

微极流体蠕动泵经由滑移边界 管道输送的 Stokes 流动*

D·特里帕蒂¹, M·K·乔伯², P·K·古泊塔³

- (1. 印度博拉理工学院 海德拉巴校园 数学系, 海德拉巴 500078, 印度;
2. 清莱库莫戈埃尔技术学院 数学系, 加济阿巴德 201001, 印度;
3. 瓦拉纳西印度教大学 应用数学系, 瓦拉纳西 221005, 印度)

(林建忠推荐)

摘要: 计及管道边界条件滑移的影响, 研究微极流体蠕动泵, 经由圆柱形管道运输的 Stokes 流动. 壁面运动的控制方程为正弦波方程. 使用润滑理论, 得到了轴向速度、微转动向量、流函数、压力梯度、摩擦力和机械效率的解析数值解. 用图形表示出构成参数, 如像耦合参数、微极参数和表征蠕流泵特性的滑移参数、摩擦力和俘获现象的影响. 数值计算表明, 当耦合参数较大时, 需要蠕动泵的压力更大, 而微极参数和滑移参数正相反. 俘获团块的大小随耦合参数和微极参数的减小而缩小, 而随滑移参数的增大而缩小.

关键词: Stokes 流动; 微极流体; 滑移边界条件; 蠕动泵; 机械效率; 俘获

中图分类号: O357.2; O368 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.12.008

引 言

Stokes 流动是一类惯性力小于粘滞力流体的流动. 在 Stokes 流动中, Reynolds 数非常小, 流体速度很缓慢, 而粘性很大, 或者说流动长度的比例尺很小. Stokes 流动的研究发端于润滑问题. 自然界中这类流动出现于微生物和精子的游动以及岩浆的流动.

把流体泵叫做蠕动泵是因为, 它诱导产生的收缩波或膨胀波, 沿着包含流体的管道壁滑移推进. 特别出现在, 尿液从肾脏到膀胱的流动、通过食道吞咽的食物、胃肠系统中食糜的运动、子宫内流体的运动、男性生殖系统输精管中精子的流动、女性输卵管中卵子的运动、淋巴管中淋巴液的输送以及微血管(如细动脉、细静脉和毛细血管中)血液的流动中. 它们都是使用蠕动运动来实现的运动. 因此, 滚筒式和指式泵也都是使用这个原理抽吸流体.

大家知道, 在自然界中, 大多数生理流体是非 Newton 流体. 在生理流体的几个非 Newton 流体模型当中, Eringen^[1]引入的微极流体模型比较特别, 在一个粘稠的介质中, 刚性的、随机导向的(或球形的)悬浮颗粒组成了流体, 颗粒的变形忽略不计. 微极流体展示了一些精细的影响: 显示出流体单元的局部结构和微运动, 此外, 它们能够承受耦合应力. 小动脉中的血液流

* 收稿日期: 2011-01-30; 修订日期: 2011-07-18

作者简介: Dharmendra Tripathi(联系人. E-mail: dtripathi.rs.apm@itbhu.ac.in).

本文原文为英文, 吴承平译, 张禄坤校.

动被认为是微极流体模型,速度分布的理论计算和实验数据吻合良好.一些作者^[2-11]在不同情况下,对不同几何形状的流动区域,研究了极微流体的蠕动输运.他们讨论了耦合参数和微极参数,对蠕动流模式的影响.最近,文献[12-24]报道了,在不同模式的蠕动泵作用下,研究非 Newton 流体的 Stokes 流动.

在上述提到的研究中,问题的公式化均使用无滑移的边界条件.无滑移边界条件广泛用于非 Newton 流体通过固体边界时的流动.然而,我们发现,一大类高分子材料在固体边界上会出现滑移或粘性滑移.例如,当高分子熔液所使用的压力梯度,在产量突然增加时达到一个临界压力梯度.在真实的系统中,总是有一些滑移的,无论如何,实验上间隙难于消除.无滑移边界条件是壁面附近粘性流体行为的一个方便的理想.与流动流体相关的边界条件,在预测流体流动的很多应用中是非常重要的.在很多应用中,相应于滑移流动的流动模式,支撑在潮湿壁面上的流体出现缺失,造成流体沿壁面的滑移.一些研究^[25-29],考虑了滑移边界条件下的蠕动输运.据作者所知还没有人研究,在滑移边界条件下,采用微极流体蠕动泵流过圆柱形管道的 Stokes 流动.本文的目的是采用该模型,填补这一文献的空白.该模型更广泛地应用于生物工程流动、工业流体输运、流变学、地球物理流动和生物医学科学等领域.

1 问题的数学公式及其解

设参考系 (r', θ', x') 和 (r, θ, x) 分别为固定坐标系和波动坐标系,固定坐标系和波动坐标系间的变换关系为

$$r = r', \quad x = x' - ct, \quad v = v', \quad u = u' - c, \quad (1)$$

其中, (v', u') 为固定坐标系中径向和轴向速度分量, (v, u) 为波动坐标系中径向和轴向速度分量, c 为波速.

在波动坐标系中,没有体力和体力偶时,不可压缩微极流体流动的控制方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla p + \kappa \nabla \times \mathbf{W} + (\mu + \kappa) \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (3)$$

$$\rho j(\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{W}) = -2\kappa \mathbf{W} + \kappa \nabla \times \mathbf{V} - \gamma(\nabla \times \nabla \times \mathbf{W}) + (\alpha + \beta + \gamma) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{W}), \quad (4)$$

其中, $\mathbf{V} = (v, 0, u)$ 为速度向量, $\mathbf{W} = (0, \omega, 0)$ 为微转动向量, p 为流体压力, ρ 为流体密度, j 为微回转变数. 常量 $\mu, \kappa, \alpha, \beta$ 和 γ 为材料常数,并满足如下不等式

$$2\mu + \kappa \geq 0, \quad \kappa \geq 0, \quad 3\alpha + \beta + \gamma \geq 0, \quad \gamma \geq |\beta|. \quad (5)$$

在参考的波动坐标系中,壁面的运动方程为

$$H = a + b \sin \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (6)$$

取无量纲变量:

$$\begin{cases} \bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\lambda}, \quad \bar{u} = \frac{u}{c}, \quad \bar{v} = \frac{\lambda}{ca} v, \quad \bar{\omega} = \frac{a}{c} \omega, \\ \bar{p} = \frac{a^2}{\lambda c \mu} p, \quad \bar{t} = \frac{c}{\lambda} t, \quad \bar{h} = \frac{H}{a}, \quad \bar{j} = \frac{j}{a^2}. \end{cases} \quad (7)$$

将方程(7)代入方程(2)~(4)、(6),并略去字母顶上的横线,得

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

$$Re\delta^3 \left(v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\delta^2}{1-N} \left(-N \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \quad (9)$$

$$Re\delta\left(v\frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{1-N}\left(\frac{N}{r}\frac{\partial(r\omega)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \delta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \quad (10)$$

$$\frac{jRe\delta(1-N)}{N}\left(v\frac{\partial \omega}{\partial r} + u\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = -2\omega + \left(\delta^2\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{2-N}{m^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\omega)}{\partial r}\right) + \delta^2\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right], \quad (11)$$

$$h(x) = 1 + \phi \sin(2\pi x), \quad (12)$$

其中, $\delta = a/\lambda$ 为波数, $\phi = b/a$ 为波幅, $Re = \rho ac/\mu$ 为 Reynolds 数, $N = \kappa/(\mu + \kappa)$ 为耦合参数 ($0 \leq N < 1$), $m = a^2\kappa(2\mu + \kappa)/(\gamma(\mu + \kappa))$ 为微极参数, 微转动向量 \mathbf{W} 为螺线向量时, 控制方程中不出现 α 和 β . 取极限 $\kappa \rightarrow 0$, 即 $N \rightarrow 0$, 控制方程简化为经典的 Navier-Stokes 方程.

假设应用于长波 ($\delta \ll 1$), 同时以低 Reynolds 数 ($Re \rightarrow 0$) (即 Stokes 流) 近似, 方程(8) ~ (11) 简化为

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{N}{r}\frac{\partial(r\omega)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = (1-N)\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (15)$$

$$2\omega + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2-N}{m^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\omega)}{\partial r}\right) = 0. \quad (16)$$

波动坐标系中相应的边界条件为

对称条件

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \text{在 } r = 0, \quad (17)$$

滑移的边界条件

$$u = -1 - k_n \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \text{在 } r = h, \quad (18)$$

$$\omega = 0, \quad \text{在 } r = h, \quad (19)$$

$$u = 0, \quad \omega = 0, \quad \text{在 } r = 0, \quad (20)$$

其中, $k_n (= L/a)$ 为无量纲的滑移参数, L 为有量纲的滑移参数.

显然, 由方程(14)可见, p 仅为 x 的函数, 方程(15)可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u}{\partial r} + Nr\omega - (1-N)\frac{r^2}{2}\frac{dp}{dx}\right] = 0. \quad (21)$$

积分方程(21)并除以 r , 得

$$\frac{\partial u}{\partial r} = (1-N)\left[\frac{r}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{C_1}{r}\right] - N\omega. \quad (22)$$

将方程(22)代入方程(16), 得

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r} - \left(m^2 + \frac{1}{r^2}\right)\omega = \frac{m^2(1-N)}{2-N}\left[\frac{r}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{C_1}{r}\right]. \quad (23)$$

方程(23)的一般解为

$$\omega = C_2(x)I_1(mr) + C_3(x)K_1(mr) - \frac{1-N}{2-N}\left[\frac{r}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{C_1}{r}\right]. \quad (24)$$

其中, $I_1(mr)$ 和 $K_1(mr)$ 分别为一阶、第一类和第二类修正的 Bessel 函数. 将方程(24)代入方程(22)并积分之, 得到轴向速度为

$$u = \frac{N}{m} [-C_2(x)I_0(mr) + C_3(x)K_0(mr)] + \frac{1-N}{2-N} \left(\frac{r^2}{2} \frac{dp}{dx} + 2C_1(x) \ln r \right) + C_4(x), \quad (25)$$

其中, I_0 和 K_0 分别为零阶、第一类和第二类修正 Bessel 函数. 因要求 ω 在 $r=0$ 上有限, 所以方程(24)中的 $C_1(x) = C_2(x) = 0$. 将方程(18)~(19)代入方程(25), 则轴向速度和微转动速度分别为

$$u = -1 + \frac{1-N}{2(2-N)} \frac{dp}{dx} \left[r^2 - h^2 - 2hk_n + hNk_n + \frac{Nh}{mI_1(mh)} (I_0(mh) - I_0(mr)) \right], \quad (26)$$

$$\omega = \frac{1-N}{2(2-N)} \frac{dp}{dx} \left[\frac{hI_1(mr)}{I_1(mh)} - r \right]. \quad (27)$$

定义流函数 ψ 为

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (28)$$

利用方程(26)、(28), 有

$$\psi = -\frac{r^2}{2} + \frac{1-N}{2(2-N)} \frac{dp}{dx} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{h^2 r^2}{2} - hk_n r^2 + \frac{hNk_n r^2}{2} + \frac{Nh}{mI_1(mh)} \left(\frac{r^2}{2} I_0(mh) - \frac{r}{m} I_1(mr) \right) \right]. \quad (29)$$

无量纲流量 ($q = q' / (\pi a^2 c)$, q' 为波动坐标系中的流量) 为

$$q = \int_0^h 2rudr = -h^2 - \frac{1-N}{4(2-N)} \frac{dp}{dx} [h^4 + f(h)], \quad (30)$$

其中

$$f(h) = \frac{4Nh}{m} \left[\frac{(h/m)I_1(mh) - (h^2/2)I_0(mh)}{I_1(mh)} \right] + 2(2-N)h^3 k_n. \quad (31)$$

由方程(30), 得到压力梯度为

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{4(2-N)}{1-N} \left[\frac{q + h^2}{h^4 + f(h)} \right]. \quad (32)$$

在一个波长上, 积分方程(32), 得

$$\Delta p = p_1 - p_0 = -\frac{4(2-N)}{1-N} (qL_1 + L_2), \quad (33)$$

其中

$$L_1 = \int_0^1 \frac{dx}{h^4 + f(h)}, \quad L_2 = \int_0^1 \frac{h^2 dx}{h^4 + f(h)}.$$

在固定坐标系中, 一个周期里无量纲时间的平均流量 \bar{Q} 为

$$\bar{Q} = \frac{1}{T} \int_0^T (q + h^2) dt = q + q_1, \quad (34)$$

其中 $q_1 = \int_0^1 h^2 dx$.

由方程(33)和(34),可得

$$\Delta p = -\frac{4(2-N)}{1-N}((\bar{Q} - q_1)L_1 + L_2), \quad (35)$$

或
$$\bar{Q} = q_1 - \frac{L_2}{L_1} - \frac{1-N}{4(2-N)} \frac{\Delta p}{L_1}. \quad (36)$$

微极流体非零的无量纲剪应力为

$$\tau_{zr} = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{N}{1-N} \omega, \quad (37)$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{1-N} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{N}{1-N} \omega. \quad (38)$$

管道内壁的无量纲摩擦力 F , 应用方程(37)在一个波长上积分,得到

$$F = -2 \int_0^1 h(x) (\tau_{zr})_{r=h} dx = -2 \int_0^1 h(x) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=h} dx. \quad (39)$$

将方程(26)中的 u 值代入方程(39),并利用方程(32)和(36),得

$$F = -(1-N) \int_0^1 h^2 \frac{dp}{dx} dx = 4(2-N) \left(L_3 - \frac{L_2^2}{L_1} \right) - (1-N) \Delta p \frac{L_2}{L_1}, \quad (40)$$

其中
$$L_3 = \int_0^1 \frac{h^4 dx}{h^4 + f(h)}.$$

定义机械效率:每波长平均流量克服运动流体的压力差所做的功,与壁面在流体上所做功的平均值之比(参见 Shapiro 等的文献[30]).于是,导出微极流体的机械效率为

$$E = \frac{\bar{Q} \Delta p}{2\pi\phi \left[-\int_0^1 \frac{dp}{dx} \sin(2\pi x) dx - \frac{\phi}{4} \Delta p + \frac{\phi}{4} \int_0^1 \frac{dp}{dx} \cos(4\pi x) dx \right]}. \quad (41)$$

2 数值结果和讨论

本节给出了数值计算的结果及其图形,研究耦合参数 N 、微极参数 m 、表征蠕动泵特性的滑移参数 k_n 、管道壁面摩擦力 F 以及俘获现象的影响.当压力差为0时($\Delta p = 0$)称为自由蠕动泵,此时的平均流量 \bar{Q} 表示为 \bar{Q}_0 .克服最大压力做功,即相应于 $\bar{Q} = 0$ 时的 Δp 值,记为 p_0 .当 $0 < \Delta p \leq p_0$ 时,称为蠕动泵,而当 $\Delta p < 0$ 时,称为协蠕动泵.将压力的3种情况(蠕动泵、自由泵、协蠕动泵)下的区域称为蠕动泵区、自由蠕动泵区和协蠕动泵区.

图1~图3给出了压力增量随着平均流量的变化,显示了 N, m, k_n 的影响.由这些图形可以看出,在蠕动泵区($0 < \Delta p \leq p_0$),压力增量随着耦合参数 N 的增大而增大,但随着微极参数 m 和滑移参数 k_n 的增大而减小.图1~图3还可以看出,微极流体的蠕动泵区($0 < \Delta p \leq p_0$)比 Newton 流体的蠕动泵区要大得多.图1显示,随着 N 的增大,在区域 $\bar{Q} \leq 0.48$ 中压力增量在增大,而在区域 $\bar{Q} > 0.48$ 中压力增量反而在减小.图2表明,随着 m 的增大,在区域 $\bar{Q} \leq 0.48$ 中压力增量在减小,而在区域 $\bar{Q} > 0.48$ 中压力增量反而在增大.从图1和图3可以定性地判断, k_n 对压力增量的影响,与 N 的影响正相反.表1~表3显示了自由蠕动泵时流量 \bar{Q}_0 随 N, m, k_n 的变化.可以发现, \bar{Q}_0 随着 N 的增大而增大(表1),而随着 k_n 的增大而减小(表3).表2显示,开始时 \bar{Q}_0 随着 m 的增大而增大,增大到一定阶段后,反而出现减小.本文所得到的结果,可

以分别简化为:取 $k_n = 0$ 时,得到 Srinivasacharya 等^[3]的结果,取 $N = 0, k_n = 0$ 时,得到 Shapiro 等^[30]的结果.

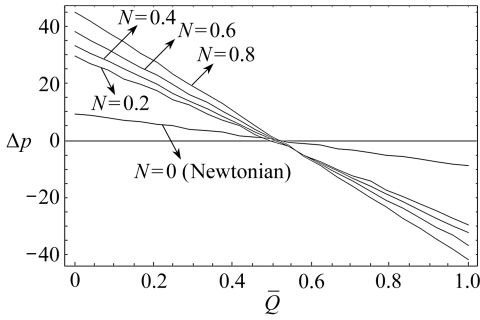


图 1 当 $\phi = 0.4, m = 2.0, k_n = 0$ 时,压力增量 Δp 随平均流量 \bar{Q} 的变化

Fig. 1 Pressure rise versus averaged flux rate for $\phi = 0.4, m = 2.0$ and $k_n = 0$

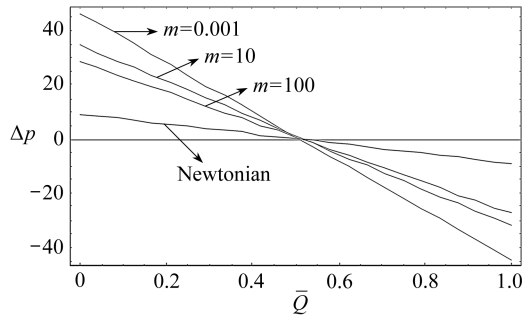


图 2 当 $\phi = 0.4, N = 0.8, k_n = 0$ 时,压力增量 Δp 随平均流量 \bar{Q} 的变化

Fig. 2 Pressure rise versus averaged flux rate for $\phi = 0.4, N = 0.8$ and $k_n = 0$

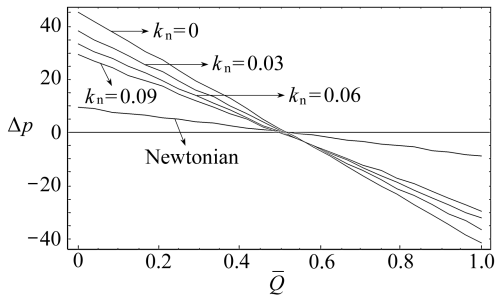


图 3 当 $\phi = 0.4, N = 0.8, m = 2.0$ 时,压力增量 Δp 随平均流量 \bar{Q} 的变化

Fig. 3 Pressure rise versus averaged flux rate for $\phi = 0.4, N = 0.8$ and $m = 2.0$

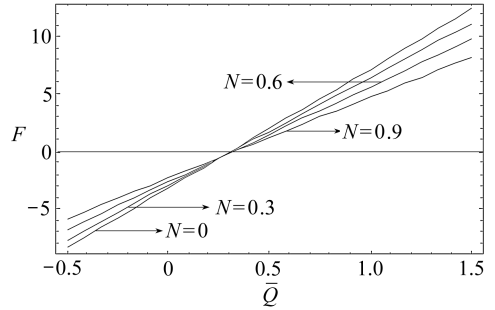


图 4 当 $\phi = 0.4, m = 10, k_n = 0$ 时,壁面摩擦力 F 随平均流量 \bar{Q} 的变化

Fig. 4 The friction force at the wall versus averaged flux rate for $\phi = 0.4, m = 10$ and $k_n = 0$

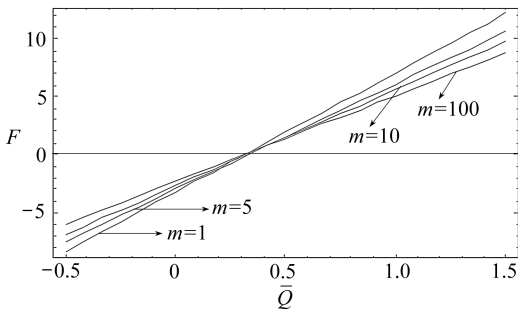


图 5 当 $\phi = 0.4, N = 0.6, k_n = 0$ 时,壁面摩擦力 F 随平均流量 \bar{Q} 的变化

Fig. 5 The friction force at the wall versus averaged flux rate for $\phi = 0.4, N = 0.6$ and $k_n = 0$

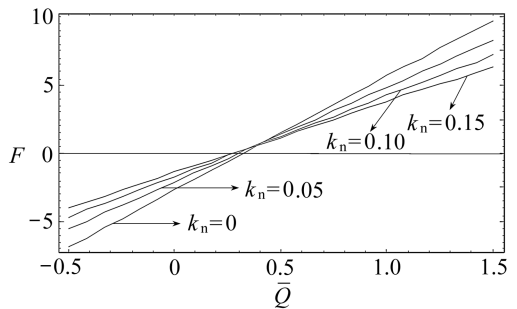


图 6 当 $\phi = 0.4, N = 0.6, m = 10$ 时,壁面摩擦力 F 随平均流量 \bar{Q} 的变化

Fig. 6 The friction force at the wall versus averaged flux rate for $\phi = 0.4, N = 0.6$ and $m = 10$

表 1 当 $\phi = 0.4$, $m = 2$, $k_n = 0$, 对不同的 N 值时, 自由蠕动泵的流量值 \bar{Q}_0 Table 1 Values of flow rate \bar{Q}_0 in the free pumping for different values of N
(the other parameters are $\phi = 0.4$, $m = 2$, $k_n = 0$)

parameter N	0	0.4	0.6	0.8
\bar{Q}_0	0.510 968	0.514 003	0.516 031	0.518 570

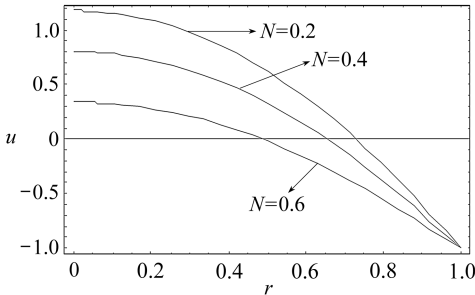
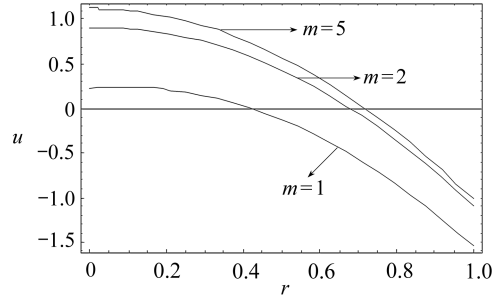
表 2 当 $\phi = 0.4$, $N = 0.4$, $k_n = 0$ 时, 对不同的 m 值, 自由蠕动泵的流量值 \bar{Q}_0 Table 2 Values of flow rate \bar{Q}_0 in the free pumping for different values of m
(the other parameters are $\phi = 0.4$, $N = 0.4$, $k_n = 0$)

parameter m	0.001	1	10	100
\bar{Q}_0	0.510 968	0.512 014	0.515 575	0.511 606

表 3 当 $\phi = 0.4$, $m = 2$, $N = 0.4$ 时, 对不同的 k_n 值, 自由蠕动泵的流量值 \bar{Q}_0 Table 3 Values of flow rate \bar{Q}_0 in the free pumping for different values of k_n
(the other parameters are $\phi = 0.4$, $m = 2$, $N = 0.4$)

parameter k_n	0	0.03	0.06	0.09
\bar{Q}_0	0.514 003	0.505 206	0.498 080	0.492 175

图 4 ~ 图 6 给出了磨擦力 F 随着平均流量 \bar{Q} 的变化, 分别显示出 N, m, k_n 的影响. 从这些图形可以看出, \bar{Q} 存在一个临界值, 小于此临界值时, F 阻碍流体的流动, 大于此临界值时, F 促进流体的流动. \bar{Q} 的临界值随着 N 和 k_n 的增大而减小 (分别见表 4 和表 6), 随着 m 的增大而增大 (见表 5). 当 \bar{Q} 低于该临界值时, N, m 和 k_n 增大, 磨擦力 F 也增大. 可是, 当 \bar{Q} 高于该临界值时, N, m 和 k_n 增大, 磨擦力 F 反而减小.

图 7 当 $\phi = 0.4$, $k_n = 0$, $m = 10$, $x = 0.5$, $dp/dx = -10$, N 取不同数值时, 轴向速度 u 随径向距离 r 的变化Fig. 7 The axial velocity versus radial distance for $\phi = 0.4$, $k_n = 0$, $m = 10$, $x = 0.5$ and $dp/dx = -10$ 图 8 当 $\phi = 0.4$, $k_n = 0$, $N = 0.2$, $x = 0.5$, $dp/dx = -10$, m 取不同数值时, 轴向速度 u 随径向距离 r 的变化Fig. 8 The axial velocity versus radial distance for $\phi = 0.4$, $k_n = 0$, $N = 0.2$, $x = 0.5$ and $dp/dx = -10$ 表 4 当 $\phi = 0.4$, $m = 2$, $k_n = 0$ 时, 参数 N 取不同数值时 \bar{Q} 的临界值Table 4 Critical values of \bar{Q} below which F resists the flow and above which it assists the flow for different values of N (the other parameters are $\phi = 0.4$, $m = 2$, $k_n = 0$)

parameter N	0	0.4	0.6	0.8
\bar{Q}	0.156 960	0.148 538	0.145 845	0.144 668

表5 当 $\phi = 0.4, N = 0.4, k_n = 0$ 时, 参数 m 取不同数值时 \bar{Q} 的临界值

Table 5 Critical values of \bar{Q} below which F resists the flow and above which it assists the flow for different values of m (the other parameters are $\phi = 0.4, N = 0.4, k_n = 0$)

parameter m	0.001	2	10	100
\bar{Q}	0.140 145	0.148 538	0.159 460	0.157 375

表6 当 $\phi = 0.4, m = 2, N = 0.4$ 时, 参数 k_n 取不同数值时 \bar{Q} 的临界值

Table 6 Critical values of \bar{Q} below which F resists the flow and above which it assists the flow for different values of k_n (the other parameters are $\phi = 0.4, m = 2, N = 0.4$)

parameter k_n	0	0.03	0.06	0.09
\bar{Q}	0.148 538	0.140 866	0.138 299	0.139 529

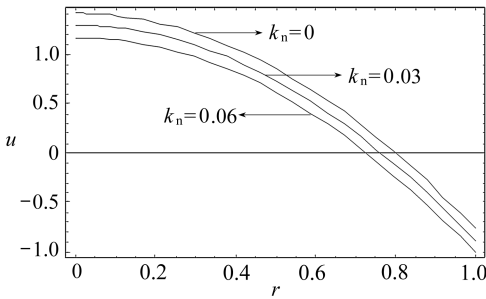


图9 当 $\phi = 0.4, N = 0.2, m = 10, x = 0.5$, $dp/dx = -10$, k_n 取不同数值时, 轴向速度 u 随径向距离 r 的变化

Fig. 9 The axial velocity versus radial distance for $\phi = 0.4, N = 0.2, m = 10, x = 0.5$ and $dp/dx = -10$

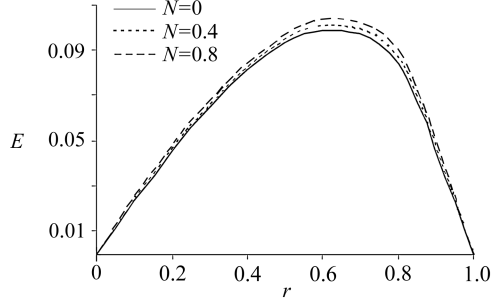


图10 当 $\phi = 0.4, k_n = 0, m = 2, N$ 取不同数值时, 机械效率 E 随着平均流量 \bar{Q} 和最大平均流量 \bar{Q}_0 之比的变化

Fig. 10 Mechanical efficiency versus ratio of average flux rate and maximum average flux rate for $\phi = 0.4, k_n = 0$ and $m = 2$

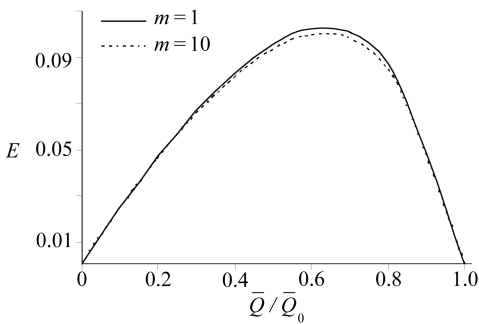


图11 当 $\phi = 0.4, k_n = 0, N = 0.5, m$ 取不同数值时, 机械效率 E 随着平均流量 \bar{Q} 和最大平均流量 \bar{Q}_0 之比的变化

Fig. 11 Mechanical efficiency versus ratio of average flux rate and maximum average flux rate for $\phi = 0.4, k_n = 0$ and $N = 0.5$

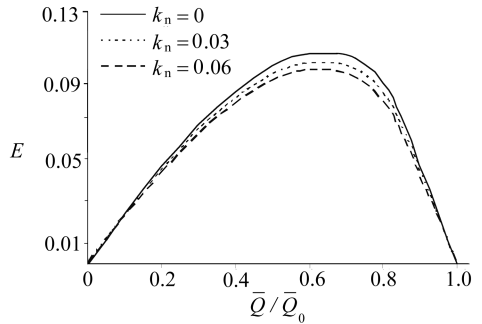


图12 当 $\phi = 0.4, m = 2, N = 0.5, k_n$ 取不同数值时, 机械效率 E 随着平均流量 \bar{Q} 和最大平均流量 \bar{Q}_0 之比的变化

Fig. 12 Mechanical efficiency versus ratio of average flux rate and maximum average flux rate for $\phi = 0.4, m = 2$ and $N = 0.5$

图7~图9 分别给出了相关参数 N, m 和 k_n 对速度分布 (轴向速度 u 随径向距离 r 的变化)

的影响. 可以发现, 它们之间呈非线性关系, 径向距离为 0 时, 轴向速度达到最大值, 反之亦然. 当耦合参数 N 和滑移参数 k_n 增大时, 轴向速度 u 在减小 (分别见图 7 和图 9), 而微极参数 m 增大时, 轴向速度 u 也增大 (见图 8). 这表明, 速度分布的区域随着 N 和 k_n 的增大而减小, 而随着 m 值的增大而增大.

图 10 ~ 图 12 给出了机械效率 E 随着平均流量和最大平均流量之比 \bar{Q}/\bar{Q}_0 的曲线, 分别显示了相关参数 N , m 和 k_n 的影响. 可以看出, E 开始增大并达到最大值, 然后逐渐减小, 最后为 0. 并发现, 机械效率随耦合参数值的增大而增大, 随微极参数和滑移参数的增大而减小.

俘获现象是蠕动运动的一个固有现象: 一个内部由封闭流线围成循环的流体团块, 俘获该团块并随同蠕动波的运动一起推向前进. 图 13 ~ 图 15 给出了耦合参数 N 、微极参数 m 、滑移参数 k_n 对俘获现象的影响. 观察到如下一般现象: 俘获团块的大小随着 N 和 m 的增大而增大, 而随着 k_n 的增大而减少.

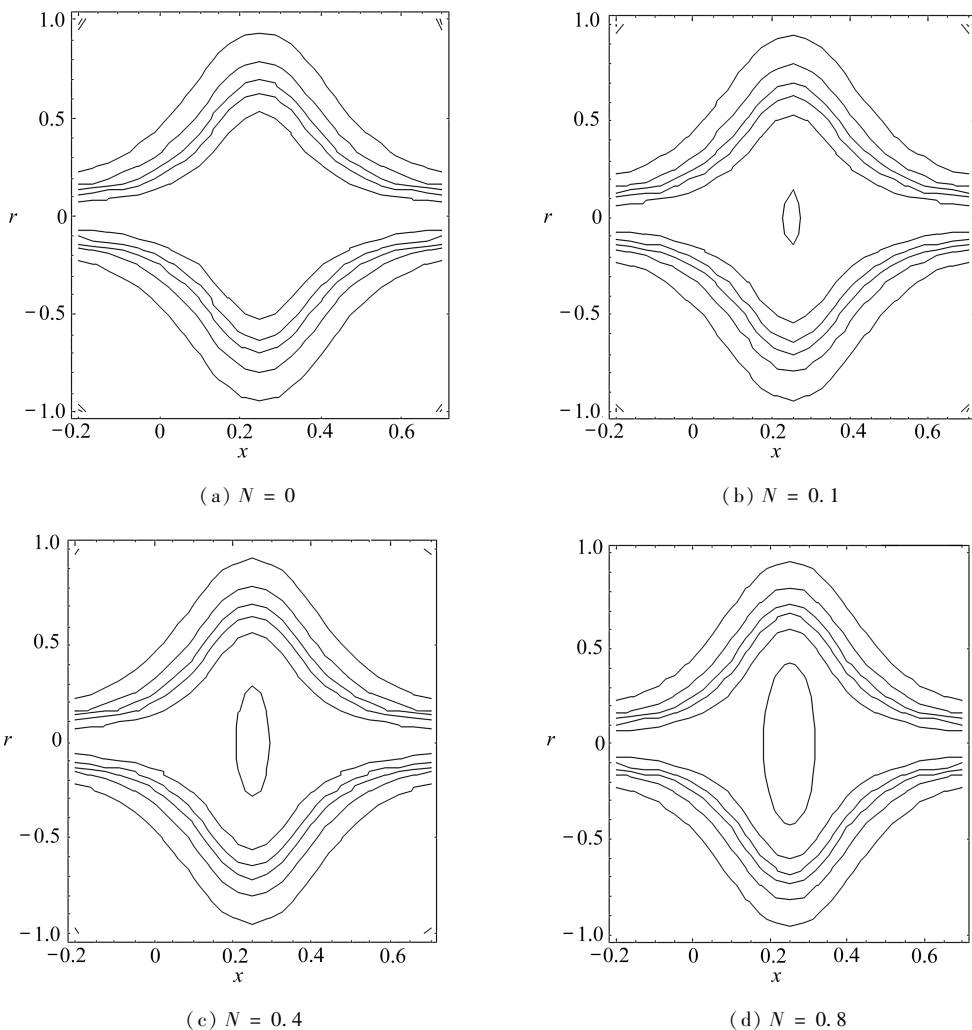


图 13 当 $m = 2.0, \phi = 0.4, k_n = 0$ 和 $\bar{Q} = 0.1$ 时的流线图

Fig. 13 Streamlines for $m = 2.0, \phi = 0.4, k_n = 0$ and $\bar{Q} = 0.1$

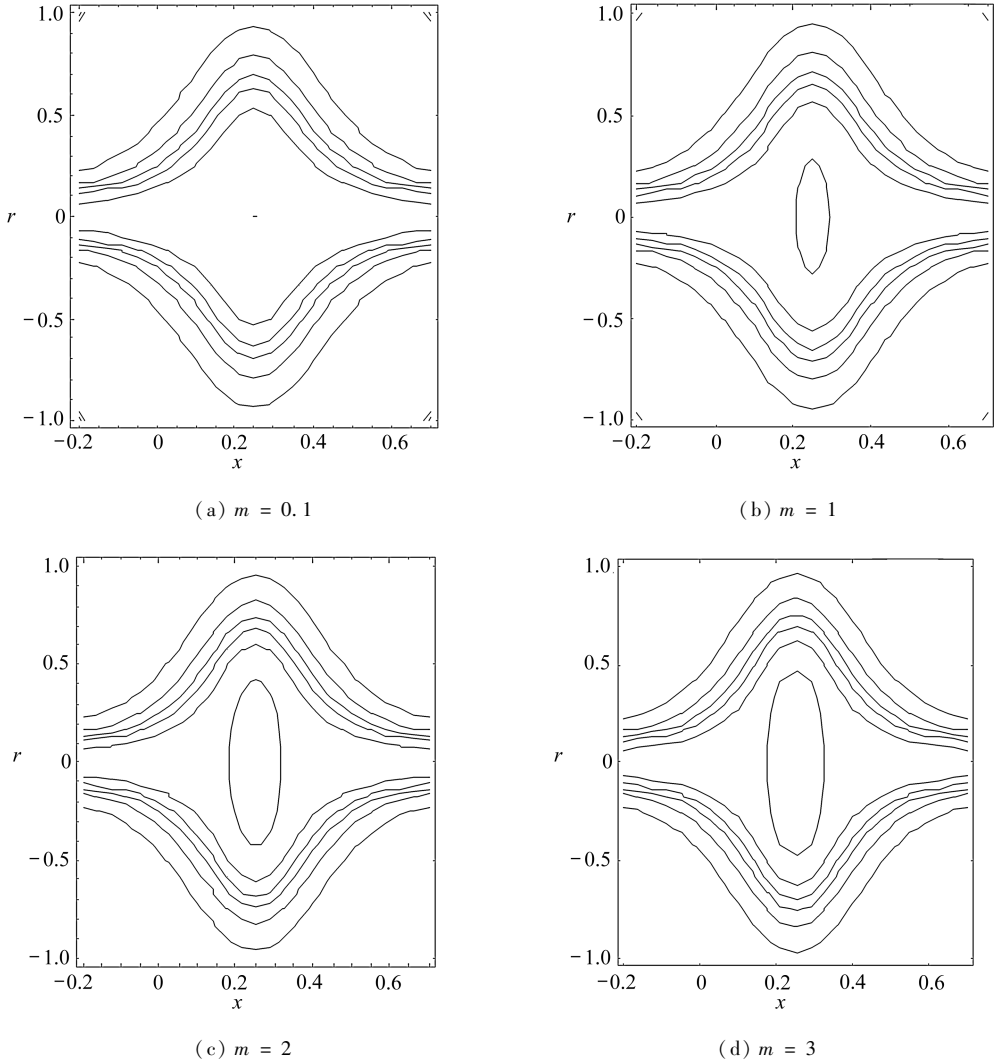


图 14 当 $N = 0.8$, $\phi = 0.4$, $k_n = 0$ 和 $\bar{Q} = 0.1$ 时的流线图

Fig. 14 Streamlines for $N = 0.8$, $\phi = 0.4$, $k_n = 0$ and $\bar{Q} = 0.1$

3 结 论

本文详细地数值地讨论了,耦合参数 N ,微极参数 m 和滑移参数 k_n 对蠕动泵区、壁面摩擦力和俘获现象的影响.得到如下几点主要结论:

- 1) 蠕动泵区域随着微极参数 m 和滑移参数 k_n 增大而缩小,而随着耦合参数 N 增大而扩大.
- 2) \bar{Q} 的临界值随着 N 和 k_n 的增大而减小,而随着 m 的增大而增大. \bar{Q} 小于临界值时, F 阻碍流体的流动, \bar{Q} 大于临界值时, F 促进流体的流动.
- 3) 轴向速度随着 N 和 k_n 的增大而减小,而随着 m 的增大而增大.
- 4) 机械效率随着 N 的增大而提高,而随着 m 和 k_n 的增大而下降.
- 5) 俘获团块的大小随着 N 和 m 的增大而增大,而随着 k_n 增大而减小.
- 6) 作为本文分析的特殊情况:没有滑移边界条件(即无滑移条件),取 $k_n = 0$ 时,得到微极

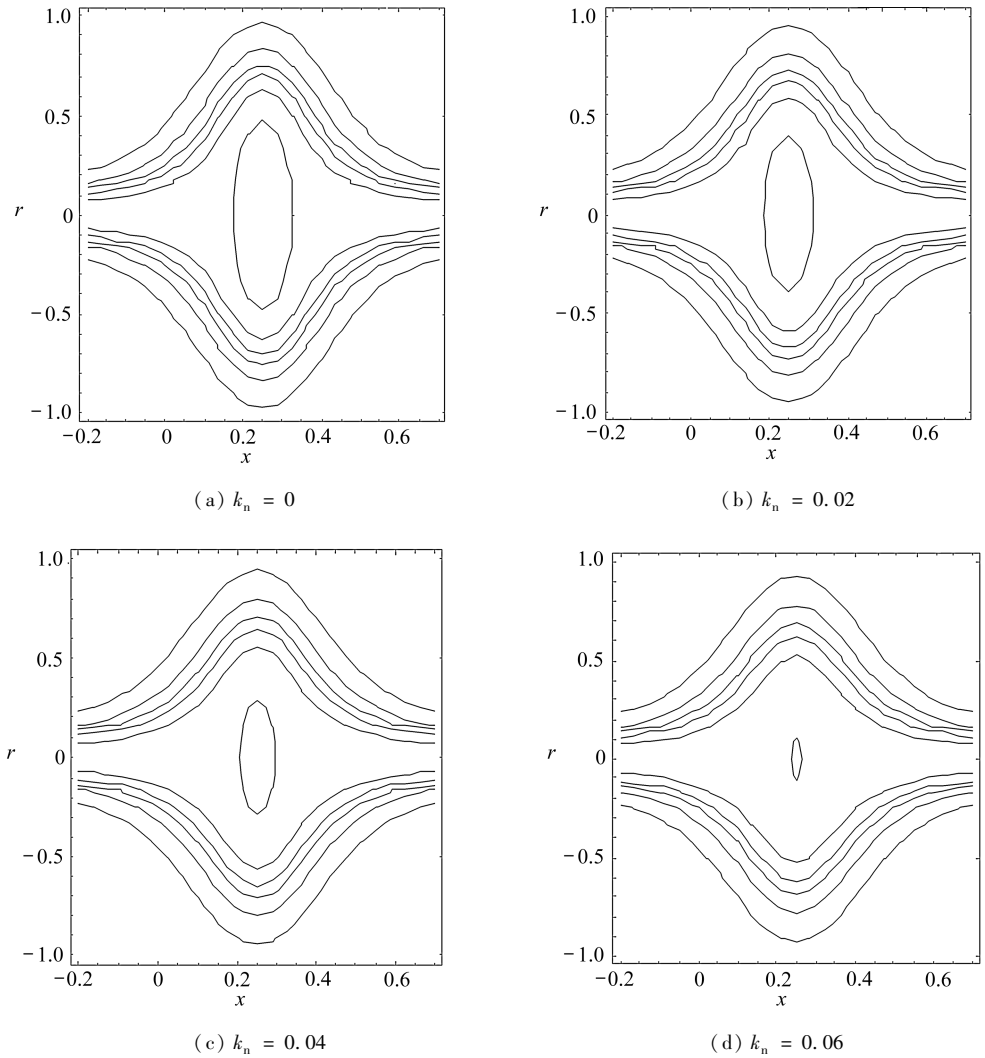


图 15 当 $N = 0.8$, $\phi = 0.4$, $m = 3.0$ 和 $\bar{Q} = 0.1$ 时的流线图

Fig. 15 Streamlines for $N = 0.8$, $\phi = 0.4$, $m = 3.0$ and $\bar{Q} = 0.1$

流体的结果(见 Srinivasacharya 等的文献[3]),取 $N = 0, k_n = 0$ 时,得到 Newton 流体的结果(见 Shapiro 等的文献[30]).

参考文献:

- [1] Eringen C. Theory of micropolar fluids[J]. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1966, **16**: 1-16.
- [2] Girija Devi R, Devanathan R. Peristaltic motion of a micropolar fluid[J]. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, 1975, **81**(4): 149-163.
- [3] Srinivasacharya D, Mishra M, Rao A R. Peristaltic pumping of a micropolar fluid in a tube [J]. *Acta Mechanica*, 2003, **161**(3/4): 165-178.
- [4] Hayat T, Ali N, Abbas Z. Peristaltic flow of micropolar fluid in a channel with different wave forms[J]. *Physics Letters A*, 2007, **370**(3/4): 331-344.
- [5] Muthu P, Kumar B V R, Chandra P. On the influence of wall properties in the peristaltic mo-

- tion of micropolar fluid[J]. *ANZIAM Journal*, 2003, **45**(2): 245-260.
- [6] Muthu P, Kumar B V R, Chandra P. Peristaltic motion of micropolar fluid in circular cylindrical tubes: effect of wall properties [J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2008, **32**(10): 2019-2033.
- [7] Ali N, Hayat T. Peristaltic flow of a micropolar fluid in an asymmetric channel[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2008, **55**(4): 589-608.
- [8] Mekheimer Kh S, Elmaboud Y Abd. The influence of a micropolar fluid on peristaltic transport in an annulus: application of the clot mode [J]. *Applied Bionics and Biomechanics*, 2008, **5**(1): 13-23.
- [9] Hayat T, Ali N. Effects of an endoscope on peristaltic flow of a micropolar fluid[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2008, **48**(5/6): 721-733.
- [10] Pandey S K, Tripathi D. A mathematical model for peristaltic transport of micro-polar fluids [J]. *Applied Bionics and Biomechanics*, 2011, **8**(3/4): 279-293.
- [11] Pandey S K, Chaube M K. Peristaltic flow of a micropolar fluid through a porous medium in the presence of an external magnetic field [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 2011, **16**(9): 3591-3601.
- [12] Pandey S K, Tripathi D. Influence of magnetic field on the peristaltic flow of a viscous fluid through a finite-length cylindrical tube [J]. *Applied Bionics and Biomechanics*, 2010, **7**(3): 169-176.
- [13] Pandey S K, Tripathi D. Peristaltic flow characteristics of Maxwell and magneto-hydrodynamic fluids in finite channels; models for oesophageal swallowing [J]. *Journal of Biological Systems*, 2010, **18**(3): 621-647.
- [14] Pandey S K, Tripathi D. Unsteady model of transportation of Jeffrey fluid by peristalsis [J]. *International Journal of Biomathematics*, 2010, **3**(4): 473-491.
- [15] Pandey S K, Tripathi D. Peristaltic transport of a casson fluid in a finite channel: application to flows of concentrated fluids in oesophagus [J]. *International Journal of Biomathematics*, 2010, **3**(4): 453-472.
- [16] Tripathi D, Pandey S K, Das S. Peristaltic transport of a generalized Burgers' fluid: application to movement of chyme in small intestine [J]. *Acta Astronautica*, 2011, **69**(1/2): 30-38.
- [17] Tripathi D. Numerical and analytical simulation of peristaltic flows of generalized Oldroyd-B fluids [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. doi: 10.1002/flid.2466.
- [18] Tripathi D. Peristaltic transport of a viscoelastic fluid in a channel [J]. *Acta Astronautica*, 2011, **68**(7/8): 1379-1385.
- [19] Tripathi D. Numerical study on peristaltic flow of generalized Burgers' fluids in uniform tubes in presence of an endoscope [J]. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. doi: 10.1002/cnm.1442.
- [20] Tripathi D. Peristaltic transport of fractional Maxwell fluids in uniform tubes: application of an endoscope [J]. *Computers and Mathematics With Applications*. doi:10.1016/j.camwa.2011.03.038.
- [21] Tripathi D. Numerical study on peristaltic transport of fractional bio-fluids [J]. *J Mech Med Biol*. doi: 10.1142/S0219519411004290.
- [22] Tripathi D, Pandey S K, Das S. Peristaltic flow of viscoelastic fluid with fractional Maxwell model through a channel [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, **215**(10): 3645-3654.

- [23] Pandey S K, Chaube M K. Peristaltic transport of a visco-elastic fluid in a tube of non-uniform cross section[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010, **52**(3/4): 501-514.
- [24] Pandey S K, Chaube M K. Study of wall properties on peristaltic transport of a couple stress fluid[J]. *Meccanica*. doi:10.1007/s11012-010-9387-8.
- [25] Kwang W, Chu H, Fang J. Peristaltic transport in a slip flow[J]. *European Physical Journal B*, 2000, **16**(3): 543-547.
- [26] Hakeem Abd El, Naby Abd El, El Shamy I I E. Slip effects on peristaltic transport of power-law fluid through an inclined tube[J]. *Applied Mathematical Sciences*, 2007, **1**(60): 2967-2980.
- [27] Ali N, Hussain Q, Hayat T, Asghar S. Slip effects on the peristaltic transport of MHD fluid with variable viscosity[J]. *Physics Letters A*, 2008, **372**(9): 1477-1489.
- [28] Hayat T, Qureshi M U, Ali N. The influence of slip on the peristaltic motion of a third order fluid in an asymmetric channel[J]. *Physics Letters A*, 2008, **372**(15): 2653-2664.
- [29] Tripathi D, Gupta P K, Das S. Influence of slip condition on peristaltic transport of a viscoelastic fluid with fractional Burgers' model[J]. *Thermal Science*, 2011, **15**(2): 501-515.
- [30] Shapiro A H, Jafferin M Y, Weinberg S L. Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1969, **35**: 669-675.

Study on Stokes Flow of Micro-Polar Fluids by Peristaltic Pumping Through a Tube With Slip Boundary Condition

Dharmendra Tripathi¹, M. K. Chaube², P. K. Gupta³

(1. *Department of Mathematics, BITS-Pilani, Hyderabad Campus, Hyderabad-500078, India;*

2. *Department of Mathematics, RKGIT, Ghaziabad-201001, India;*

3. *Department of Applied Mathematics, IT-BHU, Varanasi-221005, India)*

Abstract: The Stokes flow of micro-polar fluids by peristaltic pumping through the cylindrical tube under the effect of slip boundary condition was studied. The motion of wall was governed by the sinusoidal wave equation. Analytical and numerical solutions for axial velocity, micro-polar vector, stream function, pressure gradient, friction force and mechanical efficiency were obtained by using the lubrication theory. The impacts of emerging parameters such as coupling number, micro-polar parameter and slip parameter on pumping characteristic, friction force and trapping phenomena were depicted graphically. Numerical computation infers that more pressure requires for peristaltic pumping when coupling number is large while opposite behavior is found for micro-polar parameter and the slip parameter. The size of trapped bolus reduces with coupling number and micro-polar parameter whereas it blows up with slip parameter.

Key words: Stokes flow; micro-polar fluid; slip boundary condition; peristaltic pumping; mechanical efficiency; trapping