

机械求积法及其外推算法求解 Helmholtz 非线性边界积分方程*

程攀¹, 黄晋², 王柱^{2,3}

- (1. 重庆交通大学 理学院, 重庆 400074;
2. 电子科技大学 数学科学院, 成都 611731;
3. 维吉尼亚综合技术大学 数学系, 布莱克斯堡 VA 24061, 美国)

摘要: 当 Helmholtz 微分方程转化为非线性边界积分方程后,可以利用机械求积法求得近似解,此方法具有较高的收敛精度阶 $O(h^3)$ 和较低的计算复杂度.构造机械求积法时,一个非线性方程系统通过离散非线性积分方程得到.此外,每个矩阵元素的值都不需要计算任何奇异积分.根据渐近紧理论和 Stepleman 定理,整个系统的稳定性和收敛性得到了证明.利用 h^3 -Richardson 外推算法,收敛精度阶可以提高到 $O(h^5)$.为了求解非线性方程组,利用 Ostrowski 不动点定理研究了 Newton 的解的收敛性.几个算例从数值上说明了本算法的有效性.

关键词: Helmholtz 方程; 机械求积法; Newton 迭代法; 非线性边界条件

中图分类号: O24;O39 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.12.002

引言

调和波在绕过障碍物时的传播和发散本质上可以转换为一个两维的问题,通常可以通过一个 Helmholtz 方程以及它对应的边界条件来描述这个物理过程.本文主要讨论具有下述非线性边界条件的 Helmholtz 方程:

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} - \alpha^2 \tilde{u} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \partial \tilde{u} / \partial n = -G(\tilde{u}) + f(\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}, \tilde{u}) + f(\mathbf{x}), & \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \end{cases} \quad (1)$$

其中, α 是一个描述传播系数的正实数, $\Omega \subset R^2$ 是一个具有光滑边界 Γ 的有界、单连通区域, $\partial / (\partial n)$ 是边界 Γ 上的单位外法向导数,以及 $g(\mathbf{x}, \tilde{u})$, $f(\mathbf{x})$ 是已知函数.

研究 Helmholtz 方程数值解的文献大量地采用了有限元方法^[1-5],如 Hiptmair 和 Meury^[2] 利用对偶有限元方法得到微分方程的数值模拟,以及 Sze 和 Liu^[5] 给出了杂交-Trefftz 三角有限元方法求方程的数值解. Ruotsalainen 和 Wendland^[6] 把具有非线性边界条件的 Helmholtz 方程转化为边界积分方程并利用 Galerkin 方法近似积分方程,得到精度阶为 $O(h^2)$ 的数值解. Atkinson 和 Chandler^[7] 利用求积方法得到具有非线性边界条件的 Laplace 方程的高精度解.

* 收稿日期: 2010-11-18; 修订日期: 2011-11-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871034);重庆市自然科学基金资助项目(CSTC20-10BB8270);AFOSR(FA9550-08-1-0136)和 NSF(OCE-0620464)的部分资助项目

作者简介: 程攀(1976—),男,重庆人,讲师,博士(联系人. E-mail:cheng_pass@sina.com).

Huang 和 Wang^[8] 为具有混合线性边界的 Helmholtz 方程构造机械求积法求解积分方程, 得到 $O(h^3)$ 的收敛速度.

由转化为边界积分方程的 Green 公式^[8-9], Helmholtz 方程可等价于

$$\tilde{u}(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} k^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \tilde{u}(\mathbf{x}) ds_x - \int_{\Gamma} h^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}} ds_x, \quad \mathbf{y} \in \Omega. \quad (2)$$

令 \mathbf{y} 趋于边界 Γ 上的点, 并代入方程(1) 的边界条件, 得到边界 Γ 上的微分方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{u}(\mathbf{y}) - \int_{\Gamma} k^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \tilde{u}(\mathbf{x}) ds_x - \int_{\Gamma} h^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) G(\tilde{u}) ds_x = \\ - \int_{\Gamma} h^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) ds_x, \quad \mathbf{y} \in \Gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$, $h^*(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ 是 Helmholtz 对应的积分方程的基本解^[10]

$$h^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} K_0(\alpha |\mathbf{x} - \mathbf{y}|), & \text{当 } \alpha > 0, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, & \text{当 } \alpha = 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中 K_0 是 Bessel 函数

$$K_0(z) = -\ln z + \ln 2 - \gamma, \quad z \rightarrow 0, \quad (5)$$

$\gamma = 0.577 21 \dots$ 是 Euler 常数, 以及 $k^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \partial h^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) / \partial \mathbf{n}$. 根据等式(3), 在边界 Γ 上的边界值 \tilde{u} 可以求出, 又由方程(1) 的边界条件, 法向导数也可以求得. 因此, 对于所有的 $\mathbf{y} \in \Omega$, 根据等式(2), 都可以计算出对应的函数值 $\tilde{u}(\mathbf{y})$.

一些数值方法被提出来求解非线性边界积分方程(3). 林群^[11] 1958 年时就研究了具有光滑核的非线性积分方程. Ismail^[12] 提出了一种特别的求积法求解具有 Hilbert 核的两维非线性积分方程, 但不太方便利用外推算法提高精度阶. Yan^[13] 把求积方法和预选迭代法相结合, 用来求解两维 Helmholtz 方程. Shen 和 Wang^[14] 对于具有高传播数的 Helmholtz 方程作出了谱-Galerkin 逼近的误差分析. Kress 和 Sloan^[15] 给出了一种求积方法求解边界积分方程, 并且他们的误差分析是建立在三角多项式插值基础之上的. 程攀等^[16] 利用机械求积法求解了具有非线性边界条件的 Laplace 方程.

我们给出了建立在 Side 求积公式^[8] 上的机械求积法, 求解 Helmholtz 方程所对应的非线性边界积分方程, 在生成离散矩阵时不需要计算任何奇异积分. 根据渐近紧理论和 Stepleman 定理, 我们证明了非线性系统的稳定性和收敛性. 并证明了 Newton 迭代法求解此非线性系统的合理性. 既然具有 $O(h^3)$ 的三阶渐近误差展开式可以求得, 利用外推算法^[8, 10, 17], 具有五阶精度 $O(h^5)$ 的近似解也能通过外推得到. 因此, 我们不仅极大的提高了近似解的精度阶, 而且还得到了一个后验误差估计, 此估计可以用来构造一些自适应算法. 数值算例也说明了此方法的实用性.

在本文第 1 节中, 我们为非线性边界积分方程构造了机械求积法, 当离散后, 得到一个非线性系统. 在第 2 节中, 我们分析了 \mathbf{u}_h 的误差并得到一个渐近展开, 进一步利用外推算法得到高精度近似解. 在第 3 节中, 利用 Ostrowski 不动点方法讨论 Newton 迭代法的可行性. 在第 4 节中, 用数值算例说明此方法的优越性.

1 机械求积法

假设 Γ 是一条光滑闭曲线, 且有参数变换: $\mathbf{x}(s) = (x_1(s), x_2(s)) : [0, 2\pi] \rightarrow \Gamma$, 满足:

$|\mathbf{x}'(s)|^2 = |x_1'(s)|^2 + |x_2'(s)|^2 > 0$. 令 $C^{2m}[0, 2\pi]$ 为具有周期 2π 的 $2m$ 次可微的周期函数, 且有 $x_i(s) \in C^{2m}[0, 2\pi], i = 1, 2$. 在 $C^{2m}[0, 2\pi]$ 中定义如下积分算子:

$$\begin{cases} (Ku)(s) = 2 \int_0^{2\pi} k(t, s) u(t) dt, \\ (Hu)(s) = 2 \int_0^{2\pi} h(t, s) u(t) dt, \end{cases} \quad (6)$$

其中, $u(t) = \tilde{u}(x_1(t), x_2(t)), k(t, s) = k^*(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(s)) |\mathbf{x}'(t)|$ 是一个光滑核函数, 以及 $h(t, s) = h^*(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(s)) |\mathbf{x}'(t)|$ 是一个具有对数弱奇异的核函数. 则方程(3)可等价于

$$(I - K)u + HG(u) = Hf. \quad (7)$$

为了得到此方程的解, 我们先给出 3 个假设条件^[6-7]:

- 1) $\text{diag}(\Omega) < 1$;
- 2) 对于 $u \in \mathbf{R}, g(\cdot, u)$ 是可测的, 以及对于任意的 $x \in \Gamma$, 函数 $g(x, \cdot)$ 是连续的;
- 3) $\partial g(\mathbf{x}, u)/\partial u$ 是 Borel 可测的且满足: $0 < l < \partial g(\mathbf{x}, u)/\partial u < L < \infty$.

显然, 假设 3) 表明 $g(\mathbf{x}, u)$ 是 Lipschitz 连续的且是强单调的. 由这 3 条假设条件, 可以得到解的唯一性.

引理 1^[6] 在这些假设条件下, 若 $f \in H^{-1/2}(\Gamma)$, 则在方程(7)中有唯一解.

令 $h = 2\pi/n (n \in \mathbf{N})$ 为网格宽度, 以及 $t_j = s_j = jh (j = 0, 1, \dots, n-1)$ 为网格节点. 由于算子 K 是具有周期 2π 的光滑积分算子, 由梯形公式^[18-19], 可得高精度的 Nyström 近似:

$$(\mathbf{K}_h u)(s) = h \sum_{j=0}^{n-1} k(t_j, s) u(t_j), \quad (8)$$

对应的误差为

$$(Ku)(s) - (\mathbf{K}_h u)(s) = O(h^{2m}). \quad (9)$$

对于对数弱奇异算子 H , 由 Sidi^[19] 求积公式可得其 Nyström 近似:

$$(\mathbf{H}_h G(u))(s) = h \sum_{j=0}^{n-1} h_n(t_j, s) G(u(t_j)), \quad (10)$$

其中它的近似连续核 $h_n(t, \tau)$ 被定义为

$$h_n(t, s) = \begin{cases} h(t, s), & |t - s| \geq h, \\ \frac{1}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{1}{2\pi} h |\mathbf{x}'(s)| \right) + \varepsilon_\alpha \right] |\mathbf{x}'(s)|, & |t - s| < h, \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\varepsilon_\alpha = \begin{cases} -\ln(2\alpha) - \gamma, & \text{当 } \alpha > 0, \\ 0, & \text{当 } \alpha = 0. \end{cases} \quad (12)$$

算子 H 的误差为

$$\begin{aligned} (HG(u))(s) - (\mathbf{H}_h G(u))(s) = \\ 2 \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{\zeta'(-2\mu)}{(2\mu)!} (G(u(s)))^{(2\mu)} h^{2\mu+1} + O(h^{2m}), \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\zeta'(t)$ 是 Riemann zeta 函数的导数. 因此, 我们得到等式(7)的数值近似方程组

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}_h) \mathbf{u}_h + \mathbf{H}_h G(\mathbf{u}_h) = \mathbf{H}_h \mathbf{f}_h. \quad (14)$$

显然, 等式(14)是含有未知变量 \mathbf{u}_h 的非线性方程系统. 当在边界 Γ 上的 \mathbf{u}_h 被解出后, 对于任意的 $\mathbf{y} \in \Omega$, 我们可根据下式计算未知量 $\mathbf{u}_h(\mathbf{y})$:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{y}) = \frac{h |x'(t_j)|}{2\pi} \sum_{j=1}^n [\mathbf{u}_h(t_j) k(x(t_j), \mathbf{y}) + (G(u(t_j)) + f(t_j)) h_n(x(t_j), \mathbf{y})], \quad \mathbf{y} \in \Omega. \quad (15)$$

2 渐近展开式和外推算法

由于算子 K 是一个连续算子, 根据对数密度理论^[8,20], $(I - K)^{-1}$ 是存在的且是一致有界的. 分别定义记号 $\mathbf{L}_h = (I - \mathbf{K}_h)^{-1} \mathbf{H}_h$ 和 $L = (I - K)^{-1} H$, 则我们得到下面的渐近紧性质.

定理 1 在空间 $C[0, 2\pi]$ 中, 近似算子序列 $\{\mathbf{L}_h\}$ 是渐近紧的且收敛于 L , 即

$$\mathbf{L}_h \xrightarrow{\text{a. c.}} L.$$

证明 由于 $h_n(t, \tau)$ 是对于积分核 $h(t, \tau)$ 的连续近似, 因此, 近似算子列 $\{\mathbf{H}_h\}$ 是一个渐近紧序列且收敛于 H , 即在 $C[0, 2\pi]$ 中, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\mathbf{H}_h \xrightarrow{\text{a. c.}} H$. 这表明对于任意的有界序列 $\{y_m \in C^{(m)}[0, 2\pi]\}$, 在 $\{\mathbf{H}_h y_m\}$ 中都存在一个收敛的子列. 不失一般性, 不妨假设当 $m \rightarrow \infty$ 时, 有 $\mathbf{H}_h y_m \rightarrow z$. 由渐近紧性质以及求积规则^[18-19], 我们得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}_h y_m - (I - K)^{-1} z\| &\leq \|(I - \mathbf{K}_h)^{-1}\| \cdot \|\mathbf{H}_h y_m - z\| + \\ \|(I - \mathbf{K}_h)^{-1}(\mathbf{K}_h - K)(I - K)^{-1} z\| &\rightarrow 0, \quad \text{当 } m \rightarrow \infty \text{ 和 } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{L}(C^{(m)}[0, 2\pi], C^{(m)}[0, 2\pi])$ 的范数. 这表明序列 $\{\mathbf{L}_h\}$ 是一个渐近紧算子列.

此外, 我们将证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, 算子列 \mathbf{L}_h 是逐点收敛于 L 的. 实际上, 对于所有的 $y \in C^{(m)}[0, 2\pi]$, 由于 $\mathbf{H}_h \xrightarrow{\text{a. c.}} H$, 得

$$\|\mathbf{H}_h y - Hy\| \rightarrow 0, \quad \text{当 } h \rightarrow 0.$$

又由求积规则^[19], 还有性质

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}_h y - Ly\| &\leq \|(I - \mathbf{K}_h)^{-1}\| \cdot \|\mathbf{H}_h y - Hy\| + \\ \|(I - \mathbf{K}_h)^{-1}(\mathbf{K}_h - K)(I - K)^{-1} Hy\| &\rightarrow 0, \quad \text{当 } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

因此, 序列 \mathbf{L}_h 是逐点收敛于 L 的.

既然序列 \mathbf{L}_h 是渐近紧序列且逐点收敛于 L , 我们得到此定理的证明. □

根据非线性函数 $G(u)$ 的假设, 我们得到如下渐近紧收敛的性质^[22]:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_h G'(u) \xrightarrow{\text{a. c.}} HG'(u), \\ (I - \mathbf{K}_h)^{-1} \mathbf{H}_h G'(u_h) \xrightarrow{\text{a. c.}} (I - K)^{-1} HG'(u). \end{cases}$$

定义记号 $\bar{\mathbf{K}}_h \mathbf{u}_h = (I - \mathbf{K}_h)^{-1} \mathbf{u}_h$, $\bar{\mathbf{H}}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{H}_h G(\mathbf{u}_h)$, $\bar{\mathbf{f}}_h = \mathbf{H}_h \mathbf{f}_h$. 则等式(14)可以重新叙述如下:

$$\bar{\mathbf{K}}_h \mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{H}}_h \mathbf{u}_h = \bar{\mathbf{f}}_h. \quad (16)$$

引理 2^[21] (Stepleman 定理) 令映射 $\mathbf{A}: R^n \rightarrow L(R^n)$, $\mathbf{B}: R^n \rightarrow L(R^m, R^n)$, 以及 $\mathbf{F}: R^n \rightarrow R^n$ 是连续的并假设对 $\forall \mathbf{x} \in R^n$, 有关系 $\|\mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1}\| < C_1 < \infty$, $\|\mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x})\| < C_2 < \infty$, $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| < C_3 < \infty$. 则对任意的 $\mathbf{b} \in R^m$, 方程 $\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{b} + \mathbf{F}(\mathbf{x})$ 有唯一解, 其中 $\mathbf{B} \in L(R^m, R^n)$ 表示 $n \times m$ 矩阵或一个线性算子.

引理 3^[6] 设 $f \in H^{-1/2}(\Gamma)$ 已知. 则存在常数 $R(f) > 0$ 使得对如下等式:

$$A_t(u) = u + t(-Ku + HG(u) - Hf) = 0, \quad (17)$$

若当 $\|u\|_0 > R(f)$ 时, 对于任意的 $t \in [0, 1]$ 都无解.

定理 2 假设函数 $u, f \in C^3[0, 2\pi]$, 则我们有如下性质:

- 1) 在方程(16)中解一定存在;
- 2) 对于近似解, 一定存在一个渐近展开

$$u - \mathbf{u}_h = \psi(s)h^3 + o(h^3), \quad (18)$$

其中 $\psi(s) \in C^0[0, 2\pi]$ 是与 h 无关的函数.

证明 1) 显然, 近似算子 $\bar{\mathbf{K}}_h, \bar{\mathbf{H}}_h$ 是连续的. 由于算子 K 是连续算子, 由对数容度理论, 算子 $(I - K)^{-1}$ 是存在的且是一致有界的. 因此 $\|\bar{\mathbf{K}}_h^{-1}\| < C_1 < \infty$.

由引理 3 以及关于非线性函数 $G(u)$ 的假设, 我们得

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{H}}_h \mathbf{u}_h\| &= h \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |h_{ij} G(u_{jh})| \leq \\ &h \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |h_{ij}| |G(u_{jh})| \leq Ch \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |h_{ij}|, \end{aligned}$$

其中, $h_{ij} = h_n(t_i, t_j)$ 和 $C > 0$. 根据 Nyström 近似算子 \mathbf{H}_h 的构成, 我们有结论 $\|\bar{\mathbf{H}}_h \mathbf{u}_h\| < C_2 < \infty$. 故引理 2 的条件成立, 则在方程(16)中解一定存在.

2) 由等式(7)和等式(14), 我们有如下关系:

$$(u - \mathbf{u}_h) + (Ku - \mathbf{K}_h \mathbf{u}_h) + (HG(u) - \mathbf{H}_h G(\mathbf{u}_h)) = (H - \mathbf{H}_h)f.$$

由于算子 H 是一个对数弱奇异算子, 由方程(13), 我们有

$$Hf(s) - \mathbf{H}_h f(s) = 2 \frac{\zeta'(-2)}{(2)!} f^{(2)}(s)h^3 + o(h^3).$$

得等价的等式为

$$\begin{aligned} (u - \mathbf{u}_h) + (Ku - \mathbf{K}_h u + \mathbf{K}_h u - \mathbf{K}_h \mathbf{u}_h) + \\ (HG(u) - \mathbf{H}_h G(u) + \mathbf{H}_h G(u) - \mathbf{H}_h G(\mathbf{u}_h)) = \varphi_1(s)h^3 + o(h^3), \end{aligned}$$

其中 $\varphi_1(s) = \zeta'(-2) f^{(2)}(s)$. 再由误差估计式(9)和(13), 有

$$(u - \mathbf{u}_h) + \mathbf{K}_h(u - \mathbf{u}_h) + \mathbf{H}_h(G(u) - G(\mathbf{u}_h)) = \varphi(s)h^3 + o(h^3),$$

其中 $\varphi(s) = \varphi_1(s) + \zeta'(-2) (G(u(s)))^{(2)}(s)$. 利用微分中值定理, 我们得

$$(I - \mathbf{K}_h + \mathbf{H}_h G'(\bar{\mathbf{u}}_h))(u - \mathbf{u}_h) = \varphi(s)h^3 + o(h^3), \quad (19)$$

其中 $\bar{\mathbf{u}}_h = \mathbf{u}_h + t(u - \mathbf{u}_h)$ ($0 \leq t \leq 1$). 又由于 $(I - \mathbf{K}_h)^{-1}$ 存在, 等式(19)可被重新描述为

$$(I - \mathbf{W}_h)(u - \mathbf{u}_h) = \varphi(s)h^3 + o(h^3),$$

其中 $\mathbf{W}_h = -(I - \mathbf{K}_h)^{-1} \mathbf{H}_h G'(\bar{\mathbf{u}}_h)$ 和 $W = -(I - K)^{-1} HG'(\bar{u})$.

因此, 我们得到结论 $\mathbf{W}_h \xrightarrow{a.c.} W$ 和 $(I - \mathbf{K}_h)^{-1}$ 是存在和有界的. 即当我们令 $\psi(s) = (I - \mathbf{W}_h)^{-1} \varphi(s)$ 时, 由于 $(I - \mathbf{W}_h)^{-1}$ 是有界的^[8,18]. 本定理成立. \square

令 \mathbf{u}_h 和 $\mathbf{u}_{h/2}$ 是当网格宽度分别取 h 和 $h/2$ 时, 等式(14)的解. 利用渐近展开式(18), 得 h^3 -Richardson 外推算法^[8,10]:

$$\mathbf{u}_h^*(s_j) = \frac{1}{7}(8\mathbf{u}_{h/2}(s_j) - \mathbf{u}_h(s_j)), \quad s_j = jh; j = 0, \dots, n-1,$$

其对应误差为: $\|\mathbf{u}_h^*(s_j) - u(s_j)\| = o(h^3)$.

利用此外推结果, 我们可以得到如下的后验误差估计:

$$\|\mathbf{u}_{h/2}(s_j) - u(s_j)\| \leq \left\| \frac{8}{7} \mathbf{u}_{h/2}(s_j) - \frac{1}{7} \mathbf{u}_h(s_j) - u(s_j) \right\| +$$

$$\frac{1}{7} \| \mathbf{u}_{h/2}(s_j) - \mathbf{u}_h(s_j) \| \leq \frac{1}{7} \| \mathbf{u}_{h/2}(s_j) - \mathbf{u}_h(s_j) \| + o(h^3).$$

显然,此不等式可以用来构造自适应算法.同时我们可以发现,虽然外推算法不是太复杂,但在提高精度阶时却非常有效.

3 非线性方程组的迭代解法

Newton 迭代法将被提出来求解此非线性方程组.为了方便,我们记

$$\Psi(\mathbf{z}) = (\varphi_1(\mathbf{z}), \dots, \varphi_n(\mathbf{z}))^T, \quad (20)$$

其中 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T = \mathbf{u}_h$,

$$\varphi_i(\mathbf{z}) = z_i - h \sum_{j=1}^n k_{i,j} z_j - h \sum_{j=1}^n h_{i,j} (G(z_j) - f_j),$$

特别地, $k_{i,j} = k_n(t_i, t_j)$ 和 $h_{i,j} = h_n(t_i, t_j)$.

则方程(14)可被重新叙述如下:

$$\Psi(\mathbf{z}) = \mathbf{0}. \quad (21)$$

函数 $\Psi(\mathbf{z})$ 对应的 Jaccobi 矩阵为

$$\mathbf{A}(\mathbf{z}) = \Psi'(\mathbf{z}) = (\partial_j \varphi_i(\mathbf{z}))_{n \times n}. \quad (22)$$

因此,Newton 迭代法描述如下:

$$\mathbf{z}^{k+1} = \omega(\mathbf{z}^k), \quad \omega(\mathbf{z}) = \mathbf{z} - (\mathbf{A}(\mathbf{z}))^{-1} \Psi(\mathbf{z}), \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (23)$$

引理 4^[21] (Ostrowski 定理) 假设有一固定点 $\mathbf{z}^* \in \text{int}(D)$ 满足映射关系 $\omega: D \subset R^n \rightarrow R^n$ 和在点 \mathbf{z}^* 处的 F - 导数是存在的.若 $\omega'(\mathbf{z}^*)$ 的谱半径满足

$$\rho(\omega'(\mathbf{z}^*)) = \delta < 1, \quad (24)$$

则必然存在一个开球 $S = S(\mathbf{z}^*, \delta_0) \subset D$ 使得对于任意的 $\mathbf{z}^0 \in S$, 迭代序列(23) 都是稳定的且收敛于 \mathbf{z}^* .

引理 5^[21] 假设 $\mathbf{A}, \mathbf{C} \in L(R^n)$, $\|\mathbf{A}^{-1}\| < \beta$, $\|\mathbf{A} - \mathbf{C}\| < \alpha$, $\alpha\beta < 1$, 则 \mathbf{C} 是可逆的且有关系: $\|\mathbf{C}^{-1}\| < \beta/(1 - \alpha\beta)$.

定理 3 假设 $\Psi: D \subset R^n \rightarrow R^n$ 是 F - 可导的, 点 \mathbf{z}^* 满足方程 $\Psi(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. 映射 $\mathbf{A}: S \subset D \rightarrow L(R^n)$ 在点 \mathbf{z}^* 是连续的和可逆的, 其中 S 是点 \mathbf{z}^* 的邻域. 则必然存在一个闭球 $\bar{S} = \bar{S}(\mathbf{z}^*, \delta) \subset S$, 使得 ω 在点 \mathbf{z}^* 处是 F - 可导的:

$$\omega'(\mathbf{z}^*) = \mathbf{I} - (\mathbf{A}(\mathbf{z}^*))^{-1} \Psi'(\mathbf{z}^*). \quad (25)$$

证明 令 $\beta = \|(\mathbf{A}(\mathbf{z}^*))^{-1}\| > 0$, 由于 $\mathbf{A}(\mathbf{z}^*)$ 是可逆的, 以及由于 $\mathbf{A}(\mathbf{z})$ 在点 \mathbf{z}^* 处是连续的, 因此对于 $0 < \varepsilon < (2\beta)^{-1}$, $\exists \delta > 0$, 当 $\mathbf{z} \in \bar{S}(\mathbf{z}^*, \delta)$, 有性质 $\|\mathbf{A}(\mathbf{z}) - \mathbf{A}(\mathbf{z}^*)\| < \varepsilon$. 考虑引理 5 的结论, $(\mathbf{A}(\mathbf{z}))^{-1}$ 对任意的 $\mathbf{z} \in \bar{S}$, 有不等式 $\|(\mathbf{A}(\mathbf{z}))^{-1}\| \leq \beta/(1 - \varepsilon\beta)$ 成立. 因此, 可以构造如下等式:

$$\omega(\mathbf{z}) = \mathbf{z} - (\mathbf{A}(\mathbf{z}))^{-1} \Psi(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \bar{S}.$$

由于函数 $\Psi(\mathbf{z})$ 在点 \mathbf{z}^* 处是可导的, 因此 $\exists \delta > 0$, 当 $\mathbf{z} \in \bar{S}(\mathbf{z}^*, \delta)$ 时, 由 F - 导数的定义可得如下不等式:

$$\|\Psi(\mathbf{z}) - \Psi(\mathbf{z}^*) - \Psi'(\mathbf{z}^*)(\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)\| \leq \varepsilon \|\mathbf{z} - \mathbf{z}^*\|.$$

考虑函数 $\omega(\mathbf{z})$ 的导数有

$$\|\omega(\mathbf{z}) - \omega(\mathbf{z}^*) - [\mathbf{I} - (\mathbf{A}(\mathbf{z}^*))^{-1} \Psi'(\mathbf{z}^*)](\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)\| =$$

$$\begin{aligned} & \| -(\mathbf{A}(\mathbf{z}))^{-1}\Psi(\mathbf{z}) - (\mathbf{A}(\mathbf{z}^*))^{-1}\Psi'(\mathbf{z}^*)(\mathbf{z} - \mathbf{z}^*) \| \leq \\ & \| (\mathbf{A}(\mathbf{z}))^{-1}(\mathbf{A}(\mathbf{z}^*) - \mathbf{A}(\mathbf{z}))(\mathbf{A}(\mathbf{z}^*))^{-1}\Psi'(\mathbf{z}^*)(\mathbf{z} - \mathbf{z}^*) \| + \\ & \| (\mathbf{A}(\mathbf{z}))^{-1}(\Psi(\mathbf{z}) - \Psi(\mathbf{z}^*) - \Psi'(\mathbf{z}^*)(\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)) \| \leq \\ & (2\beta^2\varepsilon \| \mathbf{F}'(\mathbf{z}^*) \| + 2\beta\varepsilon) \| \mathbf{z} - \mathbf{z}^* \| \leq c\varepsilon \| \mathbf{z} - \mathbf{z}^* \|, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $c = 2\beta(\beta \| \mathbf{F}'(\mathbf{z}^*) \| + 1)$. 根据 F - 的定义, 我们得到了函数 ω 在 \mathbf{z}^* 处的 F - 导数:

$$\omega'(\mathbf{z}^*) = I - (\mathbf{A}(\mathbf{z}^*))^{-1}\Psi'(\mathbf{z}^*). \quad \square$$

利用等式(22)中关于矩阵 \mathbf{A} 的定义, 我们有性质 $\rho(\omega'(\mathbf{z}^*)) = 0 < 1$. 与引理4相结合, 则得迭代序列是稳定的且收敛于点 \mathbf{z}^* .

4 数值例子

例1 考虑定义在一个圆形平面区域上的 Helmholtz 方程 $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 0.5^2\}$, 其中 $\alpha = \sqrt{2}$. 边界 Γ 可以描述为: $(x_1, x_2) = (0.5\cos\theta, 0.5\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. 在边界 Γ 上的非线性边界条件描述如下: $G(u) = u + \sin(u)$ 以及 $f = e^{0.5\cos\theta + 0.5\sin\theta}(\cos\theta + \sin\theta + 1) + \sin(e^{x_1+x_2})$, 则此方程的准确解为 $e^{x_1+x_2}$.

当设置迭代次数为 20 次时, 根据等式(14)可以计算出变量 $\mathbf{u}_h(\mathbf{y})$ 在边界 Γ 上的值并列在表1中. 为描述方便, 我们记误差为

$$e^h(\theta) = | \mathbf{u}_h(\theta) - u(\theta) |,$$

外推后的误差为

$$\tilde{e}^h(\theta) = | \mathbf{u}_h^*(\theta) - u(\theta) |,$$

误差之比为

$$r^h(\theta) = e^h(\theta) / \tilde{e}^h(\theta),$$

以及后验误差估计为

$$p^h(\theta) = \| \mathbf{u}_{h/2}(\theta) - \mathbf{u}_h(\theta) \| / 7.$$

表1 在边界 Γ 的误差 $e^h(\theta)$, $\tilde{e}^h(\theta)$ 和误差比 $r^h(\theta)$, 其中 $\theta_1 = \pi/6, \theta_2 = 2\pi/3$

Table 1 The errors $e^h(\theta)$, $\tilde{e}^h(\theta)$ and errors ratio $r^h(\theta)$, when $\theta_1 = \pi/6, \theta_2 = 2\pi/3$ on Γ

n	24	48	96	192	384
$e^h(\theta_1)$	5.32E-4	6.44E-5	8.01E-6	1.01E-6	1.26E-7
$r^h(\theta_1)$		8.26	8.04	8.00	8.00
$\tilde{e}^h(\theta_1)$		2.74E-6	9.89E-8	3.44E-9	1.15E-10
$p^h(\theta_1)$		6.47E-5	8.02E-6	1.01E-6	1.26E-7
$e^h(\theta_2)$	8.61E-4	1.04E-4	1.31E-5	1.64E-6	2.05E-7
$r^h(\theta_2)$		8.27	8.04	8.01	8.00
$\tilde{e}^h(\theta_2)$		4.95E-6	1.77E-7	6.10E-9	2.01E-10
$p^h(\theta_2)$		1.07E-4	1.33E-5	1.65E-6	2.05E-7

由表1, 从数值上可得结论: $\log_2 r^h(\theta_i) \approx 3$, 和 $\log_2 \tilde{e}^h(\theta_i) / \tilde{e}^{h/2}(\theta_i) \approx 5$, 这与等式(18)的结论相一致.

当在边界 Γ 上的函数值计算得到后, 根据等式(15), 可以计算得到任意点处的函数值 \mathbf{u}_h .

例2^[15] 考虑平面上的波动函数 u 的散射传播问题. 其中障碍物为一个具有非凸回形边界 Γ 的柱状体, 它的剖分面在图1中叙述. 对应边界的参数描述如下:

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\cos t + 0.65\cos 2t + 0.65, 1.5\sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

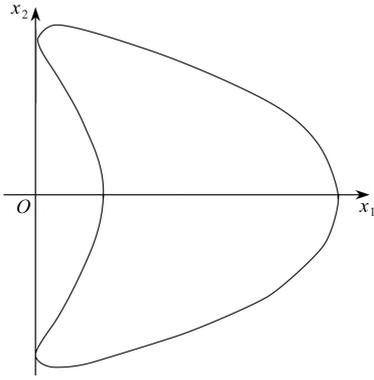


图 1 具有回形轮廓边界的数值例子

Fig. 1 Boomerang-shaped domain for numerical example

关于散射波 u , 文献[15]求解了此方程的 Dirichlet 外问题. 此处, 我们求解微分方程具有非线性边界条件的 Neumann 问题. 我们令系数

$$\alpha = \sqrt{2}, \quad G(u) = u + \sin(u)$$

$$f = e^{-x_1-x_2} [(-1.5 \cos t - \sin t - 1.3 \sin 2t) / \sqrt{w} + 1] + \sin(e^{-x_1-x_2}),$$

其中

$$w = (1.5 \cos t)^2 + (\sin t + 1.3 \sin 2t)^2.$$

则本问题的解析解为: $e^{-x_1-x_2}$.

与例 1 相似, 当设置迭代次数为 20 次时, 根据等式(14)可以计算出声波 $u_h(\mathbf{y})$ 在边界 Γ 上的值并列出现在表 2 中. 且当在边界 Γ 上的函数值计算得到后, 根据

等式(15), 可以计算得到 Ω 内任意点处的函数值 u_h . 其中, 我们引用表 1 中相同的记号.

表 2 在边界 Γ 上的误差 $e^h(\theta)$, $\tilde{e}^h(\theta)$ 和误差比 $r^h(\theta)$, 其中 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/4$

Table 2 The errors $e^h(\theta)$, $\tilde{e}^h(\theta)$ and errors ratio $r^h(\theta)$, when $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/4$ on Γ

n	8	16	32	64	128
$e^h(\theta_1)$	6.13E-3	7.32E-4	8.92E-5	1.10E-5	1.38E-6
$r^h(\theta_1)$		8.37	8.21	8.10	8.00
$\tilde{e}^h(\theta_1)$		7.49E-5	2.71E-6	9.43E-8	3.15E-9
$p^h(\theta_1)$		7.41E-4	8.95E-5	1.11E-5	1.38E-6
$e^h(\theta_2)$	5.41E-3	6.48E-4	7.91E-5	9.77E-6	1.22E-6
$r^h(\theta_2)$		8.35	8.19	8.10	8.00
$\tilde{e}^h(\theta_2)$		6.85E-5	2.47E-6	8.58E-8	2.85E-9
$p^h(\theta_2)$		6.55E-4	7.95E-5	9.78E-6	1.22E-6

5 结 论

一般地, 利用机械求积法求解此微分方程主要有两个优点: 1) 计算离散矩阵中的每个元素都非常简单而直接, 不需要计算任何奇异积分; 2) 此算法具有高精度阶 $O(h^3)$. 同时根据数值结果可以发现, 若问题离散的规模越大, 则精确程度就越高. 同时本文只针对光滑边界上的问题采用了机械求积法, 此方法可以推广到非光滑边界上去.

参考文献:

- [1] Alvarez G, Loula A, Dutra E, Rochinha F. A discontinuous finite element formulation for Helmholtz equation[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2006, **195**(33/36): 4018-4035.
- [2] Hiptmair R, Meury P. Stabilized FEM-BEM coupling for Helmholtz transmission problems [J]. *SIAM J Numer Anal*, 2006, **44**(5): 2107-2130.
- [3] Hsiao G, Wendland W. A finite element method for some integral equations of the first kind [J]. *J Math Anal Appl*, 1977, **58**(3): 449-481.
- [4] Li R. On the coupling of BEM and FEM for exterior problems for the Helmholtz equation[J]. *Math Comp*, 1999, **68**(227): 945-953.
- [5] Sze K, Liu G. Hybrid-Trefftz six-node triangular finite element models for Helmholtz problem

- [J]. *Comp Mech*, 2010, **46**(3): 455-470.
- [6] Ruotsalainen K, Wendland W. On the boundary element method for some nonlinear boundary value problems[J]. *Numer Math*, 1988, **53**(3): 299-314.
- [7] Atkinson K, Chandler G. Boundary integral equation methods for solving Laplace's equation with nonlinear boundary conditions: the smooth boundary case[J]. *Math Comp*, 1990, **55**(192): 451-472.
- [8] Huang J, Wang Z. Extrapolation algorithms for solving mixed boundary integral equations of the Helmholtz equation by mechanical quadrature methods[J]. *SIAM J Sci Comput*, 2009, **31**(6): 4115-4129.
- [9] Banerjee P. *The Boundary Element Methods in Engineering*[M]. London: McGraw-Hill, 1994.
- [10] Huang J, Lu T. The mechanical quadrature methods and their extrapolations for solving BIEs of Steklov eigenvalue problems[J]. *J Comput Math*, 2004, **22**: 719-726.
- [11] 林群. 关于非线性积分方程的机械求积解法的一点笔记[J]. 数学进展, 1958, **4**(1): 139-142. (LIN Qun. A note of nonlinear integral equations of the mechanical quadrature solution[J]. *Advances in Mathematics(China)*, 1958, **4**(1): 139-142. (in Chinese))
- [12] Ismail A S. On the numerical solution of two-dimensional singular integral equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **173**(1): 389-393.
- [13] Yan Y. A fast boundary element method for the two-dimensional Helmholtz equation[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1993, **110**(3/4): 285-299.
- [14] Shen J, Wang L L. Spectral approximation of the Helmholtz equation with high wave numbers[J]. *SIAM J Numer Anal*, 2005, **43**(2): 623-644.
- [15] Kress R, Sloan I H. On the numerical solution of a logarithmic integral equation of the first kind for the Helmholtz equation[J]. *Numer Math*, 1993, **66**(1): 199-214.
- [16] 程攀, 黄晋, 王前东, 吕涛. 一类边界积分方程的高精度机械求积法[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2004, **41**(6): 1109-1115. (CHENG Pan, HUANG Jin, WANG Qian-dong, LU Tao. High accuracy mechanical quadrature method for solving boundary integral equations[J]. *Journal of Sichuan University(Natural Science Edition)*, 2004, **41**(6): 1109-1115. (in Chinese))
- [17] Cheng P, Huang J, Zeng G. Splitting extrapolation algorithms for solving the boundary integral equations of Steklov problems on polygons by mechanical quadrature methods[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2011, **35**(10): 1136-1141.
- [18] Huang J, Lu T, Li Z. The mechanical quadrature methods and their splitting extrapolations for boundary integral equations of first kind on open arcs[J]. *Appl Numer Math*, 2009, **59**(12): 2908-2922.
- [19] Sidi A, Israeli M. Quadrature methods for periodic singular and weakly singular Fredholm integral equations[J]. *J Sci Comput*, 1988, **3**(2): 201-231.
- [20] Sloan I, Spence A. The Galerkin method for integral equations of the first-kind with logarithmic kernel; theory[J]. *IMA J Numer Anal*, 1988, **8**(1): 123-140.
- [21] Ortege J, Kheinboldt W. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*[M]. New York, London: Academic Press, 1970.
- [22] Anselone P. *Collectively Compact Operator Approximation Theory and Applications to Integral Equations*[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1971.

Mechanical Quadrature Methods and Extrapolation for Solving Nonlinear Boundary Integral Equations of Helmholtz Equation

CHENG Pan¹, HUANG Jin², WANG Zhu^{2,3}

1. *School of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P. R. China;*
2. *School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, P. R. China;*
3. *Department of Mathematics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA 24061, U. S. A)*

Abstract: Mechanical quadrature methods (MQMs) for solving nonlinear boundary integral equations of Helmholtz equation, which possessed high accuracy order $O(h^3)$ and low computing complexities, were presented. Moreover, the mechanical quadrature methods were simple without computing any singular integration. A nonlinear system was constructed by discretizing the nonlinear boundary integral equations. The stability and convergence of the system were proved based on asymptotical compact theory and Stepleman theorem. Using the h^3 -Richardson extrapolation algorithms (EAs), the accuracy order to $O(h^5)$ was improved. For solving the nonlinear system, Newton iteration was discussed extensively by Ostrowski fixed point theorem. The efficiency of the algorithms was illustrated by numerical examples.

Key words: Helmholtz equation; mechanical quadrature method; Newton iteration; nonlinear boundary condition