极限环; 幅值跳跃现象

中图分类号: V215.3⁺4; O322 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.01.001

引 言

空天飞行器与高超声速气流相互作用将导致一些显著的气动弹性现象. 这些现象将严重影响到飞行器的安全飞行. 此外, 下一代空天飞行器正朝着减轻重量、增大结构弹性的方向发展^[1-2]. 这都将导致飞行器的结构出现复杂的非线性特性.

飞行器结构中最常见的非线性是立方非线性和间隙非线性. 间隙非线性通常存在于接触机构中, 如控制面的铰链处、折叠式导弹翼面等^[3]; 而立方非线性主要是由弹性机翼的大变形导致的.

非线性因素的存在, 使得气动弹性系统在颤振点处发生了 Hopf 分岔. 飞行速度大于颤振速度时, 非线性系统将会出现极限环(LCO), 而不是线性系统的气动弹性失稳. 由于颤振失稳和大幅值的 LCO 都将导致飞行器结构的失效. 因此, 预测气动弹性系统的颤振点和 LCO 幅值对飞行器的结构设计是十分重要的.

最近对机翼气动弹性问题的研究, 主要集中在用数值或解析的方法研究含间隙的强非线性系统的动力学响应, 常见的方法有: 变换点法(PT)^[4]、连续数值运算法^[5]、中心流形^[6-7]、增量摄动法(PI)^[8]、同伦分析^[9]、增量谐波平衡法^[10]和描述函数法^[11]等等. Shen^[12]和 Yang^[13]分别用 KB 法和 KBM 法研究了非线性机翼的气动弹性问题.

* 收稿日期: 2011-06-02; 修订日期: 2011-09-18

作者简介: 郭虎伦(1984—), 男, 江西人, 博士生(E-mail: hulunguo@yahoo.cn);

陈予恕(1931—), 男, 山东肥城人, 教授, 院士(联系人. E-mail: yschen@hit.edu.cn).

此外,还有一些研究分析了结构非线性对气动弹性特性的影响. Kim 和 Lee^[14] 研究了一个含间隙非线性机翼的动力学响应. 他们发现俯仰-沉浮固有频率比对系统的 LCO 和混沌响应的的影响非常大. Dimitriadis^[15] 系统分析了亚声速流中非线性机翼的分岔及分岔后的动力学特性. Poincaré 映射和 Floquet 理论^[16] 也被用于分析含间隙和立方非线性二元机翼的 LCO 和混沌特性. Conner 等^[17], Tang 等^[18-20] 和 Liu 等^[21] 分别用直接积分或描述函数的方法,研究了含控制板间隙的三自由度机翼的 LCO 响应特性,并与实验结果进行了对比. 理论分析和实验结果都得到了超临界 Hopf 分岔、Fold 分岔和 LCO 的跳跃现象.

由于时间积分的方法不能精确地预测含间隙气动弹性系统的变换点. Lin 和 Cheng^[22] 及 Conner 等^[17] 详细阐述了获取变换点的重要性. 此外, 时间积分的方法也非常费时, 并且得不到不稳定的 LCO. 为了克服这些困难, 我们用平均法预测该变换点. 对于分段的非线性振动系统, 对振动方程在一个周期内取平均后, 可以很精确的得到变换点及其稳定和不稳定的周期解.

本文研究了超声速流中含间隙和立方非线性两自由度双楔机翼的动力学特性. 非常的气动力和气动力矩由活塞理论得到. 然后由平均法得到了系统的 LCO 幅值, 并用 Floquet 理论分析了 LCO 的稳定性. 最后, 详细研究了间隙参数对气动弹性响应的影响.

1 动力学模型

具有沉浮和俯仰两自由度双楔机翼模型如图 1 所示, 其非线性气动弹性方程为

$$\begin{cases} m\ddot{h} + S_\alpha\ddot{\alpha} + c_h\dot{h} + K_h h = -L, \\ S_\alpha\ddot{h} + I_\alpha\ddot{\alpha} + c_\alpha\dot{\alpha} + K_\alpha F(\alpha) = M_{EA}, \end{cases} \quad (1)$$

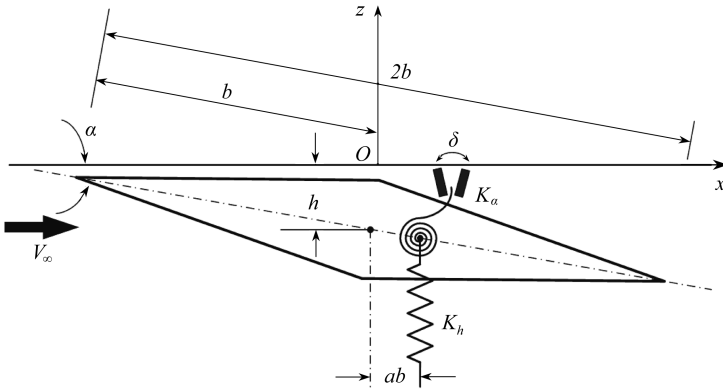


图 1 两自由度双楔机翼模型

Fig. 1 Two degree-of-freedom double-wedge airfoil geometry

其中, h 为沉浮自由度, 向下为正, α 为俯仰自由度, 迎风抬头为正, 符号上的点表示对时间 t 的导数, m 为单位展长机翼的质量, S_α 为机翼对弹性轴的质量静矩, I_α 为机翼对弹性轴的质量惯性矩, c_h, c_α, K_h 和 K_α 分别表示结构的阻尼和刚度系数, $F(\alpha)$ 为俯仰方向结构非线性函数, L 和 M_{EA} 为作用在机翼上的气动力和气动力矩.

由于活塞理论^[23] 可适用于超声速 \ 高超声速范围 ($M_\infty \geq \sqrt{2}$) 和较大的攻角范围 ($|\alpha| \leq \pi/6$)^[24]. 本文采用二阶活塞理论, 其气动力和气动力矩分别为^[25]

$$L = 4p_\infty \gamma M_\infty b \left(\frac{\dot{h}}{V_\infty} - ba \frac{\dot{\alpha}}{V_\infty} + \alpha \right) - p_\infty \gamma (\gamma + 1) M_\infty^2 b^2 \hat{\tau} \left(\frac{\dot{\alpha}}{V_\infty} \right), \quad (2)$$

$$M_{EA} = p_\infty \gamma M_\infty b^2 \left[4 \left(a \frac{\dot{h}}{V_\infty} - \left(\frac{b}{3} + ba^2 \right) \frac{\dot{\alpha}}{V_\infty} + a\alpha \right) + (\gamma + 1) M_\infty \hat{\tau} \left(\frac{\dot{h}}{V_\infty} - 2ba \frac{\dot{\alpha}}{V_\infty} + \alpha \right) \right]. \quad (3)$$

引入如下无量纲参数:

$$\xi = h/b, \quad \tau = V_\infty t/b, \quad \chi_\alpha = S_\alpha/(mb), \quad r_\alpha^2 = I_\alpha/(mb^2),$$

$$\omega_\xi = \sqrt{K_h/m}, \quad \omega_\alpha = \sqrt{K_\alpha/I_\alpha},$$

$$\zeta_\xi = c_h/(2(K_h m)^{1/2}), \quad \zeta_\alpha = c_\alpha/(2(K_\alpha I_\alpha)^{1/2}),$$

$$V^* = V_\infty/(b\omega_\alpha), \quad \bar{\omega} = \omega_\xi/\omega_\alpha,$$

$$\mu = m/(4\rho_\infty b^2), \quad \hat{\tau} = t_h/b, \quad p_\infty = \rho_\infty c_\infty^2/\gamma,$$

可得无量纲的气动弹性方程:

$$\begin{cases} \xi'' + \chi_\alpha \alpha'' + 2 \frac{\zeta_\xi \bar{\omega}}{V^*} \xi' + \frac{\bar{\omega}^2}{V^{*2}} \xi = -\bar{L}(\tau), \\ \frac{\chi_\alpha}{r_\alpha^2} \xi'' + \alpha'' + 2 \frac{\zeta_\alpha}{V^*} \alpha' + \frac{1}{V^{*2}} F(\alpha) = \bar{M}_{EA}(\tau), \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\bar{L}(\tau) = \frac{1}{4\mu M_\infty} \{ 4(\xi' - a\alpha' + \alpha) - (\gamma + 1)\hat{\tau}M_\infty \alpha' \},$$

$$\bar{M}_{EA}(\tau) = \frac{1}{4\mu M_\infty r_\alpha^2} \left\{ 4 \left[a\xi' - \left(\frac{1}{3} + a^2 \right) \alpha' + a\alpha \right] + (\gamma + 1)\hat{\tau}M_\infty (\xi' - 2a\alpha' + \alpha) \right\}.$$

本文同时考虑了间隙和立方非线性,其结构非线性函数为

$$F(\alpha) = F_1(\alpha) + F_2(\alpha), \quad (5)$$

其中, $F_1(\alpha)$ 为间隙非线性, $F_2(\alpha)$ 为立方非线性.

间隙非线性可写成如下形式^[26]:

$$F_1(\alpha) = \begin{cases} M_0 + \alpha - \alpha_f, & \alpha < \alpha_f, \\ M_0 + M_f(\alpha - \alpha_f), & \alpha_f \leq \alpha \leq \alpha_f + \delta, \\ M_0 + \alpha - \alpha_f + \delta(M_f - 1), & \alpha > \alpha_f + \delta, \end{cases} \quad (6)$$

其中, M_0, M_f, α_f 和 δ 都是常数. 图 2 为间隙函数简图, 共分为 3 个区域, $\Phi_i (i = 1, 2, 3)$.

立方非线性函数为

$$F_2(\alpha) = \hat{\eta}_\alpha \alpha^3, \quad (7)$$

其中 $\hat{\eta}_\alpha$ 为非线性刚度系数.

取定参数 $M_f = 0.1$, $\alpha_f = 0.1$, $\delta = 0.1$ 和 $\hat{\eta}_\alpha = 10$, 间隙和立方非线性函数简图如图 3 所示. 由图可知, 立方非线性为主要的非线性因素, 而间隙非线性在量上的影响较弱. 本文将主要研究间隙非线性对气动弹性响应特性的影响.

令 $x_1 = \xi, x_2 = \xi', x_3 = \alpha, x_4 = \alpha'$, 则方程(4)可写成如下—阶微分方程组的形式:

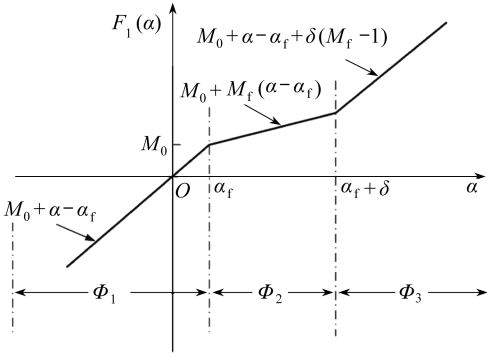


图2 间隙函数简图

Fig. 2 General sketch of a freeplay stiffness

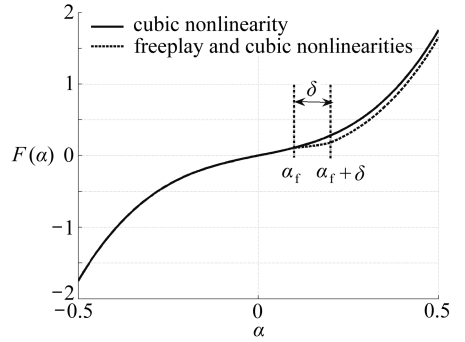


图3 间隙和立方非线性

Fig. 3 The freeplay and cubic nonlinearities

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = \frac{1}{\hat{r}}(N_{11}x_1 + N_{12}x_2 + N_{13}x_3 + N_{14}x_4) + \frac{\chi_\alpha F(x_3)}{\hat{r}V^{*2}}, \\ x_3' = x_4, \\ x_4' = \frac{1}{\hat{r}}(N_{21}x_1 + N_{22}x_2 + N_{23}x_3 + N_{24}x_4) - \frac{F(x_3)}{\hat{r}V^{*2}}, \end{cases} \quad (8)$$

系数 \hat{r} 和 N_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4$) 为系统参数和 Mach 数的函数, 其表达式详见于附录.

2 解析分析

Nayfeh 和 Mook^[27-28] 用平均法研究了多种非线性系统的自由振动、强迫振动和自激振动, 得到了多种相关振动特性. 本文用平均法研究机翼的 LCO 响应. 考虑到系统为自激振动, 可将方程(8)的周期解设为

$$x_1 = a_1 \cos \varphi_1, \quad x_2 = -\omega a_1 \sin \varphi_1, \quad x_3 = a_2 \cos \varphi_2, \quad x_4 = -\omega a_2 \sin \varphi_2, \quad (9)$$

其中

$$\varphi_1 = \omega\tau + \theta_1, \quad \varphi_2 = \omega\tau + \theta_2.$$

将式(9)代入方程(8)可得

$$\begin{cases} \hat{r}\omega\dot{a}_1 = -\hat{r}\omega^2 a_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - N_{11}a_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + N_{12}\omega a_1 \sin^2 \varphi_1 - \\ N_{13}a_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 + N_{14}\omega a_2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 - \frac{\chi_\alpha}{V^{*2}} F \sin \varphi_1, \\ \hat{r}\omega a_1 \dot{\theta}_1 = -\hat{r}\omega^2 a_1 \cos^2 \varphi_1 - N_{11}a_1 \cos^2 \varphi_1 + N_{12}\omega a_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - \\ N_{13}a_2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + N_{14}\omega a_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \frac{\chi_\alpha}{V^{*2}} F \cos \varphi_1, \\ \hat{r}\omega\dot{a}_2 = -\hat{r}\omega^2 a_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 - N_{21}a_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + N_{22}\omega a_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - \\ N_{23}a_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 + N_{24}\omega a_2 \sin^2 \varphi_2 + \frac{1}{V^{*2}} F \sin \varphi_2, \\ \hat{r}\omega a_2 \dot{\theta}_2 = -\hat{r}\omega^2 a_2 \cos^2 \varphi_2 - N_{21}a_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + N_{22}\omega a_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \\ N_{23}a_2 \cos^2 \varphi_2 + N_{24}\omega a_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + \frac{1}{V^{*2}} F \cos \varphi_2. \end{cases} \quad (10)$$

当系统收敛到 LCO 时, a_1, θ_1, a_2 和 θ_2 为慢变函数, 对其在一个周期内积分可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{r}\omega\dot{a}_1 = \frac{1}{2} N_{12}\omega a_1 + \frac{1}{2} N_{13}a_2 \sin \theta + \frac{1}{2} N_{14}\omega a_2 \cos \theta + \frac{1}{2} \chi_\alpha Z(a_2) a_2 \sin \theta, \\ \hat{r}\omega a_1 \dot{\theta}_1 = -\frac{1}{2} \hat{r}\omega^2 a_1 - \frac{1}{2} N_{11}a_1 - \\ \quad \frac{1}{2} N_{13}a_2 \cos \theta + \frac{1}{2} N_{14}\omega a_2 \sin \theta - \frac{1}{2} \chi_\alpha Z(a_2) a_2 \cos \theta, \\ \hat{r}\omega\dot{a}_2 = -\frac{1}{2} N_{21}a_1 \sin \theta + \frac{1}{2} N_{22}\omega a_1 \cos \theta + \frac{1}{2} N_{24}\omega a_2, \\ \hat{r}\omega a_2 \dot{\theta}_2 = -\frac{1}{2} \hat{r}\omega^2 a_2 - \frac{1}{2} N_{21}a_1 \cos \theta - \\ \quad \frac{1}{2} N_{22}\omega a_1 \sin \theta - \frac{1}{2} N_{23}a_2 + \frac{1}{2} Z(a_2) a_2, \end{array} \right. \quad (11)$$

其中

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1 = \theta_2 - \theta_1,$$

$$Z(a_2) = \frac{2}{a_2 V^{*2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \cos \varphi_2 d\omega\tau = \frac{2}{a_2 V^{*2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F_1 + F_2) \cos \varphi_2 d\omega\tau.$$

立方非线性部分的积分为

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2 \cos \varphi_2 d\omega\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\eta}_\alpha a_2^3 \cos^4 \varphi_2 d\omega\tau = \frac{3}{8} \hat{\eta}_\alpha a_2^3.$$

间隙函数的积分可分 3 种情况讨论.

$$1) a_2 > \alpha_f + \delta$$

这种情况下, LCO 将在区域 Φ_1, Φ_2 和 Φ_3 中存在(如图 2), 因此有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1 \cos \varphi_2 d\omega\tau &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_{f+\delta}} (M_0 + a_2 \cos \varphi_2 - \alpha_f + \delta(M_f - 1)) \cos \varphi_2 d\omega\tau + \\ &\frac{1}{\pi} \int_{\varphi_{f+\delta}}^{\varphi_f} (M_0 + M_f(a_2 \cos \varphi_2 - \alpha_f)) \cos \varphi_2 d\omega\tau + \\ &\frac{1}{\pi} \int_{\varphi_f}^{\pi} (M_0 + a_2 \cos \varphi_2 - \alpha_f) \cos \varphi_2 d\omega\tau = \\ &\frac{(M_f - 1)a_2}{2\pi} \left[\varphi_f - \varphi_{f+\delta} - \frac{1}{2}(\sin 2\varphi_f - \sin 2\varphi_{f+\delta}) \right] + \frac{1}{2} a_2, \end{aligned}$$

其中

$$\varphi_f = \arccos\left(\frac{\alpha_f}{a_2}\right), \quad \varphi_{f+\delta} = \arccos\left(\frac{\alpha_f + \delta}{a_2}\right).$$

$$2) \alpha_f \leq a_2 \leq \alpha_f + \delta$$

这种情况下, LCO 只存在于区域 Φ_1 和 Φ_2 中, 因此有 $\varphi_{f+\delta} = 0$, 则

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1 \cos \varphi_2 d\omega\tau = \frac{(M_f - 1)a_2}{2\pi} \left(\varphi_f - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_f \right) + \frac{1}{2} a_2.$$

$$3) a_2 < \alpha_f$$

这种情况下, LCO 只存在于区域 Φ_1 , 因此有 $\varphi_f = \varphi_{f+\delta} = 0$, 则

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1 \cos \varphi_2 d\omega\tau = \frac{1}{2} a_2.$$

注意到,这种情况对应的是无间隙状态.

因此,积分后的非线性函数 $Z(a_2)$ 可为

$$Z(a_2) = \begin{cases} \frac{1}{V^{*2}} + \frac{3}{4V^{*2}} \hat{\eta}_\alpha a_2^2, & a_2 < \alpha_f, \\ \frac{1}{V^{*2}} + \frac{3}{4V^{*2}} \hat{\eta}_\alpha a_2^2 - \frac{1 - M_f}{\pi V^{*2}} \left(\varphi_f - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_f \right), & \alpha_f \leq a_2 \leq \alpha_f + \delta, \\ \frac{1}{V^{*2}} + \frac{3}{4V^{*2}} \hat{\eta}_\alpha a_2^2 - \frac{1 - M_f}{\pi V^{*2}} \left(\varphi_f - \varphi_{f+\delta} - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_f + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{f+\delta} \right), & a_2 > \alpha_f + \delta, \end{cases} \quad (12)$$

由于 M_0 不存在函数 $Z(a_2)$ 中,故 M_0 不影响机翼的 LCO 响应.

为求定常解,可令 $\dot{a}_1 = \dot{\theta}_1 = \dot{a}_2 = \dot{\theta}_2 = 0$, 则由方程(11)可得

$$\begin{cases} N_{12}\omega a_1 + N_{13}a_2 \sin \theta + N_{14}\omega a_2 \cos \theta + \chi_\alpha Z(a_2) a_2 \sin \theta = 0, \\ -\hat{\Gamma}\omega^2 a_1 - N_{11}a_1 - N_{13}a_2 \cos \theta + N_{14}\omega a_2 \sin \theta - \chi_\alpha Z(a_2) a_2 \cos \theta = 0, \\ -N_{21}a_1 \sin \theta + N_{22}\omega a_1 \cos \theta + N_{24}\omega a_2 = 0, \\ -\hat{\Gamma}\omega^2 a_2 - N_{21}a_1 \cos \theta - N_{22}\omega a_1 \sin \theta - N_{23}a_2 + Z(a_2) a_2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

为方便求解,做如下变换:

$$b_1 = a_1 \cos \theta, \quad b_2 = a_1 \sin \theta. \quad (14)$$

则方程(13)可改写为

$$\hat{\Gamma}\omega^2 b_2 + N_{11}b_2 - N_{12}\omega b_1 - N_{14}\omega a_2 = 0, \quad (15)$$

$$\hat{\Gamma}\omega^2 b_1 + N_{11}b_1 + N_{12}\omega b_2 + N_{13}a_2 + \chi_\alpha Z(a_2) a_2 = 0, \quad (16)$$

$$-N_{21}b_2 + N_{22}\omega b_1 + N_{24}\omega a_2 = 0, \quad (17)$$

$$\hat{\Gamma}\omega^2 a_2 + N_{21}b_1 + N_{22}\omega b_2 + N_{23}a_2 - Z(a_2) a_2 = 0. \quad (18)$$

将方程(17)代入方程(15)、(16)和(18),消去 b_2 可得

$$N_{21}(N_{12}b_1 + N_{14}a_2) - (\hat{\Gamma}\omega^2 + N_{11})(N_{22}b_1 + N_{24}a_2) = 0, \quad (19)$$

$$N_{21}[(\hat{\Gamma}\omega^2 + N_{11})b_1 + (\chi_\alpha Z + N_{13})a_2] + N_{12}\omega^2(N_{22}b_1 + N_{24}a_2) = 0, \quad (20)$$

$$[(\hat{\Gamma}\omega^2 - Z + N_{23})a_2 + N_{21}b_1]N_{21} + N_{22}\omega^2(N_{22}b_1 + N_{24}a_2) = 0. \quad (21)$$

由方程(20)和(21)可得无量纲振动频率

$$\omega^2 = \frac{R_1 + R_2 Z(a_2)}{R_3}. \quad (22)$$

由方程(19)和(20)可得

$$R_4 \omega^4 + (R_5 + R_6 Z(a_2)) \omega^2 + R_7 + R_8 Z(a_2) = 0, \quad (23)$$

系数 $R_i (i = 1, 2, 3, \dots, 8)$ 的表达式见于附录中.

将方程(22)代入方程(23)可得

$$Q_1 Z^2(a_2) + Q_2 Z(a_2) + Q_3 = 0, \quad (24)$$

系数 $Q_i (i = 1, 2, 3)$ 的表达式见于附录中.

因此,积分后的非线性函数又可由方程(24)求得

$$Z(a_2) = \frac{-Q_2 \pm \sqrt{Q_2^2 - 4Q_1 Q_3}}{2Q_1}. \quad (25)$$

由方程(12)和(25)即可求得俯仰方向的 LCO 幅值 a_2 。然后将 a_2 代回方程(13)即可求得沉浮方向的 LCO 幅值及 LCO 的频率。

3 稳定性分析

上节已将方程(8)的周期解 \mathbf{X}_0 求出,其稳定性可由 Floquet 理论确定。将摄动解 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}$ 代入方程(8),并略去 $\delta\mathbf{X}$ 的高阶量,可得

$$\delta\mathbf{X}' = \mathbf{A}(\tau)\delta\mathbf{X}, \quad (26)$$

其中

$$\mathbf{A}(\tau) = D_{\mathbf{X}}f(\mathbf{X}_0).$$

因此,方程(8)的周期解的稳定性等价于方程(26)零解的稳定性。由 Floquet 理论可知,方程(26)零解的稳定性可由迁移矩阵 Φ 的特征值确定。迁移矩阵通常难以求得精确表达式,本文采用一种近似方法^[29-30]求其近似解。

将周期解的周期 $T = 2\pi/\omega$ 分为 N 个区间,每个区间的大小为 $\Delta = T/N$ 。其中,第 k 个区间可写为 $((k-1)\Delta, \Delta)$ 。当 Δ 足够小时,第 k 个区间内的时变矩阵 $\mathbf{A}(\tau)$ 可由常数矩阵 \mathbf{B}_k 代替。

$$\mathbf{B}_k = \frac{1}{\Delta} \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \mathbf{A}(\tau) d\tau = \frac{1}{\hat{r}} \begin{bmatrix} 0 & \hat{r} & 0 & 0 \\ N_{11} & N_{12} & N_{13} + \chi_\alpha R & N_{14} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{r} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} - R & N_{24} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

其中

$$R = \frac{3\hat{\eta}_\alpha a_2^2}{2V^{*2}} \left\{ \frac{N}{2\pi} \cos\left((2k-1)\frac{2\pi}{N} + 2\theta_2\right) \sin\frac{2\pi}{N} + 1 \right\} + \frac{f}{V^{*2}},$$

$$f = \begin{cases} 1, & a_2 \cos\left((2k-1)\frac{2\pi}{N} + \theta_2\right) < \alpha_f, \\ M_f, & \alpha_f \leq a_2 \cos\left((2k-1)\frac{2\pi}{N} + \theta_2\right) \leq \alpha_f + \delta, \\ 1, & a_2 \cos\left((2k-1)\frac{2\pi}{N} + \theta_2\right) > \alpha_f + \delta. \end{cases}$$

注意到气动弹性方程(8)为一自激振动系统,因此可令 $\theta_2 = 0$,则系数 R 和 f 可化简为

$$R = \frac{3\hat{\eta}_\alpha a_2^2}{2V^{*2}} \left\{ \frac{N}{2\pi} \cos\left((2k-1)\frac{2\pi}{N}\right) \sin\frac{2\pi}{N} + 1 \right\} + \frac{f}{V^{*2}},$$

$$f = \begin{cases} 1, & a_2 \cos\left((2k-1)\frac{2\pi}{N}\right) < \alpha_f, \\ M_f, & \alpha_f \leq a_2 \cos\left((2k-1)\frac{2\pi}{N}\right) \leq \alpha_f + \delta, \\ 1, & a_2 \cos\left((2k-1)\frac{2\pi}{N}\right) > \alpha_f + \delta. \end{cases}$$

因此,迁移矩阵可由下式近似求得:

$$\Phi = \prod_{i=1}^N \left[\mathbf{I} + \sum_{j=1}^{N_j} \frac{(\Delta \mathbf{B}_i)^j}{j!} \right], \quad (28)$$

其中, N_j 为常系数矩阵 \mathbf{B}_i 的 Taylor 展开项数, \mathbf{I} 为单位矩阵。

由矩阵 Φ 的特征值即可确定解的稳定性。若所有特征值的模都小于 1,则解是稳定;若有

一个特征值的模大于1,则是不稳定的.

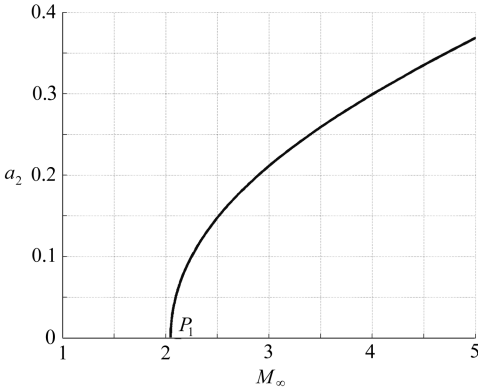
4 结果分析

前面两节中得到了气动弹性系统的周期解并分析了周期解的稳定性,下面将讨论系统在各种参数下的动力学响应.

本文的系统参数取值如下:

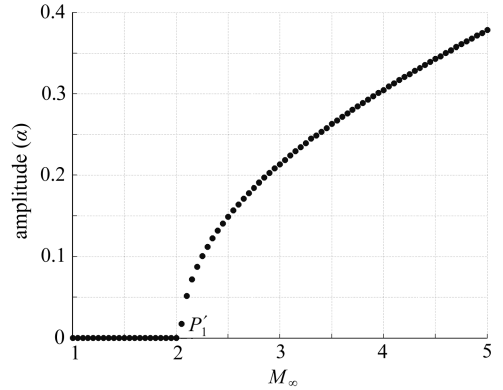
$$\begin{aligned} r_\alpha &= 0.5, \chi_\alpha = 0.25, \zeta_\xi = \zeta_\alpha = 0.05, c_\infty = 300 \text{ m/s}, \\ b &= 1 \text{ m}, \mu = 100, \gamma = 1.4, a = -0.15, \\ \hat{\tau} &= 0.05, \omega_\alpha = 80, \bar{\omega} = 0.8, \hat{\eta}_\alpha = 10. \end{aligned}$$

此外,间隙参数 M_f, α_f 和 δ 待定.



(a) 平均法结果

(a) Averaging method result

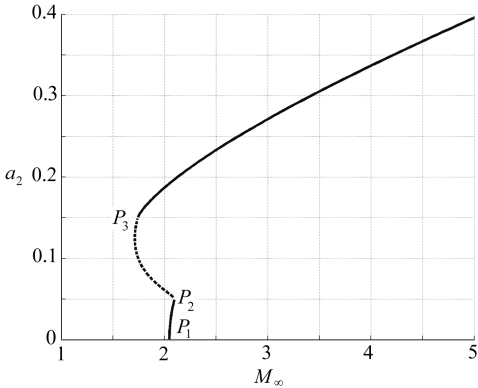


(b) 数值结果

(b) Numerical result

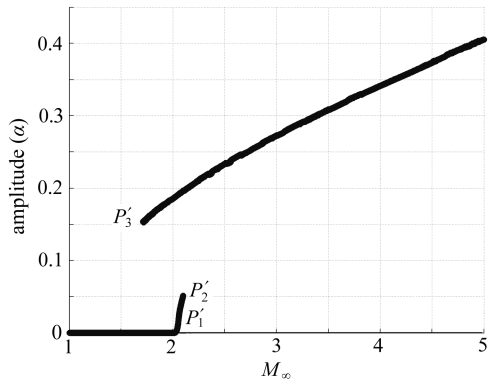
图4 LCO 幅值随 Mach 数的变化关系 ($\delta = 0$)

Fig.4 LCO amplitude in pitch vs. Mach number ($\delta = 0$)



(a) 平均法结果

(a) Averaging method result



(b) 数值结果

(b) Numerical result

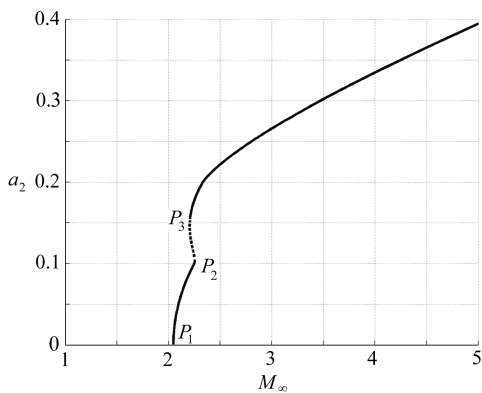
图5 LCO 幅值随 Mach 数的变化关系 ($M_f = 0.1, \delta = 0.1, \alpha_f = 0.05$)

Fig.5 LCO amplitude in pitch vs. Mach number ($M_f = 0.1, \delta = 0.1, \alpha_f = 0.05$)

当间隙小到可以忽略时,即 $\delta = 0$, 系统只有立方非线性. 图4(a)为由平均法得到动力学响应曲线. 由图可知,系统在 P_1 点 ($M_\infty = 2.1$) 发生超临界 Hopf 分岔后,出现了 LCO,并且 LCO 的幅值随 Mach 数的增大而增大. 图4(b)为数值结果. 其超临界 Hopf 分岔点 P'_1 ($M_\infty =$

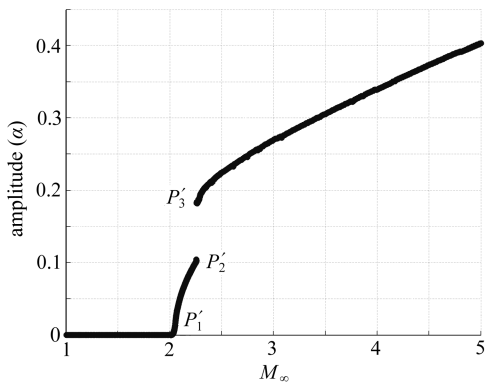
2.1) 和 LCO 的幅值与平均法的结果吻合的很好。

取间隙参数 $M_f = 0.1$, $\delta = 0.1$ 和 $\alpha_f = 0.05$, 结果如图 5 所示。其中, 图 5(a) 为平均法结果, 图 5(b) 为数值结果。图 5(a) 中实线为稳定 LCO, 虚线为不稳定 LCO。由图 4 和图 5 可得, 存在间隙后, Hopf 分岔点 P_1 没有改变, 即间隙不影响机翼的线性颤振速度。存在间隙后, 除了 Hopf 分岔点 P_1 外, 系统还存在两个 Fold 分岔点 P_2 和 P_3 。系统经过 Fold 分岔后, 将分岔出一个稳定 LCO 和一个不稳定 LCO, 并伴随出现 LCO 幅值的跳跃现象。Dimitriadis^[15] 用数值方法研究了含立方非线性二元机翼的极限环幅值的跳跃现象, 同时得到了 Fold 分岔点。LCO 幅值的跳跃现象将严重影响飞行器的安全飞行。之前的文献[2,26]表明, 存在亚临界 Hopf 分岔的机翼也会出现 LCO 幅值的跳跃现象。本文的研究表明, 存在间隙的机翼也会导致 LCO 幅值的跳跃。因此, 应避免机翼间隙的出现, 尤其须注意控制面板铰链的松动等容易出现间隙的位置。图 5(b) 的数值结果与平均法的结果吻合得很好。



(a) 平均法结果

(a) Averaging method result



(b) 数值结果

(b) Numerical result

图 6 LCO 幅值随 Mach 数的变化关系 ($M_f = 0.1$, $\delta = 0.1$, $\alpha_f = 0.1$)

Fig. 6 LCO amplitude in pitch vs. Mach number ($M_f = 0.1$, $\delta = 0.1$, $\alpha_f = 0.1$)

取间隙参数 $M_f = 0.1$, $\delta = 0.1$ 和 $\alpha_f = 0.1$, 结果如图 6 所示。其中, 图 6(a) 为平均法结果, 图 6(b) 为数值结果。图 6(a) 中实线为稳定 LCO, 虚线为不稳定 LCO。此时, 系统仍存在一个超临界 Hopf 分岔点 P_1 和两个 Fold 分岔点 P_2 和 P_3 。系统经过 Fold 分岔点后, 也会出现 LCO 幅值的跳跃现象。但此时跳跃现象是在两个 LCO 之间跳跃。图 6(b) 的数值结果也得到了 Hopf 分岔点和 Fold 分岔点, 与平均法的结果吻合的很好。

图 7 至图 9 给出了机翼俯仰方向的 LCO 幅值在不同间隙参数下的响应曲线。由此得到了各间隙参数对 LCO 响应特性的影响。

图 7 对应的间隙参数为 $\alpha_f = 0.1$, $\delta = 0.1$, M_f 分别取 0, 0.5 和 1。实线对应的为 $M_f = 1$ 的 LCO 响应曲线。此时, 也是一种无间隙状态, 系统不

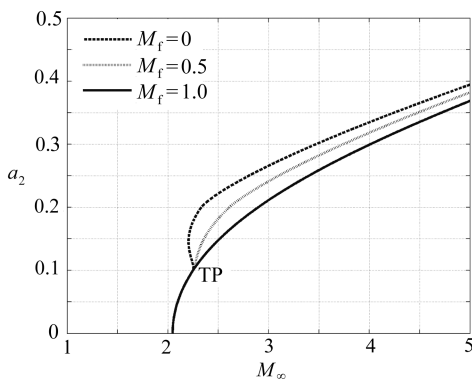


图 7 LCO 幅值随 Mach 数的变化关系 ($\delta = 0.1$, $\alpha_f = 0.1$)

Fig. 7 LCO amplitude in pitch vs. Mach number ($\delta = 0.1$, $\alpha_f = 0.1$)

存在幅值跳跃现象. 点线对应的为 $M_f = 0.5$ 的 LCO 响应曲线. 此时, 在 $a_2 = \alpha_f$ ($\alpha_f = 0.1$) 处为一变换点 (TP), 经过此点后, LCO 的幅值比无间隙时的大, 但该点处没有 Fold 分岔, 也无幅值的跳跃现象. 虚线对应的为 $M_f = 0$ 的 LCO 响应曲线. 此时, 在变换点处为 Fold 分岔, 对应的系统也出现了幅值的跳跃现象.

图 8 对应的间隙参数为 $M_f = 0.1$, $\delta = 0.1$, α_f 分别取 0.05, 0.1 和 0.15. 由图可知, 变换点随 α_f 的变化而变化. 实线对应的为 $\alpha_f = 0.15$ 的 LCO 响应曲线. 此时, 经过变换点后, 幅值增大了, 但没有出现跳跃现象. 点线对应的为 $\alpha_f = 0.1$ 的 LCO 响应曲线. 此时, 将会出现两个 LCO 之间的幅值跳跃现象. 虚线对应的为 $\alpha_f = 0.05$ 的 LCO 响应曲线. 此时, 也会出现 LCO 幅值的跳跃现象, 而且是在低于颤振速度的时候, 从零解突然跳跃到一个较大幅值的 LCO 上. 因此, 这种状况对飞行器安全飞行的危害尤其大. 此外, 由图 8 还可知, 间隙离平衡位置越近, LCO 幅值越大.

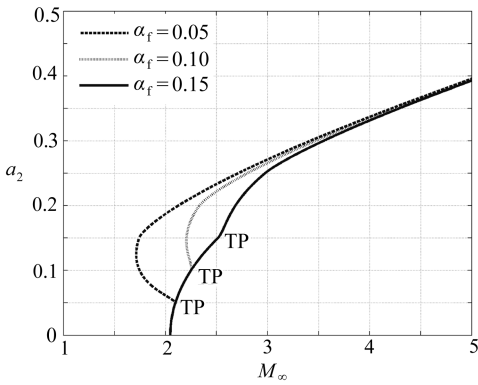


图 8 LCO 幅值随 Mach 数的变化关系
($M_f = 0.1$, $\delta = 0.1$)

Fig. 8 LCO amplitude in pitch vs. Mach number ($M_f = 0.1$, $\delta = 0.1$)

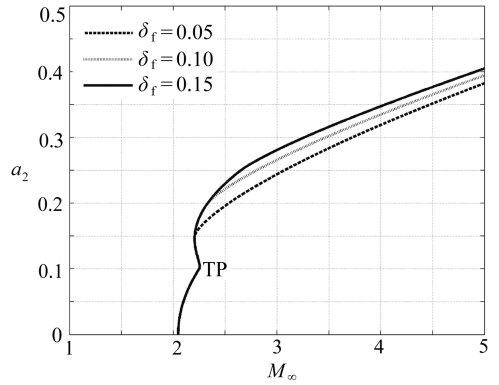


图 9 LCO 幅值随 Mach 数的变化关系
($M_f = 0.1$, $\alpha_f = 0.1$)

Fig. 9 LCO amplitude in pitch vs. Mach number ($M_f = 0.1$, $\alpha_f = 0.1$)

图 9 对应的间隙参数为 $\alpha_f = 0.1$, $M_f = 0.1$, δ 分别取 0.05, 0.1 和 0.15. 实线对应的为 $\delta = 0.15$ 的 LCO 响应曲线, 而点线和虚线分别对应 $\delta = 0.1$ 和 $\delta = 0.05$. 由图可知, δ 的变化没有改变变换点的特性, 3 种情况都存在跳跃现象. 但是减小间隙量 δ 可以降低幅值的跳跃量.

因此, 平均法可以有效地预测含间隙和立方非线性二元机翼的分岔点和 LCO 响应, 包括稳定的和不稳定的 LCO.

5 结 论

本文研究了超声速流中含间隙和立方非线性二元机翼的气动弹性响应. 首先, 由平均法得到了气动弹性方程的极限环响应, 然后用 Floquet 理论分析了极限环的稳定性. 在间隙系统得到了一个超临界 Hopf 分岔、两个 Fold 分岔和幅值的跳跃现象. 数值解与平均法的结果进行了对比, 两者吻合的很好. 最后, 详细研究了间隙参数对气动弹性响应的影响. 结果表明, 间隙可能会导致 LCO 幅值的跳跃现象. 但增大间隙的中心刚度或间隙的起始位置可以消除这种现象; 而改变间隙的大小却不能改变系统的跳跃特性, 减小间隙量可以减小 LCO 幅值的跳跃量.

附录

方程(8)的系数表达式:

$$\begin{aligned}\hat{r} &= 1 - \frac{\chi_\alpha^2}{r_\alpha^2}, N_{11} = -\frac{\bar{\omega}^2}{V^{*2}}, N_{12} = -2\frac{\bar{\omega}\zeta_\xi}{V^*} - \frac{1}{4\mu M_\infty r_\alpha^2}(4a\chi_\alpha + 4r_\alpha^2 + \chi_\alpha(\gamma + 1)\hat{\tau}M_\infty), \\ N_{13} &= -\frac{1}{4\mu M_\infty r_\alpha^2}(4a\chi_\alpha + 4r_\alpha^2 + \chi_\alpha(\gamma + 1)\hat{\tau}M_\infty), \\ N_{14} &= 2\frac{\chi_\alpha\zeta_\alpha}{V^*} + \frac{1}{4\mu M_\infty}(4a + (\gamma + 1)\hat{\tau}M_\infty) + \frac{\chi_\alpha}{6\mu M_\infty r_\alpha^2}(2(1 + 3a^2) + 3a(\gamma + 1)\hat{\tau}M_\infty), \\ N_{21} &= \frac{\chi_\alpha}{r_\alpha^2}\frac{\bar{\omega}^2}{V^{*2}}, N_{22} = 2\frac{\chi_\alpha}{r_\alpha^2}\frac{\bar{\omega}\zeta_\xi}{V^*} + \frac{1}{4\mu M_\infty r_\alpha^2}(4\chi_\alpha + 4a + (\gamma + 1)\hat{\tau}M_\infty), \\ N_{23} &= \frac{1}{4\mu M_\infty r_\alpha^2}(4\chi_\alpha + 4a + (\gamma + 1)\hat{\tau}M_\infty), \\ N_{24} &= -2\frac{\zeta_\alpha}{V^*} - \frac{\chi_\alpha}{4\mu M_\infty r_\alpha^2}(4a + (\gamma + 1)\hat{\tau}M_\infty) - \frac{1}{6\mu M_\infty r_\alpha^2}(2(1 + 3a^2) + 3a(\gamma + 1)\hat{\tau}M_\infty).\end{aligned}$$

方程(22)和(23)的系数表达式:

$$\begin{aligned}R_1 &= N_{14}N_{21} - N_{11}N_{24} + N_{22}N_{13} - N_{12}N_{23}, R_2 = N_{12} + \chi_\alpha N_{22}, \\ R_3 &= \hat{r}(N_{12} + N_{24}), R_4 = \hat{r}^2 N_{22}, \\ R_5 &= \hat{r}(N_{11}N_{22} + N_{22}N_{23} - N_{21}N_{12} - N_{21}N_{24}) + N_{22}(N_{14}N_{22} - N_{12}N_{24}), \\ R_6 &= -\hat{r}N_{22}, R_7 = N_{23}(N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21}) + N_{21}(N_{14}N_{21} - N_{11}N_{24}), \\ R_8 &= N_{12}N_{21} - N_{11}N_{22}.\end{aligned}$$

方程(24)的系数表达式:

$$\begin{aligned}Q_1 &= R_2^2 R_4 + R_2 R_3 R_6, \\ Q_2 &= 2R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_6 + R_2 R_3 R_5 + R_3^2 R_8, \\ Q_3 &= R_1^2 R_4 + R_1 R_3 R_5 + R_3^2 R_7.\end{aligned}$$

参考文献 (References):

- [1] Abbas L K, Qian C, Marzocca P, Zafer G, Mostafa A. Active aerothermoelastic control of hypersonic double-wedge lifting surface[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2008, **21**(1): 8-18.
- [2] Librescu L, Chiochia G, Marzocca P. Implications of cubic physical/aerodynamic nonlinearities on the character of the flutter instability boundary[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, **38**(2): 173-199.
- [3] Hyun D H, Lee I. Transonic and low-supersonic aeroelastic analysis of a two-degree-of-freedom airfoil with a freeplay non-linearity[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **234**(5): 859-880.
- [4] Liu L, Song Y S. Non-linear aeroelastic analysis using the point transformation method, part 1—freeplay model[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, **253**(2): 447-469.
- [5] Roberts I, Jones D P, Lieven N A J, Bernado M D, Champneys A R. Analysis of piecewise linear aeroelastic systems using numerical continuation[J]. *Journal of Aeronautical Engineering*, 2002, **216**(1): 1-11.
- [6] 陈衍茂, 刘济科. 非线性颤振系统中既是超临界又是亚临界的 Hopf 分岔点研究[J]. 应用数学

- 和力学, 2008, **29**(2): 181-187. (CHEN Yan-mao, LIU Ji-ke. Supercritical as well as subcritical Hopf bifurcation in nonlinear flutter systems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2008, **29**(2): 181-187.)
- [7] Liu L, Wong Y S, Lee B H K. Application of the center manifold theory in nonlinear aeroelasticity[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **234**(4): 641-659.
- [8] Chung K W, Chan C L, Lee B H K. Bifurcation analysis of a two-degree-of-freedom aeroelastic system with freeplay structural nonlinearity by a perturbation-incremental method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **299**(3): 520-539.
- [9] Chen Y M, Liu J K. Homotopy analysis method for limit cycle oscillations of an airfoil with cubic nonlinearities[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2010, **16**(2): 163-179.
- [10] Raghothama A, Narayanan S. Non-linear dynamics of a two-dimensional airfoil by incremental harmonic balance method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, **226**(3): 493-517.
- [11] Gordon J T, Meyer E E, Minogue R L. Nonlinear stability analysis of control surface flutter with free-play effects[J]. *Journal of Aircraft*, 2008, **45**(6): 1904-1916.
- [12] Shen S F. An approximate analysis of nonlinear flutter problems[J]. *Journal of the Aerospace Sciences*, 1959, **25**(1): 25-32.
- [13] Yang Y R. KBM method of analyzing limit cycle flutter of a wing with an external store and comparison with a wind-tunnel test[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **187**(2): 271-280.
- [14] Kim S H, Lee I. Aeroelastic analysis of a flexible airfoil with a freeplay nonlinearity[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, **193**(4): 823-846.
- [15] Dimitriadis G. Bifurcation analysis of aircraft with structural nonlinearity and freeplay using numerical continuation[J]. *Journal of Aircraft*, 2008, **45**(3): 893-905.
- [16] Zhao D M, Zhang Q C. Bifurcation and chaos analysis for aeroelastic airfoil with freeplay structural nonlinearity in pitch[J]. *Chinese Physics B*, 2010, **19**(3): 1-10.
- [17] Conner M D, Tang D M, Dowell E H, Virgin L N. Nonlinear behavior of a typical airfoil section with control surface freeplay: a numerical and experimental study[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1997, **11**(1): 89-109.
- [18] Tang D, Dowell E H. Flutter and limit-cycle oscillations for a wing-store model with freeplay [J]. *Journal of Aircraft*, 2006, **43**(2): 487-503.
- [19] Tang D, Dowell E H, Virgin L N. Limit cycle behavior of an airfoil with a control surface[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1998, **12**(7): 839-858.
- [20] Tang D, Conner M D, Dowell E H. Reduced-order aerodynamic model and its application to a nonlinear aeroelastic system[J]. *Journal of Aircraft*, 1998, **35**(2): 332-338.
- [21] Liu L, Dowell E H. Harmonic balance approach for an airfoil with a freeplay control surface [J]. *AIAA Journal*, 2005, **43**(4): 802-815.
- [22] Lin W B, Cheng W H. Nonlinear flutter of loaded lifting surfaces (I) and (II)[J]. *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, 1993, **14**(5): 446-466.
- [23] Ashley H, Zartarian G. Piston theory—a new aerodynamic tool for the aeroelastician[J]. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1956, **23**(12): 1109-1118.
- [24] Abbas L K, Chen Q, O'Donnell K, Valentine D, Marzocca P. Numerical studies of a non-linear aeroelastic system with plunging and pitching freeplays in supersonic/hypersonic regimes

- [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2007, **11**(5): 405-418.
- [25] Friedmann P P, McNamara J J, Thuruthimattam B J, Nydick I. Aeroelastic analysis of hypersonic vehicles[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2004, **19**(5): 681-712.
- [26] Lee B H K, Price S J, Wong Y S. Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos[J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 1999, **35**(3): 205-334.
- [27] Nayfeh A H, Mook D T. *Nonlinear Oscillations*[M]. 1st ed. New York: Wiley, 1979.
- [28] Nayfeh A H. *Perturbation Methods*[M]. 1st ed. New York: Wiley, 1973.
- [29] Friedmann P, Hammond C E, Woo T H. Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems[J]. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1977, **11**(7): 1117-1136.
- [30] Ge Z M, Chen H H. Bifurcations and chaotic motions in a rate gyro with a sinusoidal velocity about the spin axis[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, **200**(2): 121-137.

Dynamic Analysis of a Two-Degree-of-Freedom Airfoil With Freeplay and Cubic Nonlinearities in Supersonic Flow

GUO Hu-lun, CHEN Yu-shu

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: The nonlinear aeroelastic response of a two-dimensional airfoil with freeplay and cubic nonlinearities in supersonic flow were investigated. The second-order piston theory was employed to analyze a double wedge airfoil. Then, the fold bifurcation and the amplitude jump phenomenon were detected using averaging method and multi-variable Floquet theory. The analytical results were further verified by numerical simulations. Lastly, the influence of the freeplay parameters on the aeroelastic response was analyzed in detail.

Key words: freeplay and cubic nonlinearity; averaging method; limit cycle oscillations; amplitude jump phenomenon