

Lin-Reissner-Tsien 方程的自相似解*

J·郝泽曼, K·法拉菲路, R·A·冯歌德

(中佛罗里达大学 数学系, 161364 信箱, 奥兰多市, 佛罗里达州 32816-1364, 美国)

摘要: Lin-Reissner-Tsien 方程描述了在跨音速近似下的不稳定跨音速流动. 通过相似变换, 将 Lin-Reissner-Tsien 方程简化为一个常微分方程. 然后解析求解所得到的方程, 并在某些情况下得到的正好是精确解. 上述情况下无法得到精确解时, 给出了数值模拟, 还得到了行波解.

关键词: Lin-Reissner-Tsien 方程; 自相似解; 跨音速近似; 非线性偏微分方程

中图分类号: O175 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.11.009

引 言

Lin-Reissner-Tsien 方程(无量纲形式)为

$$u_{xt} + u_x u_{xx} - u_{yy} = 0. \quad (1)$$

该方程被用来描述跨音速近似下不稳定跨音速的气体流动. 物理上, u 为速度场的势^[1-3], x 和 y 为空间坐标, t 为时间坐标. 对于某些应用, 它被看作与如下方程相关:

$$u_{xt} + u_x u_{xx} - u_{yy} = h(x, y, t), \quad (2)$$

其中 $h(x, y, t)$ 代表外部的电磁力和/或质量力. Bogdanov 等在文献[4]中, 研究了该方程的物理特性, 以及与其密切相关的修正方程, 得到了关于平面跨音速流动的一些定性的结果. Bibik 等在文献[5]中, 对数值解进行了充分地研究, 给出了定性和定量的物理结果. 另外, 还进行了自相似解的研究(与本文所考虑的自相似属不同的类).

Glazatov^[6]在特定的周期边界条件下, 对确定的一类解的存在性和唯一性结果给出了证明. 在平行平面跨音速气体流动的特例情况下, 文献[6]给出了相关的定义域:

$$x \in (0, 2\pi), y \in (0, 1), t \in (0, T), \quad 0 < T < \infty, \quad (3)$$

给出的初始-边值条件为

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (4)$$

$$u(0, y, t) = u(2\pi, y, t), u_x(0, y, t) = u_x(2\pi, y, t), \quad (5)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0. \quad (6)$$

这里, 方程(5)规定了气体流动的状态, 方程(6)是一个不可渗透性条件^[6]. 然而, 这些条件依赖于流动问题及其附近相关的几何条件, 以及(又是所允许的, 我们给出的这一组条件作为一个例子)初始-边值条件的其他说明. 例如, 可以考虑为无限的空间区域.

* 收稿日期: 2011-01-24; 修订日期: 2011-07-08

作者简介: Robert A. Van Gorder (E-mail: rav@knights.ucf.edu).

本文原文为英文, 黄雅意译, 张禄坤校.

值得注意的是,模型被拓展或者修正后,更正确地研究其他形式的跨音速流动^[7]. Diesperov 和 Korolev^[8]应用三层理论(triple-deck theory),研究流过平板表面粗糙小单元时的跨音速气体流动.有趣的是,外区域的势流正是由 Lin-Reissner-Tsien 方程所描述.作者发现两个超音速的流动区域,向着外部非粘性区域发展;区域为冲击波所封闭,并和各自的其他区域相连接.进一步发现,这些冲击波向着来流方向.沿着相似的线索,Bogdanov 和 Duesperov^[9]使用三层模型,就跨音速非稳态自由粘性-非粘性的相互作用,研究边界层中的扰动.他们所建立的模型,能够用来处理奇异的跨音速膨胀项,跨音速膨胀项正是对标准的 Lin-Reissner-Tsien 方程的一种改进.

本文,我们首先将 Lin-Reissner-Tsien 方程简化为常微分方程,使得 Lin-Reissner-Tsien 方程的分析和求解更经得起检验.变换方法主要依靠相似变换,同时,得到两个结果:当初试值为特定形式时,给出精确解;当初试值没有这样的限制时,给出解析解.在这样做之前,还将提及其他的简化方法,例如行波解假设.

考虑如下变换:

$$u = f(w), \quad w = x + y - ct, \quad c \in \mathbf{R}. \quad (7)$$

在该假设下,得到常微分方程

$$(f' - (c + 1))f'' = 0, \quad (8)$$

其中,上撇号表示对 w 的导数.上式对 w 进行积分,得到关于 f' 的二次方程

$$(f')^2 - 2(c + 1)f' - 2G_1 = 0, \quad (9)$$

其中, G_1 为积分常数.解该二次方程,然后再次积分,得到

$$f_{\pm} = \left[(c + 1) \pm \frac{1}{2} \sqrt{4(c + 1)^2 + 8G_1} \right] w + G_2. \quad (10)$$

根据方程(9)和(10),有

$$G_1 = \frac{1}{2}(f'(0))^2 - (c + 1)f'(0), \quad G_2 = f(0), \quad (11)$$

从而,给出了行波解

$$f_{\pm} = \left[(c + 1) \pm \sqrt{(c + 1)^2 + (f'(0))^2 - 2(c + 1)f'(0)} \right] w + f(0). \quad (12)$$

注意到

$$\begin{aligned} (c + 1)^2 + (f'(0))^2 - 2(c + 1)f'(0) = \\ ((c + 1) - f'(0))^2 \geq 0, \quad \text{对所有的 } c. \end{aligned} \quad (13)$$

因此,该结果对所有的 $c \in \mathbf{R}$ 是明晰的.与行波解的平凡自然不同,自相似解并不总能得到如此令人满意的解.可是,正如我们将在下一节中给出的,在某些特例情况下,我们可以得到精确解.

1 自相似解

现在对 Lin-Reissner-Tsien 方程(1)讨论确定的自相似解.我们首先考虑稳态情况,稳态情况适合作为比较的基线,并允许有精确解.这就是说,假设要求得到相似的约简,稳态情况下的自相似变换,与完备非稳态情况下的自相似变换完全不同.包括稳态问题和自相似解的完整性.请注意,这样的解在文献中亦有出现,但我们这里给出的完整性的推导是对非稳态情况,得到了两种形式的结果,在已有文献尚未出现过.首先,对于形式为 $\phi(0) = b$ 和 $\phi'(0) = a$ (其中 a 和 b 为实数值参数)的任意初值情况,探究 Taylor 级数解和数值解.然后发现,如果 $\phi'(0)$ 是

$\phi(0)$ 的一个特定的函数,则存在一个唯一的二次解. 换言之,对于任意给定的 $\phi(0) \in \mathbf{R}$, 存在一个唯一的二次解,我们可以精确地确定.

1.1 稳态方程的自相似解

由方程(1)导出稳态方程:

$$u_x^* u_{xx}^* - u_{yy}^* = 0, \quad (14)$$

其中

$$u^*(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, y, t). \quad (15)$$

假设稳态方程有一个如下形式的解:

$$u = \psi(\tau), \quad \tau = \frac{x}{y^{2/3}}, \quad (16)$$

得到常微分方程

$$\psi' \psi'' - \frac{4}{9} \tau^2 \psi'' - \frac{10}{9} \tau \psi' = 0. \quad (17)$$

假设这个方程存在两个 Taylor 级数形式的解:常数解 $\psi(\tau) = \psi(0)$ 及精确的多项式解

$$\psi(\tau) = \frac{1}{3} \tau^3 + \psi(0). \quad (18)$$

通常,非线性微分方程的解,比相应的线性方程的解,更为复杂.考虑线性方程

$$\left(1 - \frac{4}{9}\right) \tau^2 \psi'' - \frac{10}{9} \tau \psi' = 0. \quad (19)$$

该方程可以直接积分,得到

$$\psi(\tau) = \psi'(0) \tau {}_2F_1\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right], \left[\frac{3}{2}\right], \frac{4\tau^2}{9}\right) + \psi(0). \quad (20)$$

有趣的是,线性问题(19)的解,比原来非线性问题(17)的解,更为复杂.在摄动理论中,得到一个非线性方程线性化后的展开式.因而,在这里所考虑的情况中,摄动技术远不如直接求解非线性方程有用.

回到原来的稳态问题,对式(16)进行逆变换,得到解(18)为

$$u^*(x, y) = \frac{x^3}{3y^2} + \psi(0). \quad (21)$$

这个结果与文献[10-12]所讨论的结果是一致的.

1.2 随时间变化方程的自相似解:任意初始值下的解析解

接下来,考虑完备方程(1)的自相似解.一般而言,项 $h(x, y, t)$ 破坏了相似性,因此再一次假设 $h(x, y, t) = 0$. 那么,有

$$u_{xt} + u_x u_{xx} - u_{yy} = 0. \quad (22)$$

假设有如下形式的解:

$$u = \frac{y^4}{t^3} \phi(\eta), \quad \eta = \frac{xt}{y^2}, \quad (23)$$

得到常微分方程

$$\phi' \phi'' + (1 - 4\eta^2) \phi'' - (2 - 10\eta) \phi' - 12\phi = 0. \quad (24)$$

与方程(17)给出的稳态方程相比较,方程(24)包含了一个 ϕ 项(稳态方程中并没有这一项,实际上是我们首次得到的).由于状况的复杂性,精确解无法事先得到.我们将首先通过 Taylor 级数,推演出解的局部特点,然后构建数值解.为此,我们必须考虑初始条件

$$\phi'(0) = a, \phi(0) = b, \quad (25)$$

其中 a 和 b 均为实数值参数. 我们必须考虑两种情况: $a = -1$ 或 $a \neq -1$. 对于第 1 种情况, 注意到, 当 $\eta = 0$ 且 $a = -1$ 时, 评测方程 (24) 迫使 $b = 1/6$; 因此, 当 $a = -1$ 时, b 不是一个独立参数. 这是因为当 $a = -1$ 时, ϕ'' 的系数 (即 $\phi' + 1 - 4\eta^4$) 变为 0, 因而在 $\eta = 0$ 处, 方程退化了. 级数解假设表明, 对这样一个退化的方程, 没有实数解. 有一个非物理意义上的复数解, 如下精确地给出:

$$\phi(\eta) = \frac{1}{6} - \eta + \frac{1+i}{2}\eta^2, \quad (26)$$

其中 $i^2 = -1$. 因此, 条件 $a = -1$ 是非物理意义条件. 对于 $a \neq -1$, 请注意, 式 (24) 在某些 $\eta > 0$ 点处, 依然可能出现退化. 因而, 足够靠近 $\eta = 0$ 时, 问题将不再退化.

现在来推演 $a \neq -1$ 时的 Taylor 级数解. 在标准的假设下, 得到如下形式:

$$\phi(\eta) = b + a\eta + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P_k(a, b)}{(a+1)^{2k-3} k!} \eta^k, \quad (27)$$

其中 $P_k(a, b)$ 是 a 和 b 的一个多项式. P_k 的前面几项为

$$P_2(a, b) = 2a + 12b, \quad (28)$$

$$P_3(a, b) = 4a^2 + 6a - 24ab + 24b + 2a^3 - 144b^2, \quad (29)$$

$$P_4(a, b) = -72a^3b + 1440b^2a + 12a + 48b - 8a^4 - 16a^2 + 5184b^3 - 12a^3 - 360ab - 1152b^2 - 48a^2b. \quad (30)$$

进一步注意到, 对于所有的 $k \geq 2$, 多项式 P_k 中每个变量的阶次不超过 k 值.

当这样的解足够准确地靠近 $\eta = 0$ 时, 它们终止, 进而远离 $\eta = 0$. 为了增强 Taylor 级数的收敛性, 可以构造 Padé 近似, 允许我们得到一个式 (24) 的有理函数近似. 为了论证这 3 种解在靠近 $\eta = 0$ 时的一致性, 图 1 给出了 Taylor 级数、Padé 近似和数值解 (由 Runge-Kutta-Fehlberg 45 法得到的). 对于大数值的 η , 在相当有限区域上, 数值解分支有着 Taylor 级数解一样的收敛性. 当然, 解析解和数值解之间的一致性, 显示出数值解的有效性, 在那个意义上, Taylor 级数解有着实际的应用价值.

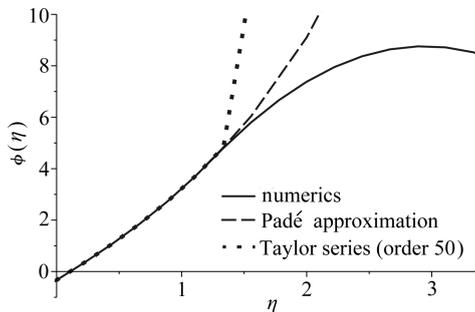


图 1 由 50 阶的 Taylor 级数和 Padé 近似, $\phi(\eta)$ 的数值计算图 (其中设 $\phi(0) = -1/3$ 和 $\phi'(0) = 3$; η 足够小时, 解析解与数值解相一致)

Fig. 1 Plot of $\phi(\eta)$ computed numerically, by Taylor series of order 50 and by Padé approximation (here we have set $\phi(0) = -1/3$ and $\phi'(0) = 3$; the analytical solutions agree with the numerics for sufficiently small η)

在图 2 中, 保持 $b = \phi(0)$ 不变, 随着 $a = \phi'(0)$ 值的变化, 描绘出解的性质. 同样地, 在图 3

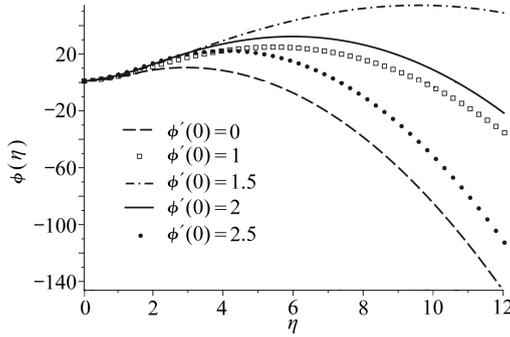


图2 保持 $\phi(0) = 1$ 不变, $\phi'(0)$ 取不同数值时, $\phi(\eta)$ 的数值计算图
(注意对大数值的 η , 曲线 $\phi'(0) = 1.5$ 在上侧, 其他曲线在下侧)

Fig. 2 Plot of $\phi(\eta)$ computed numerically for various values of $\phi'(0)$ while we fix $\phi(0) = 1$
(note that the profiles shift upward until $\phi'(0) = 1.5$, past which the profiles begin to shift downward for larger values of η)

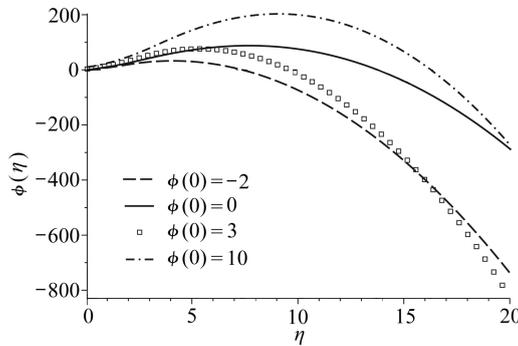


图3 保持 $\phi'(0) = 10$ 不变, $\phi(0)$ 取不同数值时, $\phi(\eta)$ 的数值计算图
(可以发现, $\phi(0)$ 值发生变化时, 解曲线并没有出现倾向性的变化趋势)

Fig. 3 Plot of $\phi(\eta)$ computed numerically for various values of $\phi(0)$ while we fix $\phi'(0) = 10$ (here is really no general trend present in the solutions given a change in the value of $\phi(0)$)

中, 保持 $a = \phi(0)$ 不变, 随着 $b = \phi(0)$ 值的变化, 描绘出解的性质.

1.3 随时间变化方程的自相似解: 有限制初始值下的精确解

上一节的数值解暗示, 出现以时间常数 η^2 为比例的渐近解. 让我们重新考虑式 (23) 的解. 代替完备的 Taylor 级数解, 考虑一个形式如下的解:

$$\phi(\eta) = \frac{\alpha_2}{2} \eta^2 + \alpha_1 \eta + \alpha_0 = \frac{\phi''(0)}{2} \eta^2 + \phi'(0) \eta + \phi(0). \tag{31}$$

将式 (31) 代入式 (24), 找到式 (31) 成为一个解所必须满足的条件:

$$\alpha_2^2 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \tag{32}$$

和

$$\alpha_2 \alpha_1 - 12\alpha_0 + \alpha_2 - 2\alpha_1 = 0. \tag{33}$$

解这两个方程, 将量 α_1 和 α_2 表示为 α_0 的形式:

$$\alpha_2 = \frac{1}{3} \sqrt[3]{-44 + 324\alpha_0 + 18\sqrt{6 - 88\alpha_0 + 324\alpha_0^2}} -$$

$$\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{-44 + 324\alpha_0 + 18\sqrt{6 - 88\alpha_0 + 324\alpha_0^2}}} + \frac{4}{3}, \quad (34)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2^2 - \alpha_2, \quad (35)$$

对所有的 $\alpha_0 \in \mathbf{R}$, 当 $6 - 88\alpha_0 + 324\alpha_0^2 > 0$, 对 $\phi(0)$ 的任意实数值, 这些量总是存在的.

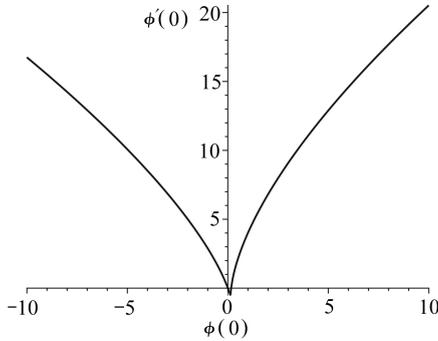


图4 以式(31)为精确解时的 $\phi'(0) \sim \phi(0)$ 图形
(注:所有的 $\phi'(0)$ 值均满足 $\phi'(0) > -1$)

Fig. 4 Plot of $\phi'(0)$ versus $\phi(0)$ permitting the exact solution of the form given in (31)
(notice that all such values of $\phi'(0)$ satisfy $\phi'(0) > -1$)

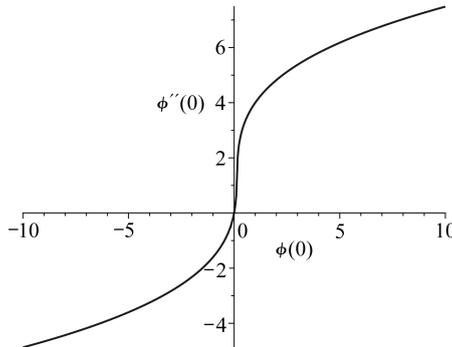


图5 以式(31)为精确解时的 $\phi''(0) \sim \phi(0)$ 图形

Fig. 5 Plot of $\phi''(0)$ versus $\phi(0)$ permitting the exact solution of the form given in (31)

图4和图5分别描绘出初始值 $\phi'(0)$ 和 $\phi''(0)$ 作为 $\phi(0)$ 的函数时发生的变化. 由图4可以看出, 对于所有的 $\phi(0)$, 曲线 $\phi'(0)$ 满足 $\phi'(0) > -1$ (当 $\phi(0) = 1/8$ 时, 出现最小值 $\phi'(0) = -1/2$), 因此, 这里得到的精确解, 绝不会使方程(23)退化. 与前面所考虑的 Taylor 级数解相比较, 我们可以自由地选择 $\phi'(0)$, 与 $\phi(0)$ 无关, 在某些情况下, 对于某个 $\eta_0 > 0$, 有性质 $\phi'(\eta_0) = 0$ 的解. 对于 $\phi(0)$ 的每个实数值, 存在一个 $\phi'(0)$ 值和一个 $\phi''(0)$ 值, 因此, 式(31)的解是唯一的.

作为例子, 考虑到 $\phi(0) = 1$ 的情况. 那么, 可以得到精确解

$$\phi(\eta) = 2\eta^2 + 4\eta + 1. \quad (36)$$

利用式(23), 将式(36)变换为方程(1)的一个解:

$$u(x, y, t) = 2 \frac{x^2}{t} + 4 \frac{xy^2}{t^2} + \frac{y^4}{t^3}, \quad (37)$$

这样一个解不可能是显而易见的,无法由变换式(23)得到.

2 讨 论

本文研究控制跨音速气体流动的 Lin-Reissner-Tsien 方程,得到了完备方程和稳态方程的自相似解.发现稳态方程的自相似解,可以用简单的 x 和 y 有理函数表示,这样的结果与文献中的结果是一致的.在不同的初始条件下,研究了完备的自相似解,并将数值结果与 Taylor 级数解和 Padé 近似解相比较.还研究了初始-边值问题的行波解,对任意选择的相关初始条件,找到线性方程的实数值函数.

采用本方法的一个好处是,如果选择得合理,可以将非线性偏微分的控制方程,简化变换为非线性的常微分方程.在某些情况下,该常微分方程甚至可以精确地求解,得到三次解(稳态情况)或者二次解(非稳态情况).有趣的是,当 $\phi'(\eta) = 4\eta^2 - 1$ 时,控制方程(24)(非稳态情况)变为退化的,出现无精确解的异常表现.当 $\phi'(0)$ 和 $\phi(0)$ 彼此独立选择时,上述得到的 Taylor 级数解或数值解不可能相同.在这种情况下,区域 $[0, \infty)$ 上可能存在一点 η_0 使得 $\phi'(\eta_0) = 4\eta_0^2 - 1$.为此,对几组初始条件 $\phi'(0) = a$ 和 $\phi(0) = b$,在图6中描绘出 $\phi'(\eta) \sim (4\eta^2 - 1)$ 图形的变化.

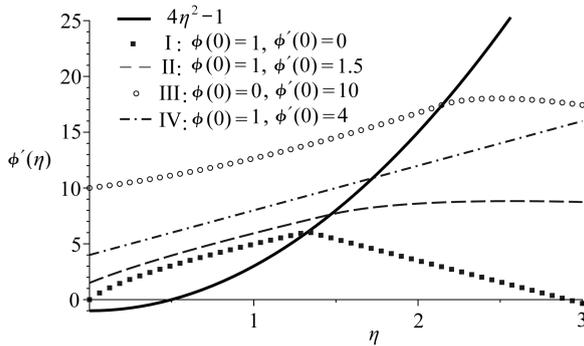


图6 当 $\phi(0)$ 和 $\phi'(0)$ 取不同组合以及曲线 $4\eta^2 - 1$ 时的 $\phi'(\eta)$ 图
(当 $\phi'(\eta) = 4\eta^2 - 1$ 时,方程(24)退化)

Fig. 6 Plot of $\phi'(\eta)$ for various combinations of $\phi(0)$ and $\phi'(0)$. Also plotted is the curve $4\eta^2 - 1$ (when $\phi'(\eta) = 4\eta^2 - 1$, equation (24) becomes degenerate)

幸运的是,在我们所研究的情况中,这些解在一组零测度上满足 $\phi'(\eta_0) = 4\eta_0^2 - 1$,要求所有的解为真.为此,我们相反假设,即假设在某个区间 \mathcal{D} 上, $\phi' + 1 - 4\eta^2 = 0$.那么,在 \mathcal{D} 上,有 $\phi(\eta) = 4\eta^3/3 - \eta + C$,其中 C 为积分常数.然而,当系数 ϕ'' 趋于0时,为了满足式(24),在 \mathcal{D} 上必须有 $(2 - 10\eta)\phi' + 12\phi = 0$.该方程的解为 $\phi(\eta) = C_1/(1 + 5\eta)^{6/5}$,其中 C_1 为另一个积分常数.因而,在区间 \mathcal{D} 上,需要满足 $4\eta^3/3 - \eta + C = C_1/(1 + 5\eta)^{6/5}$.但是,这样一个方程在复平面上有21个解,因而在区间 \mathcal{D} 上最多有21个解.然而,由于 \mathcal{D} 为一个区间,它有无限多个点;因此,方程 $\phi' + 1 - 4\eta^2 = 0$ 和原始方程(24),在区间 \mathcal{D} 上无法同时满足.这样,方程(24)至多在一组离散的点上出现退化.

由图6可以看出,对于小数值的 η ,初始条件极大地影响着 $\phi(\eta)$,直至 $\phi'(\eta) = 4\eta^2 - 1$ 以后,有些解将突然趋于 $-\infty$ (情况 I 和 III 最明显地反映这个性质).此后的曲线 $\phi'(\eta)$ 呈线性,则 $\phi(\eta)$ 如同二次曲线.出于这个原因,有些情况下尝试解的匹配是有意义的.对于小数值的 η ,可以取 Taylor 级数解(27);对于大数值的 η ,可以取二次式(31).级数解控制着初始值

和 $\eta = 0$ 附近的局部特性;二次式解,控制着解的渐近特性.在满足 $\phi'(\eta_0) = 4\eta_0^2 - 1$ 的点 η_0 附近,在 $\eta_1 > 0$ 的某个点上,匹配这两个解(数值模拟显示,点 η_1 出现在 η_0 之后,一般来说两个点是不同的;然而,如果要求原数量级达到十分接近的程度,两个点也可以取得相同).

注意式(31)给出精确的非稳态解,当 $t \rightarrow +\infty$ 时,解衰减至 0.将它和精确的稳态解(21)相对比,后者明显不会衰减至 0.因此,在稳态解和非稳态解之间,定性上的差异是很大的.然而,这样的差异在物理上是合理的.确实,对于跨音速的流动来说,稳态解可以是不稳定的,恰在物理上是合理的.而非稳态解常常与物理应用密切相关.

通过 Runge-Kutta-Fehlberg 45 法,得到绝对误差允许值为 10^{-5} 时的数值解.数值解对所取的初始值条件相当敏感.我们发现,满足初始条件的数值稳定项状态最佳,与精确解(31)要求满足的条件类似,如图 4 所示.还可以发现,数值解并不只与初始条件相关,图 2 得到了很好地表示:选择不同的 $\phi'(0)$ 值,描绘出数值解的结果;随着 $\phi'(0)$ 的增加, $\eta = 0$ 附近曲线 $\phi(\eta)$ 也在增加(正是所预料的);对于大数值的 η , $\phi'(0) = 0$ 和 $\phi'(0) = 2$ 所对应的曲线,均在 $\phi'(0) = 1.5$ 所对应的曲线下方.

参考文献:

- [1] Lin C C, Reissner E, Tsien H S. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid[J]. *J Math Phys*, 1948, **27**: 220-231.
- [2] Ames W F, Nucci W N. Analysis of fluid equations by group methods[J]. *J Eng Mech*, 1985, **20**(2): 181-187.
- [3] Kuz'min A G, Ivanova A V. The structural instability of transonic flow associated with amalgamation/splitting of supersonic regions[J]. *Fluid Dynamics*, 2004, **18**(5): 335-344.
- [4] Bogdanov A N, Duesperov V N. The properties of asymptotic expansions for the parameters of unsteady transonic flow with axial symmetry[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **72**(1): 33-35.
- [5] Bibik Yu V, Duesperov V N, Popov S P. Structure of time dependent transonic flows in pane channels[J]. *Fluid Dynamics*, 2005, **40**(2): 315-325.
- [6] Glazatov S N. On solvability of a spatial periodic problem for the Lin-Reissner-Tsien equation of transonic gas dynamics[J]. *Mathematical Notes*, 2010, **87**(1/2): 130-134.
- [7] Bogdanov A N, Duesperov V N. Higher approximations of the transonic expansion in problems of unsteady transonic flow[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, **61**(5): 775-786.
- [8] Duesperov V N, Korolev G L. Triple-deck analysis of formation and evolution of supersonic zones and local separation zones in unsteady transonic flow over a surface roughness element [J]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2005, **45**(3): 516-523.
- [9] Bogdanov A N, Duesperov V N. Tollmien-Schlichting waves in a transonic boundary layer: excitation from the outer flow and from the surface[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **71**(2): 258-268.
- [10] Titov S S. A method finite-dimensional rings for solving nonlinear equations of mathematical physics[C]// Ivanova T P. *Aerodynamics*. Saratov: Saratov University, 1988: 104-110. (in Russian)
- [11] Svirshchevskii S R. Lie-Bäcklund symmetries of linear ODEs and generalized separation of variables in nonlinear equations[J]. *Phys Lett A*, 1995, **199**(5/6): 344-348.

- [12] Polyanin A D, Zaitsev V F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*[M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004.

Self-Similar Solutions to the Lin-Reissner-Tsien Equation

John Haussermann, K. Vajravelu, Robert A. Van Gorder

(*Department of Mathematics, University of Central Florida, P. O. Box 161364, Orlando, FL 32816-1364, USA*)

Abstract: The Lin-Reissner-Tsien equation describes unsteady transonic flows under the transonic approximation. The equation was reduced to an ordinary differential equation via a similarity transformation. The resulting equation was then solved analytically, and in some cases even exactly. Numerical simulations were provided for the cases in which there were no exact solutions. Traveling wave solutions were also obtained.

Key words: Lin-Reissner-Tsien equation; self-similar solutions; transonic approximation; non-linear partial differential equation