

滑移垂直壁面驻点附近的 混合对流边界层流动*

F·阿曼¹, A·艾萨克², I·伯普³

- (1. 敦胡先翁工艺大学 遗产与艺术科学系,巴力拉惹 86400,峇株巴辖,柔佛,马来西亚;
2. 马来西亚国民大学 数学科学学院 科学技术系,万宜新 UKM 43600,雪兰莪,马来西亚;
3. 克鲁日大学 数学系,克鲁日 R-3400,CP 253,罗马尼亚)

摘要: 就粘性不可压缩流体,研究垂直壁面的滑移,对壁面驻点附近稳定混合对流边界层流动的影响.假定表面温度和外部流动速度与到驻点的距离呈线性变化.首先,将偏微分的控制方程,转变为常微分方程组,然后应用打靶法进行数值求解.对不同数值的控制参数,按分顺流和逆流两种情况,分析和讨论了流动特性和热传导特征.结果表明,逆流时,在浮力参数的某一范围内出现双解;顺流时,解是唯一的.一般而言,速度滑移导致壁面热传导率增大,而热滑移使之减小.

关键词: 双解; 传热; 混合对流; 驻点; 滑移

中图分类号: O357.4⁺1;O357.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.12.009

引 言

垂直壁面上不可压缩粘性流体的二维驻点流动,受到众多研究者的广泛关注,是因为在过去的几十年里,在工业和实际生产中有着广泛的应用,例如用风扇给电子设备致冷、核反应堆紧急关闭时的冷却、易受风流影响的太阳能中央接收器,以及很多水动力学的作用^[1].

大量的研究发现,朝向垂直平板的驻点流动问题存在双解. Ramachandran 等^[2]分任意的壁面温度和任意的表面热通量变化两种情形,研究加热表面周围二维驻点流动的层状混合对流. 他们发现,在浮力反作用流动区出现逆向流动,在浮力参数某一范围内,存在双解. Devi 等^[3]将该问题延伸到非稳定流动,得到了与 Ramachandran 等^[2]报告相似的结果. Nazar 等^[4]进一步将该问题拓展到微极流体,外部速度与伸展速度之比,分取小值和取大值两种情况. 朱婧等^[5]研究朝向伸展表面的、不可压缩粘性流体稳定的二维驻点流动,应用同伦分析法进行求解. Hassanién 和 Gorla^[6]研究了非等温表面上微极流体的驻点流动. Lok 等^[7]研究了微极流体非稳定的混合对流,他们发现,最初非稳定的流动,最终可以平滑地转换为稳定流动. 最近, Ishak 等^[8]报道,导电流体流过垂直可渗透平板时,顺流和逆流两种情况下存在双解. 值得指出的是,考虑壁面滑移影响的、驻点流动的研究还不多见. Wang^[9]对一个朝向滑移平板的驻点流

* 收稿日期: 2010-01-17; 修订日期: 2011-09-21

作者简介: Anuar Ishak(联系人. Tel: +603-8921-5756; Fax: +603-8925-4519;

E-mail: anuarishak@yahoo.com).

本文原文为英文,黄锋译,张禄坤校.

动,找到了 Navier-Stokes 方程的相似解,其解还适用于稀薄气体的滑移区域.随后,Wang^[10]将该问题拓展到包括热传导方面的问题,而 Ariel^[11]研究了粘弹性流体的驻点流动.Labropulu 和 Li^[12]研究了二级流体有滑移时的驻点流动.最近,朱婧等^[13]考虑了朝向非线性伸展表面的、稳定的二维磁流体动力学驻点流动.应用缩放变换群,将控制的偏微分方程转换为常微分方程,然后应用同伦分析法进行数值求解.Cao 和 Baker^[14]研究了滑移对垂直平板上混合对流和热传导的影响,得到了局部的非相似解.考虑到其它方面的影响,Fang 等^[15]对流过可渗透伸展表面(没有传热)的滑移流问题,应用二阶滑移流动模型求解,得到了 Navier-Stokes 控制方程的精确解.不久前,Fang 和 Zhang^[16]研究了传质伸展表面上的传热问题,流动是由伸展表面到槽口距离线性分布速度所引起.

本文计及边界滑移的影响,在垂直表面驻点附近,得到了混合对流边界层流动问题的相似解.分析和讨论了浮力和滑移参数对表面摩擦因数和热传导率的影响.Cao 和 Baker 在文献[14]中,考虑过均匀的自由流动速度和均匀的表面温度,是无法得到自相似解的.

1 问题的公式化

考虑垂直表面驻点附近,粘性不可压缩流体稳定的二维层状边界层流动.假设自由流速度为 $u_e(x)$,平板温度为 $T_w(x)$,周围流体温度为 T_∞ .边界层方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (3)$$

其中, u 和 v 分别为 x 和 y 方向上的速度分量, g 为重力加速度, T 为流体温度, β 为热膨胀系数, α 为热扩散系数.边界条件^[10,17-18]给出如下:

$$\begin{cases} u = L \frac{\partial u}{\partial y}, v = 0, T = T_w + S \frac{\partial T}{\partial y}, & y = 0, \\ u \rightarrow u_e, T \rightarrow T_\infty, & y \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4)$$

其中, L 为滑移长度, S 为比例常数.进一步假设

$$u_e = ax, T_w(x) = T_\infty + bx, \quad (5)$$

其中, a 和 b 为常数.

为了得到相似解,引入相似转换^[10,17,19]

$$\eta = (a/\nu)^{1/2}y, \psi = (a\nu)^{1/2}xf(\eta), \theta(\eta) = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty), \quad (6)$$

其中, η 为相似自变量, θ 为无量纲温度, ψ 为流函数,定义为 $u = \partial\psi/\partial y, v = -\partial\psi/\partial x$,连续方程(1)恒满足.将方程(6)代入方程(2)~(3),得到下面非线性常微分方程:

$$f''' + ff'' - f'^2 + 1 + \lambda\theta = 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' - f'\theta = 0, \quad (8)$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} f(0) = 0, f'(0) = \delta f''(0), \theta(0) = 1 + \gamma\theta'(0), \\ f'(\eta) \rightarrow 1, \theta(\eta) \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (9)$$

这里,上角撇号表示对 η 的导数, $Pr = \nu/\alpha$ 为 Prandtl 数, $\delta = L(a/\nu)^{1/2}$ 为速度滑移参数, $\gamma = S(a/\nu)^{1/2}$ 为热滑移参数, $\lambda (= g\beta b/a^2)$ 为混合对流参数. 值得一提的是, $\lambda > 0$ 时相当于顺流, $\lambda < 0$ 时相当于逆流, $\lambda = 0$ 时相当于强迫对流.

令人感兴趣的物理量为表面摩擦因数 C_f 和局部 Nusselt 数 Nu_x , 它们分别与 $f''(0)$ 和 $-\theta'(0)$ 成比例.

2 结果和讨论

应用 Zheng 等^[20]介绍的打靶法,在满足边界条件(9)时,求解非线性常微分方程组(7)和(8),这里速度滑移参数 δ 、热滑移参数 γ 、浮力或混合对流参数 λ 取若干数值,除了与先前的报道比较时,Prandtl 数 Pr 取固定值 0.7(如空气).

表 1 和表 2 分别给出了,简化了的表面摩擦因数 $f''(0)$ 和简化了的 Nusselt 数 $-\theta'(0)$ 的数值结果,与文献[2-3,6-7]所得结果的比较,其中 Pr 取几个不同的数值,没有考虑滑移的影响($\delta = 0, \gamma = 0$). 结果吻合得很好.

表 1 当 $\lambda = 1, \delta = 0, \gamma = 0$, Pr 取不同数值时的 $f''(0)$ 值

Table 1 Values of $f''(0)$ for different values of Pr when $\lambda = 1, \delta = 0$ and $\gamma = 0$

Pr	reference[2]	reference[3]	reference[7]	reference[6]	present results
0.7	1.706 3	1.706 4	1.706 4	1.706 32	1.706 3
1	-	-	-	-	1.675 4
7	1.517 9	1.518 0	1.518 0	-	1.517 9
10	-	-	-	1.492 84	1.492 8
20	1.448 5	1.448 5	1.448 6	-	1.448 5
40	1.410 1	-	1.410 2	-	1.410 1
50	-	-	-	1.406 86	1.398 9
60	1.390 3	1.390 3	1.390 3	-	1.390 3
80	1.377 4	-	1.377 3	-	1.377 4
100	1.368 0	1.368 0	1.367 7	1.384 71	1.368 0

表 2 当 $\lambda = 1, \delta = 0, \gamma = 0$, Pr 取不同数值时的 $-\theta'(0)$ 值

Table 2 Values of $-\theta'(0)$ for different values of Pr when $\lambda = 1, \delta = 0$ and $\gamma = 0$

Pr	reference[2]	reference[3]	reference[7]	reference[6]	present results
0.7	0.764 1	0.764 1	0.764 1	0.764 06	0.764 1
1	-	-	-	-	0.870 8
7	1.722 4	1.722 3	1.722 6	-	1.722 4
10	-	-	-	1.944 61	1.944 6
20	2.457 6	2.457 4	2.457 7	-	2.457 6
40	3.101 1	-	3.102 3	-	3.101 1
50	-	-	-	3.348 82	3.341 5
60	3.551 4	3.551 7	3.556 0	-	3.551 4
80	3.909 5	-	3.919 5	-	3.909 5
100	4.211 6	4.211 3	4.228 9	4.233 72	4.211 6

图 1 和图 2 分别显示了速度滑移参数 δ , 对简化了的表面摩擦因数(壁面剪切应力) $f''(0)$ 和简化了的局部 Nusselt 数 $-\theta'(0)$ 的影响. 而图 3 和图 4 分别显示了, 热滑移参数 γ 对 $f''(0)$ 和 $-\theta'(0)$ 的影响. 从这 4 幅图形明显地看到, 浮力逆流时 ($\lambda < 0$) 存在双解, 而顺流时 ($\lambda >$

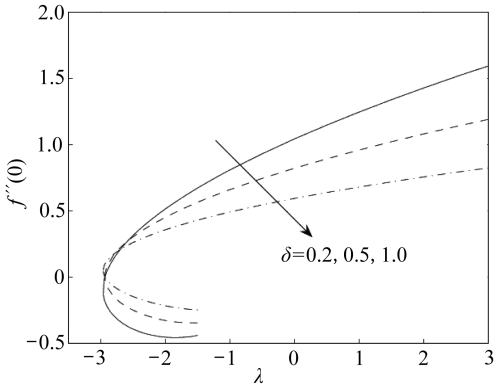


图 1 当 $Pr = 0.7, \gamma = 1$, 速度滑移参数 δ 取不同数值时, 表面摩擦因数 $f''(0)$ 随浮力参数 λ 的变化

Fig.1 Variation of the skin friction coefficient $f''(0)$ with buoyancy parameter λ for different values of the velocity slip parameter δ when $Pr = 0.7, \gamma = 1$

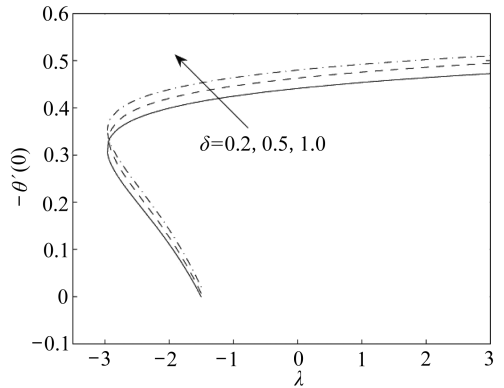


图 2 当 $Pr = 0.7, \gamma = 1$, 速度滑移参数 δ 取不同数值时, 局部 Nusselt 数 $-\theta'(0)$ 随浮力参数 λ 的变化

Fig.2 Variation of the local Nusselt number $-\theta'(0)$ with buoyancy parameter λ for different values of the velocity slip parameter δ when $Pr = 0.7, \gamma = 1$

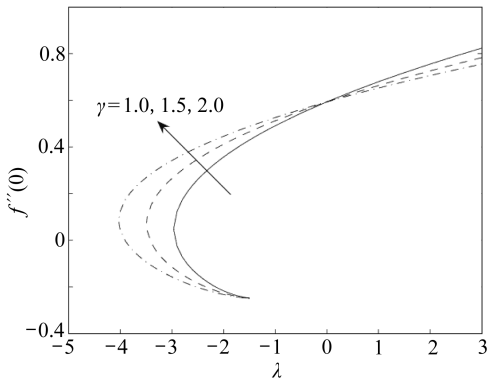


图 3 当 $Pr = 0.7, \delta = 1$, 热滑移参数 γ 取不同数值时, 表面摩擦因数 $f''(0)$ 随浮力参数 λ 的变化

Fig.3 Variation of the skin friction coefficient $f''(0)$ with buoyancy parameter λ for different values of the thermal slip parameter γ when $Pr = 0.7, \delta = 1$

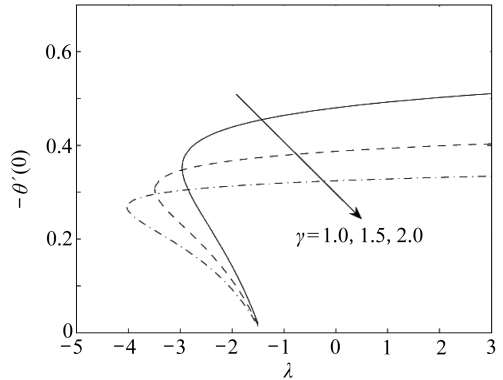


图 4 当 $Pr = 0.7, \delta = 1$, 热滑移参数 γ 取不同数值时, 局部 Nusselt 数 $-\theta'(0)$ 随浮力参数 λ 的变化

Fig.4 Variation of the local Nusselt number $-\theta'(0)$ with buoyancy parameter λ for different values of the thermal slip parameter γ when $Pr = 0.7, \delta = 1$

0) 解是唯一的。下面我们讨论为什么图 1~4 出现上支解和下支解, 即对一个给定的 λ 值, 上支解的 $f''(0)$ 和 $-\theta'(0)$ 值, 大于下支解的相应值。可以发现, 上支解随着浮力参数 λ 的增大, $f''(0)$ 和 $-\theta'(0)$ 都是增大的, 这是因为浮力造成速度的增大。而在下支解中这种趋势正好相反。一般对上支解来说, 速度滑移参数 δ 的增大, 导致壁面剪切应力的减小, 使壁面热传导率增大。相反由图 4 看到, 壁面的热传导率随着热滑移参数 γ 的增大而减小。从图 2 和图 4 中可以发现, 对本文所考虑的所有参数值, $-\theta'(0) > 0$, 意味着热量是从热的壁面传向冷的流体。

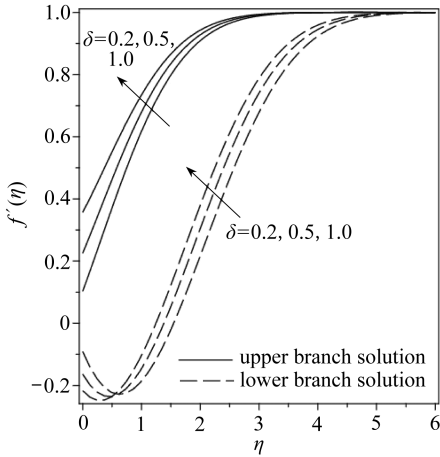


图5 当 $Pr = 0.7$, $\gamma = 1$, $\lambda = -2.0$, δ 取不同数值时的速度分布曲线 $f'(\eta)$

Fig. 5 Velocity profiles $f'(\eta)$ for some values of δ when $Pr = 0.7$, $\gamma = 1$ and $\lambda = -2.0$

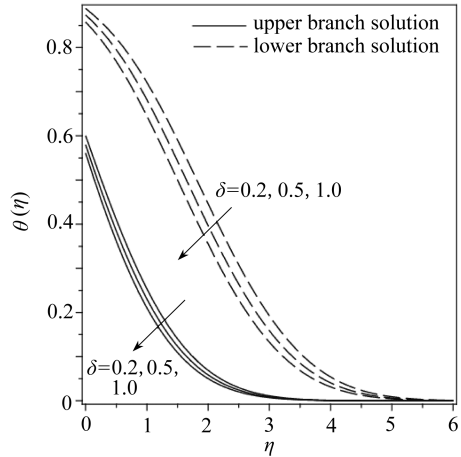


图6 当 $Pr = 0.7$, $\gamma = 1$, $\lambda = -2.0$, δ 取不同数值时的温度分布曲线 $\theta(\eta)$

Fig. 6 Temperature profiles $\theta(\eta)$ for some values of δ when $Pr = 0.7$, $\gamma = 1$ and $\lambda = -2.0$

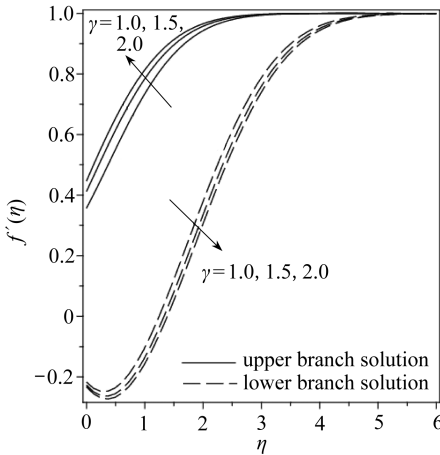


图7 当 $Pr = 0.7$, $\delta = 1$, $\lambda = -2.0$, γ 取不同数值时的速度分布曲线 $f'(\eta)$

Fig. 7 Velocity profiles $f'(\eta)$ for some values of γ when $Pr = 0.7$, $\delta = 1$ and $\lambda = -2.0$

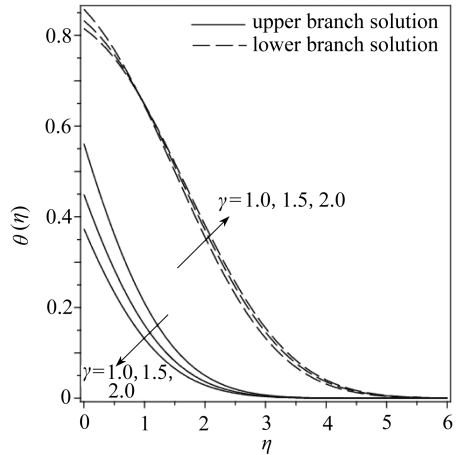


图8 当 $Pr = 0.7$, $\delta = 1$, $\lambda = -2.0$, γ 取不同数值时的温度分布曲线 $\theta(\eta)$

Fig. 8 Temperature profiles $\theta(\eta)$ for some values of γ when $Pr = 0.7$, $\delta = 1$ and $\lambda = -2.0$

对于每个给定的 δ 和 γ 值(见图 1 ~ 4), λ 存在一个临界值 λ_c , 使解存在. 由计算可知, 当 $\delta = 0.2, 0.5$ 和 1.0 时, 分别有 $\lambda_c = -2.960 0$, $-2.936 1$ 和 $-2.961 3$ (见图 1 和图 2); 当 $\gamma = 1.0, 1.5$ 和 2.0 时, 分别有 $\lambda_c = -2.961 3$, $-3.489 0$ 和 $-4.026 6$ (见图 3 和图 4). 值得指出的是, 一直计算到该临界点, 其解并不收敛, 在该临界点结束计算. 还应该指出滑移造成的影响, 它缩小了 λ 有解的范围.

图 5 和图 6 就 $\lambda = -2.0$, 速度滑移参数 δ 取不同数值时, 分别绘出了速度分布曲线和温度分布曲线的上下两支解. 图 7 和图 8 对不同的热滑移参数 γ 值, 分别绘出了速度分布曲线和温度分布曲线. 显而易见, 与下支解相比, 上支解边界层厚度较薄. 可以发现, 上支解壁面速度梯度随着 δ 的增大而减小, 结果造成表面摩擦因数 $f''(0)$ 的减小. 图 5 ~ 8 显示, 边界条件(9)渐近地得到满足, 因此数值解的有效性得到验证, 图 1 ~ 4 中双解的存在也得到了证明.

3 结 论

本文数值地研究了,有滑移影响的垂直壁面驻点附近的流动和热传导特性.应用相似转换,将流动边界层控制方程简化为常微分方程.数值求解这些方程,得到表面摩擦因数和局部 Nusselt 数,并且,就 Prandtl 数 Pr 取一个固定值,速度滑移参数 δ 、热滑移参数 γ 和浮力参数 λ 取不同数值时,得到速度分布曲线和温度分布曲线.可以发现,逆流 ($\lambda < 0$) 时,(在浮力参数的某一范围内) 存在双解,反之,顺流 ($\lambda > 0$) 时,存在唯一解.此外,滑移造成的影响,使有解的 λ 范围减小.一般而言,速度滑移导致壁面热传导率增大,而热滑移使之减小.

致谢 作者衷心地感谢审稿人对本文提出的宝贵意见.感谢马来西亚国民大学的财政资助(UKM-GUP-2011-202).

参考文献:

- [1] Ishak A, Nazar R, Pop I. Mixed convection on the stagnation point flow toward a vertical, continuously stretching sheet[J]. *J Heat Trans T ASME*, 2007, **129**(8):1087-1090.
- [2] Ramachandran N, Chen T S, Armaly B F. Mixed convection in stagnation flows adjacent to vertical surfaces[J]. *J Heat Trans T ASME*, 1988, **110**(2): 373-377.
- [3] Devi C D S, Takhar H S, Nath G. Unsteady mixed convection flow in stagnation region adjacent to a vertical surface[J]. *Heat Mass Transf*, 1991, **26**(2): 71-79.
- [4] Nazar R, Amin N, Filip D, Pop I. Stagnation point flow of a micropolar fluid towards a stretching sheet[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 2004, **39**(7): 1227-1235.
- [5] 朱婧,郑连存,张欣欣. 具有延伸表面的驻点流动和传热问题的级数解[J]. *应用数学和力学*, 2009, **30**(4): 432-442. (ZHU Jing, ZHENG Lian-cun, ZHANG Xin-xin. Analytical solution to stagnation-point flow and heat transfer over a stretching sheet based on homotopy analysis [J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2009, **30**(4): 463-474.)
- [6] Hassanien I A, Gorla R S R. Combined forced and free convection in stagnation flows of micropolar fluids over vertical non-isothermal surfaces[J]. *Int J Eng Sci*, 1990, **28**(8): 783-792.
- [7] Lok Y Y, Amin N, Pop I. Unsteady mixed convection flow of a micropolar fluid near the stagnation point on a vertical surface[J]. *Int J Thermal Sci*, 2006, **45**(12): 1149-1157.
- [8] Ishak A, Nazar R, Bachok N, Pop I. MHD mixed convection flow near the stagnation-point on a vertical permeable surface[J]. *Physica A*, 2010, **389**(1): 40-46.
- [9] Wang C Y. Stagnation flows with slip: exact solutions of the Navier-Stokes equations[J]. *Z Angew Math Phys*, 2003, **54**(1): 184-189.
- [10] Wang C Y. Stagnation slip flow and heat transfer on a moving plate[J]. *Chem Eng Sci*, 2006, **61**(23): 7668 -7672.
- [11] Ariel P D. Two dimensional stagnation point flow of an elastic-viscous fluid with partial slip [J]. *Z Angew Math Mech*, 2008, **88**(4): 320-324.
- [12] Labropulu F, Li D. Stagnation-point flow of a second-grade fluid with slip[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 2008, **43**(9): 941-947.
- [13] 朱婧,郑连存,张志刚. 幂律速度运动表面上磁流体在驻点附件的滑移流动[J]. *应用数学和力学*, 2010, **31**(4): 411-419. (ZHU Jing, ZHENG Lian-cun, ZHANG Zhi-gang. The effect of the slip condition on the MHD stagnation-point over a power-law stretching sheet[J]. *Applied*

- Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2010, **31**(4): 439-448.)
- [14] Cao K, Baker J. Slip effects on mixed convective flow and heat transfer from a vertical plate [J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2009, **52**(15/16): 3829-3841.
- [15] Fang T, Yao S, Zhang J, Aziz A. Viscous flow over a shrinking sheet with a second order slip flow model[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2010, **15**(7): 1831-1842.
- [16] Fang T, Zhang J. Thermal boundary layers over a shrinking sheet: an analytical solution[J]. *Acta Mech*, 2010, **209**(3/4): 325-343.
- [17] Andersson H I. Slip flow past a stretching surface[J]. *Acta Mech*, 2002, **158**(1/2): 121-125.
- [18] Mukhopadhyay S. Effects of slip on unsteady mixed convective flow and heat transfer past a porous stretching surface[J]. *Nucl Eng Des*, 2011, **241**: 2660-2665.
- [19] Ishak A, Nazar R, Pop I. Mixed convection stagnation point flow of a micropolar fluid towards a stretching sheet[J]. *Meccanica*, 2008, **43**(4): 411-418.
- [20] Zheng L C, Liang C, Zhang X X. A numerical method for solving the boundary layer equations of laminar natural convection about a vertical plate[J]. *J Univ Sci Technol Beijing*, 2007, **14**(1): 33-35.

Mixed Convection Boundary Layer Flow Near the Stagnation Point on a Vertical Surface With Slip

Fazlina Aman¹, Anuar Ishak², Ioan Pop³

- (1. *Faculty of Science, Arts and Heritage, Universiti Tun Hussein Onn Malaysia, 86400 Parit Raja, Batu Pahat, Johor, Malaysia;*
2. *School of Mathematical Sciences, Faculty of Science and Technology, Universiti Kebangsaan Malaysia, 43600 UKM Bangi, Selangor, Malaysia;*
3. *Faculty of Mathematics, University of Cluj, R-3400 Cluj, CP 253, Romania)*

Abstract: A steady mixed convection boundary layer flow of a viscous and incompressible fluid near the stagnation point on a vertical surface with slip effect at the boundary was considered. The temperature of the sheet and the velocity of the external flow were assumed to vary linearly with the distance from the stagnation point. The governing partial differential equations were first transformed into a system of ordinary differential equations, which was then solved numerically by a shooting method. The features of the flow and heat transfer characteristics for different values of the governing parameters were analyzed and discussed. Both assisting and opposing flows were considered. The results indicate that for the opposing flow, dual solutions exist for a certain range of the buoyancy parameter, while for the assisting flow, the solution is unique. In general, the velocity slip increases the heat transfer rate at the surface, while the thermal slip decreases it.

Key words: dual solutions; heat transfer; mixed convection; stagnation point; slip