应用数学和力学,第 32 卷 第 10 期
2011 年 10 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 32, No. 10, Oct. 15, 2011

文章编号:1000-0887(2011)10-1254-11

非 Lipschitz 集值混合变分不等式的一个投影次梯度方法*

唐国吉, 黄南京

(四川大学 数学系, 成都 610064)

(张石生推荐)

摘要: 建立了一个投影次梯度方法来求解一类集值混合变分不等式,其中相关的映象不必是 Lipschitz 连续的. 在合适的条件下,证明了在 Hilbert 空间中该方法产生的序列强收敛于问题的唯一解.

关 键 词: 集值混合变分不等式; 投影次梯度方法; 非 Lipschitz 映象; 收敛性

中图分类号: O177.91; O178 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.10.011

引 言

设 H 是一个 Hilbert 空间且 K 是 H 中的一个非空闭凸子集. 设 $T: K\to 2^H$ 是一个集值映象且 $f: H\to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是一个真凸下半连续函数. 我们考虑如下的集值混合变分不等式(简记为 SMVI(T,K)):找 $x^*\in K$ 和 $w^*\in T(x^*)$ 使得

$$\langle w^*, x-x^*\rangle + f(x) - f(x^*) \geqslant 0, \qquad \forall x\in K. \tag{1}$$

集值混合变分不等式(1)在很多应用领域中会遇到,比如,力学问题(如文献[1])和均衡问题(如文献[2]).

众所周知,问题(1)包含大量的问题作为特例. 比如,如果 T 是定义在 Hilbert 空间 H 上的取有限值的连续凸函数 φ 的次微分,那么问题(1)退化为如下的不可微优化问题:

$$\min_{x\in K}\{f(x)+\varphi(x)\}.$$

此外,如果 $f=0$,则问题(1) 退化为如下的集值变分不等式问题:找 $x^*\in K$ 和 $w^*\in T(x^*)$ 使得

$$\langle w^*, x-x^*\rangle \geqslant 0, \qquad \forall x\in K. \tag{2}$$

如果 T 是单值的且 $f=0$,则不等式(1) 变为经典的变分不等式问题:找 $x^*\in K$ 使得

$$\langle T(x^*), x-x^*\rangle \geqslant 0, \qquad \forall x\in K. \tag{3}$$

在变分不等式理论中,发展有效的迭代算法来计算近似解和研究算法的收敛性是最为有

* **收稿日期:** 2011-04-02; **修订日期:** 2011-07-07

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(70831005);国家自然科学基金资助项目(10671135);中央高校基本科研业务费资助项目(2009SCU11096)

作者简介: 唐国吉(1979—), 男, 广西防城港人, 博士生(E-mail: guojvtang@126.com);
黄南京(1962—), 男, 江西石城人, 教授(联系人. E-mail: nanjinghuang@hotmail.com).

意义和重要的问题之一(如文献[3-25]). 在已有的方法中,最简单的是投影类方法,它已经被许多学者广泛研究过(如文献[3-4]). 然而,经典的投影方法并不能用于求解集值混合变分不等式(1). 因此,为了求解问题(1),一些学者开始研究其它容易实现的方法. 特别是,通过使用类似于 Alber 等[26]的思想,在 Hilbert 空间中,Xia 等[5]考虑了一个投影次梯度方法来求解问题(1). 在每一个迭代步骤中,他们选取函数 f 的一个 ε_j 次梯度 p^j 和集值映象 T 中的一个点 v^j,然后再垂直投影到可行集上. 更具体地,他们给出了如下算法:

算法 A (见文献[5]的算法 3.1)

步骤 0　取初始点 $x^0 \in K$ 和 $v^0 \in T(x^0)$. 置 $j = 0$.

步骤 1　如果 $0 \in T(x^j) + \partial f(x^j)$, 停止;否则执行步骤 2.

步骤 2　取 $p^j \in \partial_{\varepsilon_j} f(x^j)$, $\eta_j = \max\{1, \|v^j\| + \|p^j\|\}$, 计算

$$x^{j+1} = P_K\left[x^j - \frac{\rho_j}{\eta_j}(v^j + p^j)\right], \tag{4}$$

其中, ρ_j, ε_j 满足

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j = +\infty, \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j^2 < +\infty, \varepsilon_j \leqslant \mu\rho_j \qquad (\mu > 0).$$

步骤 3　取 $v^{j+1} \in T(x^{j+1})$ 使得

$$\|v^{j+1} - v^j\| \leqslant \left(1 + \frac{1}{j+1}\right) H(T(x^{j+1}), T(x^j)).$$

令 $j = j + 1$ 并转回步骤 1.

如果 T 在 K 上是仿单调且弱闭的,并且在 K 上的有界子集上是 Lipschitz 连续的,Xia 等[5]证明了算法 A 产生的序列弱收敛于问题(1)的一个解.

然而,一般地, T 的 Lipschitz 常数并不容易计算. 为了克服这个困难,最近,Anh 等[9]在有限维空间中推广了投影算法来求解强单调集值变分不等式(2),其中 T 不必是 Lipschitz 的. 并且在每一个迭代步骤中,最多只需一次投影到可行集上.

受以上研究工作的启发,我们在本文中建立一个新的投影次梯度方法来求解集值混合变分不等式(1),其中 T 不必是 Lipschitz 的. 如果 T 满足某种广义单调的条件,该条件不同于 Xia 等[5]使用的仿单调假设,那么我们可以证明新方法产生的序列在 Hilbert 空间中是强收敛的,而在文献[5]中只获得弱收敛结果. 本文的结果把 Anh 等[9]的相应结果从集值变分不等式(2)推广到集值混合变分不等式(1)和从有限维空间推广到无穷维空间,并且改善了相应结果.

1　预备知识

定义 1　设 $T: K \subset H \to 2^H$ 是一个取非空值的集值映象, $f: K \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个真凸下半连续函数. 映象 T 称为

(i) 在 K 上是强单调的当且仅当,存在 $\beta > 0$ 使得对于 graph T 中所有的 (x, x^*), (y, y^*) 有下式成立:

$$\langle y^* - x^*, y - x\rangle \geqslant \beta \|y - x\|^2;$$

(ii) 在 K 上单调当且仅当,对 graph T 中所有的 (x, x^*), (y, y^*) 有下式成立:

$$\langle y^* - x^*, y - x\rangle \geqslant 0;$$

(iii) 在 K 上仿单调当且仅当, T 是单调的且 $\langle y^* - x^*, y - x\rangle = 0$ 和 (x, x^*), (y, y^*) $\in$

graph$T$ 可推出$(x,y^*),(y,x^*) \in$ graph T;

(iv) 在 K 上伪单调当且仅当,对 graph T 中所有的$(x,x^*),(y,y^*)$有下式成立:

$$\langle x^*, y-x\rangle \geqslant 0 \Rightarrow \langle y^*, y-x\rangle \geqslant 0;$$

(v) 在 K 上强伪单调当且仅当,存在$\beta > 0$ 使得对于 graph T 中所有的$(x,x^*),(y,y^*)$有下式成立:

$$\langle x^*, y-x\rangle \geqslant 0 \Rightarrow \langle y^*, y-x\rangle \geqslant \beta \| y-x \|^2;$$

(vi) 在 K 上f- 伪单调当且仅当,对 graph T 中所有的$(x,x^*),(y,y^*)$有下式成立:

$$\langle x^*, y-x\rangle + f(y) - f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \langle y^*, y-x\rangle + f(y) - f(x) \geqslant 0;$$

(vii) 在 K 上f-强伪单调当且仅当,存在$\beta > 0$使得对于graph T中所有的$(x,x^*),(y,y^*)$有下式成立:

$$\langle x^*, y-x\rangle + f(y) - f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \langle y^*, y-x\rangle + f(y) - f(x) \geqslant \beta \| y-x \|^2;$$

(viii) 在 K 中的子集 B 上是 Lipschitz 连续的当且仅当,存在 $L > 0$ 使得

$$H(T(x),T(y)) \leqslant L \| x-y \|, \qquad \forall x,y \in B,$$

其中 $H(\cdot,\cdot)$ 是 H 中的非空有界闭子集的 Hausdorff 度量,即

$$H(T(x),T(y)) = \max\left\{ \sup_{r\in T(x)} \inf_{s\in T(y)} \| r-s \|, \sup_{s\in T(y)} \inf_{r\in T(x)} \| r-s \| \right\}, \qquad \forall x,y \in B.$$

注 1

(i) 我们把单调性与一些广义单调性之间的蕴含关系说明如下:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{强伪单调} & \Leftarrow & \text{强单调} & \Rightarrow & f\text{- 强伪单调} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{伪单调} & \Leftarrow & \text{单调} & \Rightarrow & f\text{- 伪单调} \\
 & & \Uparrow & & \\
 & & \text{仿单调} & &
\end{array}$$

(ii) 如果$f \equiv$ const,那么f- 伪单调和f- 强伪单调分别退化为伪单调和强伪单调的定义.

(iii)f- 伪单调映象被 Yin 等[27]在 Banach 空间中用来研究 F-补问题,Zhong 和 Huang[28]在 Banach 空间中用来研究 Minty 型的混合变分不等式的稳定性,何[6]在有限维空间中用来分析混合变分不等式的一个算法的收敛性.伪单调与f- 伪单调之间的关系被 Zhong 和 Huang[28]讨论过.类似地,我们将讨论强伪单调与f- 强伪单调的关系.

下面的例子说明f- 强伪单调映象不必是伪单调的. 这样,由注 1(i)中的图表可知,f- 强伪单调映象不必是强伪单调的(如果$f \neq$ const),或强单调、或单调、或仿单调的.

例 1 设 $H = \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$,$K = [3,5]$. 令

$$f(x) = x^2, \qquad x \in K \text{ 和 } T(x) \equiv [-1,1], \qquad x \in K.$$

容易看到 T 在 K 上不是伪单调的. 然而, 我们可以证明 T 在 K 上是f- 强伪单调的. 事实上, 设$(x,x^*),(y,y^*) \in$ graph T 满足

$$\langle x^*, y-x\rangle + f(y) - f(x) = (x^* + y + x)(y-x) \geqslant 0.$$

那么 x^*, $y^* \in [-1, 1]$ 和 x, $y \in [3, 5]$ 可推出 $x^* + y + x > 0$, $y^* + y + x > y - x$, 因此 $y - x \geqslant 0$. 这样,我们可得到

$$\langle y^*, y-x\rangle + f(y) - f(x) = (y^* + y + x)(y-x) \geqslant (y-x)^2,$$

这说明 T 在 K 上是f- 强伪单调的(模为 1).

下面的例子说明强伪单调映象不必是f- 伪单调的. 这样,由注 1(i) 的图表可知强伪单调映

象不必是f-强伪单调的,或者强单调、或者单调、或者仿单调的.

例2 设$H=\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,$K=[-2,2]$.令

$$f(x)=x^2,\qquad x\in K \text{ 和 } T(x)\equiv[2,4],\qquad x\in K.$$

我们可以证明T在K上是强伪单调的.事实上,设$(x,x^*),(y,y^*)\in \text{graph } T$满足

$$\langle x^*,y-x\rangle=x^*(y-x)\geqslant 0.$$

那么$x^*,y^*\in[2,4]$和$x,y\in[-2,2]$可推出$y^*\geqslant(y-x)/2$和$y-x\geqslant 0$.这样,我们有

$$\langle y^*,y-x\rangle=y^*(y-x)\geqslant\frac{1}{2}(y-x)^2,$$

这意味着T在K上是强伪单调的(模为1/2).然而,T在K上不是f-伪单调的.事实上,我们在graph T中取$(x,x^*)=(-2,4)$,$(y,y^*)=(-1,2)$.那么

$$\langle x^*,y-x\rangle+f(y)-f(x)=(4-1-2)(-1+2)\geqslant 0.$$

然而

$$\langle y^*,y-x\rangle+f(y)-f(x)=(2-1-2)(-1+2)<0.$$

这意味着T在K上不是f-伪单调的.

定义2 对于一个凸函数$f:H\to(-\infty,+\infty]$,$\text{dom} f=\{x\in H:f(x)<+\infty\}$表示其有效域.对于给定的点$x\in\text{dom} f$,

$$\partial f(x)=\{p\in H:f(y)-f(x)\geqslant\langle p,y-x\rangle,\forall y\in H\}$$

表示f在点x的次微分,点$p\in\partial f(x)$称为f在点x的次梯度.

设K是Hilbert空间H上的非空闭凸子集.点z到K的距离定义为

$$\text{dist}(z,K):=\inf_{x\in K}\|z-x\|.$$

用$P_K(z)$表示点z到K上的投影,也就是说,$P_K(z)$满足条件

$$\|z-P_K(z)\|=\text{dist}(z,K).$$

引理1[5] 设K是Hilbert空间H上的非空闭凸子集.那么有如下性质成立:

(i) $\langle x-y,x-P_K(x)\rangle\geqslant 0,\ \forall x\in H,y\in K$;

(ii) $\|P_K(x)-P_K(y)\|\leqslant\|x-y\|,\ \forall x,y\in H$.

引理2[9] 设$\{\alpha_j\}$是非负的数列使得

$$\alpha_{j+1}\leqslant(1-\lambda_j)\alpha_j+\varepsilon_j,\qquad\forall j,$$

其中,对任意的j,$\lambda_j\in(0,1)$和$\varepsilon_j>0$分别满足

$$\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j=+\infty,\ \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j<+\infty.$$

那么$\lim_{j\to\infty}\alpha_j=0$.

2 一个新的投影次梯度方法

投影次梯度方法(如文献[26])起源于求解如下优化问题的最速下降法:

$$\min_{x\in K}f(x),\tag{5}$$

其中,K是H中的闭凸子集且$f:K\to\mathbf{R}$是一个连续凸函数.投影次梯度方法在每一个迭代中,从x^j沿着f在x^j的次梯度的反方向取点,然后再垂直投影到K,这样产生序列$\{x^j\}$.更确切地,其迭代格式为

$$x^{j+1}=P_K(x^j-\alpha_j p^j),\tag{6}$$

其中,α_j表示步长且$p^j\in\partial f(x^j)$.当$K=H$且f是可微的,正好就是最速下降法.如果在式(6)

中用算子 T 代替次梯度,那么投影次梯度方法就被推广用来求解变分不等式问题(3).其相应的迭代格式变为

$$x^{j+1}=P_K[x^j-\alpha_j T(x^j)]. \tag{7}$$

众所周知,如果 T 是 Lipschitz 连续且强单调的,那么由式(7)产生的序列收敛于问题(3)的一个解.最近,Xia 等[5]推广投影次梯度方法来求解问题(1).其基本迭代格式变为

$$x^{j+1}=P_K[x^j-\alpha_j(v^j+p^j)], \tag{8}$$

其中,$v^j\in T(x^j)$,$p^j\in\partial f(x^j)$.在文献[5]中,T 的强收敛性被放松为仿单调性.但是 T 的 Lipschitz 连续性仍然需要.现在我们的目的是在 Hilbert 空间中,在没有 T 的 Lipschitz 连续性假设条件下,建立一个迭代序列使其强收敛于问题(1)的一个解.对于给定的 $x^j\in K$,我们借用文献[9]的思想寻找一个 x^{j+1} 所在的方向 w^j,它包含方向 $-(v^j+p^j)$ 作为特例.因此,新方法比式(8)更广泛.现在具体描述我们的方法如下:

算法 1

步骤 1 取数列 $\{\rho_j\}$ 使得

$$0<\rho_j<1,\ \sum_{j=0}^{\infty}\rho_j=+\infty,\ \sum_{j=0}^{\infty}\rho_j^2<+\infty. \tag{9}$$

取 $x^0\in K$.令 $j:=0$.

步骤 2 对于给定的点 $p^j\in\partial f(x^j)$,取 $v^j\in T(x^j)$.

如果 $v^j=-p^j$,那么停止.

如果 $v^j\neq -p^j$,那么找 w^j 使得

$$\langle v^j,x-x^j\rangle+\langle w^j,x-x^j\rangle+f(x)-f(x^j)\geqslant 0,\qquad \forall x\in K. \tag{10}$$

如果 $w^j=0$,停止.否则,执行步骤 3.

步骤 3 计算

$$x^{j+1}=P_K(x^j+\rho_j w^j). \tag{11}$$

注 2 在这个算法中,主要的子问题是找 $w^j\neq 0$ 满足式(10).如果取 $w^j=-(v^j+p^j)$,那么式(10)成立.事实上,由于 $p^j\in\partial f(x^j)$,即 $f(x)-f(x^j)\geqslant\langle p^j,x-x^j\rangle$,$\forall x\in H$,我们有

$$\begin{aligned}&\langle v^j,x-x^j\rangle+\langle w^j,x-x^j\rangle+f(x)-f(x^j)\geqslant\\&\quad\langle v^j,x-x^j\rangle+\langle w^j,x-x^j\rangle+\langle p^j,x-x^j\rangle=\\&\quad\langle v^j+w^j+p^j,x-x^j\rangle.\end{aligned}$$

如果取 $w^j=-(v^j+p^j)$,则可推出

$$\langle v^j,x-x^j\rangle+\langle w^j,x-x^j\rangle+f(x)-f(x^j)\geqslant 0,\qquad \forall x\in K.$$

这说明算法 1 是可行的.

注 3 如果 $H=\mathbf{R}^n$,$f\equiv\text{const}$,并且取 $p^j=0\in\partial f(x^j)$,那么算法 1 退化为文献[9]的算法 2.1.这样,算法 1 可看作是文献[9]的算法 2.1 的推广.

现在我们在 Hilbert 空间中分析算法 1 产生的序列的收敛性.

定理 1 设由算法 1 产生的序列 $\{x^j\}$ 只有有限个元.那么最后 1 项是问题(1)的解.

证明 如果序列只有有限个元,那么算法必须在步骤 2 的某个 x^j 停止.有两种可能情况.

情况 1 如果 $v^j=-p^j$,那么由 $p^j\in\partial f(x^j)$ 可推出

$$\langle v^j,x-x^j\rangle+f(x)-f(x^j)\geqslant\langle v^j,x-x^j\rangle+\langle p^j,x-x^j\rangle=0.$$

也就是说,x^j 是问题(1)的解.

情况 2 如果 $w^j=0$,则由式(10)可推出 x^j 是问题(1)的一个解.证毕.

从现在开始,我们假设算法 1 产生的序列 $\{x^j\}$ 有无穷多个元.

定理 2　设 $f: H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个真凸下半连续函数,$T: K \to 2^H$ 是一个 f- 强伪单调映象(模为 $\beta > 0$). 设问题(1) 的解集 S 是非空的. 那么由算法 1 产生的序列 $\{x^j\}$ 满足

$$\| x^{j+1} - x^* \|^2 \leqslant (1 - 2\beta\rho_j) \| x^j - x^* \|^2 + \rho_j^2 \| w^j \|^2, \tag{12}$$

其中, x^* 是问题(1) 的一个解. 此外,如果对每个 j, $0 < \rho_j < 1/(2\beta)$,且序列 $\{w^j\}$ 是有界的,那么当 $j \to \infty$ 时,我们有 $x^j \to x^*$ 且 x^* 是问题(1) 的唯一解.

证明　设 x^* 是问题(1) 的任一解. 由 $x^{j+1} = P_K(x^j + \rho_j w^j)$, $x^* = P_K(x^*)$ 和引理 1 可推出

$$\begin{aligned} &\| x^{j+1} - x^* \|^2 = \| P_K(x^j + \rho_j w^j) - P_K(x^*) \|^2 \leqslant \\ &\quad \| x^j + \rho_j w^j - x^* \|^2 = \| x^j - x^* \|^2 + 2\rho_j \langle w^j, x^j - x^* \rangle + \rho_j^2 \| w^j \|^2. \end{aligned} \tag{13}$$

在不等式(10) 中取 $x = x^*$, 我们可得到

$$\langle v^j, x^* - x^j \rangle + \langle w^j, x^* - x^j \rangle + f(x^*) - f(x^j) \geqslant 0,$$

这意味着

$$\langle w^j, x^j - x^* \rangle \leqslant \langle v^j, x^* - x^j \rangle + f(x^*) - f(x^j). \tag{14}$$

由于 $x^* \in K$ 是问题(1) 的一个解,所以存在 $w^* \in T(x^*)$ 使得

$$\langle w^*, x^j - x^* \rangle + f(x^j) - f(x^*) \geqslant 0. \tag{15}$$

由于 T 是 f- 强伪单调的,我们可推出

$$\langle v^j, x^j - x^* \rangle + f(x^j) - f(x^*) \geqslant \beta \| x^j - x^* \|^2. \tag{16}$$

把式(16) 代入式(14),可得到

$$\langle w^j, x^j - x^* \rangle \leqslant -\beta \| x^j - x^* \|^2. \tag{17}$$

再结合式(13) 和(17),我们可推出

$$\begin{aligned} &\| x^{j+1} - x^* \|^2 \leqslant \| x^j - x^* \|^2 - 2\rho_j \beta \| x^j - x^* \|^2 + \rho_j^2 \| w^j \|^2 = \\ &\quad (1 - 2\rho_j \beta) \| x^j - x^* \|^2 + \rho_j^2 \| w^j \|^2. \end{aligned}$$

在引理 2 中令 $\lambda_j := 2\rho_j \beta$, $\alpha_j := \| x^j - x^* \|^2$ 和 $\varepsilon_j := \rho_j^2 \| w^j \|^2$. 由于每个 j, $0 < \rho_j < 1/(2\beta)$ 且 $\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j = +\infty$,我们可得到对每个 j, $0 < \lambda_j < 1$ 且 $\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j = +\infty$. 此外,由于序列 $\{\| w^j \|\}$ 是有界的且 $\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j^2 < +\infty$,所以 $\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j < +\infty$. 因此,应用引理 2 可推出 $\lim_{j\to\infty} \| x^j - x^* \| = 0$. 由于 x^* 是问题(1) 的任一解,所以可推出 x^* 是该问题的唯一解. 证毕.

在定理 2 中,如果 $f = 0$, 那么我们有下面的结果:

推论 1　设 $T: K \to 2^H$ 是强伪单调映象(模为 $\beta > 0$). 设问题(2) 的解集 S 非空. 那么算法 1($f = 0$ 且每个 j, $p^j = 0$) 产生的序列 $\{x^j\}$ 满足

$$\| x^{j+1} - x^* \|^2 \leqslant (1 - 2\beta\rho_j) \| x^j - x^* \|^2 + \rho_j^2 \| w^j \|^2,$$

其中, x^* 是问题(2) 的一个解. 此外,如果对每个 j, $0 < \rho_j < 1/(2\beta)$,且序列 $\{w^j\}$ 是有界的,那么当 $j \to \infty$ 时, $x^j \to x^*$ 且 x^* 是问题(2) 的唯一解.

注 4　推论 1 在以下方面推广和改善了文献[9]中的定理 2.1:

(i) 文献[9]中的强单调假设被放松为强伪单调;

(ii) 推论 1 表明在 Hilbert 空间中算法 1 产生的序列强收敛于问题(2) 的唯一解. 因此,推论 1 把文献[9]中的定理 2.1 从有限维空间推广到无穷维空间.

为了保证算法 1 的序列的收敛性,我们在定理 2 中假设了 $\{w^j\}$ 是有界的. 通过引入另外的参数 τ_j 以及 f 和 T 在合适的假设下,我们可以保证 $\{w^j\}$ 有界是自然成立的. 从现在开始,我

们采用如下的假设(H1)~(H3):

(H1) 问题(1)的解集是非空的;

(H2) $f: H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个真凸下半连续函数且 $K \subset \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, ∂f 在 K 上是有界的;

(H3) $T: K \to 2^H$ 在 K 上是一个 f- 强伪单调映象(模为 $\beta > 0$) 且 T 在 K 上是有界的.

注 5

(i) 假设(H1)和(H2)与文献[5,8]中的假设一样. 众所周知,如果 H 是有限维的, 那么 ∂f 在 K 上总是有界的. 不过, 一般地, 这个结论在无穷维 Hilbert 空间中不真. 我们知道, ∂f 在 K 上有界的一个充分条件是 $|f|$ 在 K 上有界(见文献[5]中的注 3.1(2));

(ii) 与文献[5]中的假设(A3)作比较,我们在假设(H3)中不需要 T 是 Lipschitz 连续的.

下面的例子说明假设(H3)是合理的.

例 3 设 $H = \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, $K = [3,5]$. 令

$$f(x) = x^2, \qquad x \in K \text{ 和 } T(x) = \begin{cases} [-1,1], & x \in [3,4], \\ [2,3], & x \in (4,5]. \end{cases}$$

容易看到 T 在 K 上是有界的且非单调的. 用例 1 的方法,我们可以证明 T 在 K 上是 f- 强伪单调的. 然而, T 在 K 上不是 Lipschitz 连续的. 事实上,对任意的 $x \in [3,4]$, $y \in (4,5]$, 我们有

$$H(T(x), T(y)) = \max\left\{ \sup_{r \in T(x)} \inf_{s \in T(y)} \| r - s \|, \sup_{s \in T(y)} \inf_{r \in T(x)} \| r - s \| \right\} = 3.$$

因此,对任意的 $L > 0$,存在 $x_0 \in [3,4]$, $y_0 \in (4,5]$ 满足 $\| x_0 - y_0 \| < 3/L$ 使得

$$H(T(x_0), T(y_0)) > L \| x_0 - y_0 \|.$$

这意味着 T 在 K 上不是 Lipschitz 连续的,因此文献[5]中的假设(A3)不满足.

现在我们给出算法 1 在引入参数 $\tau_j (j = 0,1,2,\cdots)$ 后的修改版本:

算法 1′

步骤 1 取 $x^0 \in K$. 令 $j := 0$.

步骤 2 对于任给的 $p^j \in \partial f(x^j)$, 取 $v^j \in T(x^j)$.

如果 $v^j = -p^j$, 则停止.

如果 $v^j \neq -p^j$, 则选取序列 $\rho_j \in (0,1)$ 和

$$0 < \tau_j < \min\left\{ \frac{1}{2\beta\rho_j}, \frac{1}{\| v^j \| + \| p^j \|} \right\}. \tag{18}$$

使得序列 $\{\rho_j\}$ 和 $\{\tau_j\}$ 满足

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j \tau_j = +\infty \tag{19}$$

和

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j^2 < +\infty. \tag{20}$$

步骤 3 找 w^j 满足

$$\| w^j \| \leq \tau_j (\| v^j \| + \| p^j \|) \tag{21}$$

和

$$\langle \tau_j v^j, x - x^j \rangle + \langle w^j, x - x^j \rangle + \tau_j [f(x) - f(x^j)] \geq 0, \qquad \forall x \in K. \tag{22}$$

如果 $w^j = 0$, 停止. 否则,执行步骤 4.

步骤 4 计算

$$x^{j+1}=P_K(x^j+\rho_j w^j). \tag{23}$$

注 6 如果 $H=R^n$, $f\equiv\mathrm{const}$ 且 $p^j=0\in\partial f(x^j)$, 则算法 1′退化为文献[9]中的算法 2.1 的修改版本(见文献[9]的注 2.2).

注 7 我们需要回答步骤 2 中的 ρ_j, τ_j 和步骤 3 中的 w^j 是否可行. 首先, 类似于注 2, 容易验证如果 $w^j=-\tau_j(v^j+p^j)$, 那么式(22)成立. 其次, 如果 $\rho_j=1/j$, 则有 $\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j^2<+\infty$. 为了证明 τ_j 是可行的, 我们需要下面的引理.

引理 3 如果假设(H1)~(H3)成立. 那么在算法 1′中, 即使不需要条件(19), 它产生的序列 $\{x^j\}$ 也是有界的.

证明 令 $x^*\in S$, $z^j=x^j+\rho_j w^j$ 和 $\mu_j=\langle w^j,x^*-x^j\rangle$. 由式(23)可推出 $x^j\in K$, 因此 $P_K(x^j)=x^j$. 由于 $\|w^j\|\leqslant\tau_j(\|v^j\|+\|p^j\|)<1$(根据式(18)), 利用引理 1(ii), 可推出

$$\|x^{j+1}-x^j\|=\|P_K(z^j)-P_K(x^j)\|\leqslant\|z^j-x^j\|=\rho_j\|w^j\|\leqslant\rho_j. \tag{24}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\rho_j^2+\|x^j-x^*\|^2-\|x^{j+1}-x^*\|^2\geqslant\\
&\quad\|x^{j+1}-x^j\|^2+\|x^j-x^*\|^2-\|x^{j+1}-x^*\|^2\overset{\text{根据式(24)}}{=}\\
&\quad 2\langle x^j-x^*,x^j-x^{j+1}\rangle=\\
&\quad 2\langle x^j-x^*,x^j-z^j\rangle+2\langle x^j-x^*,z^j-x^{j+1}\rangle=\\
&\quad 2\langle x^j-x^*,-\rho_j w^j\rangle+2\langle x^j-z^j,z^j-x^{j+1}\rangle+2\langle z^j-x^*,z^j-x^{j+1}\rangle\geqslant\\
&\quad 2\rho_j\langle x^*-x^j,w^j\rangle+2\langle x^j-z^j,z^j-x^{j+1}\rangle\overset{\text{根据引理1(i)}}{=}\\
&\quad 2\rho_j\langle x^*-x^j,w^j\rangle+2\langle x^j-z^j,z^j-x^j\rangle+2\langle x^j-z^j,x^j-x^{j+1}\rangle\geqslant\\
&\quad 2\rho_j\langle x^*-x^j,w^j\rangle-2\|x^j-z^j\|^2-2\|x^j-z^j\|\,\|x^j-x^{j+1}\|\geqslant\\
&\quad 2\rho_j\langle x^*-x^j,w^j\rangle-2\rho_j^2\|w^j\|^2-2\rho_j^2\|w^j\|\overset{\text{根据式(24)}}{\geqslant}\\
&\quad 2\rho_j\langle x^*-x^j,w^j\rangle-4\rho_j^2\overset{\text{根据}\|w^j\|<1}{=}\\
&\quad 2\rho_j\mu_j-4\rho_j^2.
\end{aligned} \tag{25}$$

因为 $x^*\in S$, 所以存在 $v^*\in T(x^*)$ 使得

$$\langle v^*,x-x^*\rangle+f(x)-f(x^*)\geqslant 0,\qquad\forall x\in K. \tag{26}$$

在式(26)中取 $x=x^j$, 可得到

$$\langle v^*,x^j-x^*\rangle+f(x^j)-f(x^*)\geqslant 0.$$

由 T 是 f- 强伪单调的, 可知

$$\langle v^j,x^j-x^*\rangle+f(x^j)-f(x^*)\geqslant\beta\|x^j-x^*\|^2\geqslant 0,\qquad\forall v^j\in T(x^j). \tag{27}$$

结合式(22)和(27), 我们有

$$\mu_j=\langle w^j,x^*-x^j\rangle\geqslant\tau_j[\langle v^j,x^j-x^*\rangle+f(x^j)-f(x^*)]\geqslant 0.$$

这样, 式(25)意味着

$$0\leqslant 2\rho_j\mu_j\leqslant\|x^j-x^*\|^2-\|x^{j+1}-x^*\|^2+5\rho_j^2,\qquad\forall j,$$

即

$$\|x^{j+1}-x^*\|^2\leqslant\|x^j-x^*\|^2+5\rho_j^2,\qquad\forall j.$$

用归纳法, 我们可推出

$$\| x^{j+1} - x^* \|^2 \leqslant \| x^0 - x^* \|^2 + 5\sum_{i=0}^{j}\rho_i^2 \leqslant \| x^0 - x^* \|^2 + 5\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j^2,$$

这说明 $\{x^j\}$ 是有界的. 证毕.

由于 $\{x^j\}$ 是有界的,由假设(H2)和(H3),我们知道 $\{p^j\}$ 和 $\{v^j\}$ 都是有界的,因此存在 $\gamma > 0$ 使得对每个 j, $\| v^j \| + \| p^j \| \leqslant \gamma$. 这样,如果 $\rho_j = 1/j$ 和

$$\tau_j = \begin{cases} \dfrac{1}{4\beta\rho_j}, & \dfrac{1}{2\beta\rho_j} \leqslant \dfrac{1}{\| v^j \| + \| p^j \|}, \\ \dfrac{1}{2\gamma}, & \dfrac{1}{2\beta\rho_j} > \dfrac{1}{\| v^j \| + \| p^j \|}, \end{cases} \tag{28}$$

那么式(18)至(20)满足. 因此,算法 1′是可行的.

注 8 现在我们把算法 1′与算法 A(也就是文献[5]中的算法 3.1)进行比较. 事实上,如果 $\eta_j = 1/\tau_j$, 则式(18)至式(20)退化为下面的条件:

$$\eta_j > \max\{2\beta\rho_j, \| v^j \| + \| p^j \|\},\ \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho_j}{\eta_j} = +\infty,\ \sum_{j=0}^{\infty}\rho_j^2 < +\infty.$$

此外,如果在式(22)中取

$$w^j = -\tau_j(v^j + p^j) = -\frac{v^j + p^j}{\eta_j},$$

那么式(23)变为式(4). 这样,容易看到算法 1′与算法 A 非常相似.

现在我们在 Hilbert 空间中分析算法 1′产生的序列的收敛性.

定理 4 如果假设(H1)~(H3)成立. 那么由算法 1′产生的序列 $\{x^j\}$ 满足

$$\| x^{j+1} - x^* \|^2 \leqslant (1 - 2\beta\rho_j\tau_j)\| x^j - x^* \|^2 + \rho_j^2\| w^j \|^2. \tag{29}$$

其中, x^* 是问题(1) 的一个解. 此外,当 $j \to \infty$ 时, $x^j \to x^*$ 且 x^* 是问题(1)的唯一解.

证明 由式(18)和式(21)可知

$$\| w^j \| \leqslant \tau_j(\| v^j \| + \| p^j \|) < 1.$$

设 x^* 是问题(1) 的任一解. 在不等式(22) 中取 $x = x^*$ 可得

$$\langle \tau_j v^j, x^* - x^j \rangle + \langle w^j, x^* - x^j \rangle + \tau_j[f(x^*) - f(x^j)] \geqslant 0.$$

这意味着

$$\langle w^j, x^j - x^* \rangle \leqslant \langle \tau_j v^j, x^* - x^j \rangle + \tau_j f(x^*) - \tau_j f(x^j),$$

它与式(14)的作用类似. 那么类似于定理 3 的证明可得

$$\langle w^j, x^j - x^* \rangle \leqslant -\beta\tau_j \| x^j - x^* \|^2,$$

因此

$$\| x^{j+1} - x^* \|^2 \leqslant \| x^j - x^* \|^2 - 2\rho_j\beta\tau_j\| x^j - x^* \|^2 + \rho_j^2\| w^j \|^2 \leqslant$$
$$(1 - 2\rho_j\beta\tau_j)\| x^j - x^* \|^2 + \rho_j^2.$$

再由式(18)可知,对所有的 j 有 $2\rho_j\beta\tau_j < 1$. 令 $\lambda_j := 2\rho_j\beta\tau_j < 1$, $\alpha_j := \| x^j - x^* \|^2$ 和 $\varepsilon_j := \rho_j^2$, 应用引理 2 可推出当 $j \to \infty$ 有 $x^j \to x^*$. 又由于 x^* 是问题(1) 的任一解,所以 x^* 是该问题的唯一解. 证毕.

注 9 我们通过以下方面与文献[5]的定理 3.5 作比较:

(i) 在定理 4 中, T 是 f- 强伪单调的,而文献[5] 的定理 3.5 中要求 T 是一个仿单调映象. f- 强伪单调与仿单调的关系见注 1;

(ii) 文献[5]的假设(A3)中, T 在 K 上是弱闭的以及在 K 上的有界子集上是 Lipschitz 连续的条件被去掉了;

(iii) 定理 4 证明了序列的强收敛，而文献[5]的定理 3.5 只获得了弱收敛结果.

参考文献:

[1] Han W, Reddy B. On the finite element method for mixed variational inequalities arising in elastoplasticity[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1995, **32**(6): 1778-1807.

[2] Cohen G. Nash equilibria: gradient and decomposition algorithms[J]. *Large Scale Systems*, 1987, **12**(2): 173-184.

[3] Facchinei F, Pang J S. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementary Problems*[M]. New York: Springer-Verlag, 2003.

[4] Iusem A N, Svaiter B F. A variant of Korpelevich's method for solving variational inequalities with a new search strategy[J]. *Optimization*, 1997, **42**(4): 309-321.

[5] Xia F Q, Huang N J, Liu Z B. A projected subgradient method for solving generalized mixed variational inequalities[J]. *Oper Res Lett*, 2008, **36**(5): 637-642.

[6] 何诣然. 一个关于混合变分不等式问题的投影算法[J]. 数学物理学报, 2007, **27**A(2): 215-220. (HE Yi-ran. A new projection algorithm for mixed variational inequalities[J]. *Acta Math Sci*, 2007, **27**A(2): 215-220. (in Chinese))

[7] Konnov I. A combined relaxation method for a class of nonlinear variational inequalities[J]. *Optimization*, 2002, **51**(1): 127-143.

[8] Maingé P E. Projected subgradient techniques and viscosity methods for optimization with variational inequality constraints[J]. *European J Oper Res*, 2010, **205**(3): 501-506.

[9] Anh P N, Muu L D, Strodiot J J. Generalized projection method for non-Lipschitz multivalued monotone variational inequalities[J]. *Acta Math Vietnam*, 2009, **34**(1): 67-79.

[10] Farouq N E. Pseudomonotone variational inequalities: convergence of the auxiliary problem method[J]. *J Optim Theory Appl*, 2001, **111**(2): 306-325.

[11] Hue T T, Strodiot J J, Nguyen V H. Convergence of the approximate auxiliary problem method for solving generalized variational inequalities[J]. *J Optim Theory Appl*, 2004, **121**(1): 119-145.

[12] Konnov I. *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[13] Marcotte P. A new algorithm for solving variational inequalities with application to the traffic assignment problem[J]. *Math Program*, 1985, **33**(3): 339-351.

[14] Patriksson M. Merit functions and descent algorithms for a class of variational inequality problems[J]. *Optimization*, 1997, **41**(1): 37-55.

[15] Patriksson M. *Nonlinear Programming and Variational Inequality Problems*[M]. Dordrecht Holland: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[16] Salmon G, Strodiot J J, Nguyen V H. A bundle method for solving variational inequalities[J]. *SIAM J Optim*, 2003, **14**(3): 869-893.

[17] Solodov M V, Svaiter B F. A new projection method for variational inequalities[J]. *SIAM J Control Optim*, 1999, **37**(3): 765-776.

[18] Taji K, Fukushima M. A new merit function and a successive quadratic programming algorithm for variational inequality problems[J]. *SIAM J Optim*, 1996, **6**(3): 704-713.

[19] Ding X P. Existence and algorithm of solutions for nonlinear mixed variational-like inequalities in Banach spaces[J]. *J Comput Appl Math*, 2003, **157**(2): 419-434.

[20] Ding X P. Predictor-corrector iterative algorithms for solving generalized mixed variational-like inequalities[J]. *Appl Math Comput*, 2004, **152**(3): 855-865.

[21] 丁协平, 林炎诚, 姚任之. 解变分不等式的三步松弛混合最速下降法[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(8): 921-928. (DING Xie-ping, LIN Yen-chemg, YAO Jen-chih. Three-step relaxed hybrid steepest-descent methods for variational inequalities[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(*English Edition*), 2007, **28**(8): 1029-1036.)

[22] 张石生, 王雄瑞, 李向荣, 陈志坚. 分层不动点及变分不等式的粘性方法及应用[J]. 应用数学和力学, 2011, **32**(2): 232-240. (ZHANG Shi-sheng, WANG Xiong-rui, H W Joseph LEE, Chi Kin CHAN. Viscosity method for hierarchical fixed point and variational inequalities with applications[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(*English Edition*), 2011, **32**(2): 241-250.)

[23] Chang S S, Lee H W J, Chan C K, Liu J A. A new method for solving a system of generalized nonlinear variational inequalities in Banach spaces[J]. *Appl Math Comput*, 2011, **217**(15/16): 6830-6837.

[24] Verma R U. General convergence analysis for two-step projection methods and applications to variational problems[J]. *Appl Math Lett*, 2005, **18**(11): 1286-1292.

[25] Lan H Y, Cho Y J, Verma R U. Nonlinear relaxed coercive variational inclusions involving (A, η)-accretive mappings in banach spaces[J]. *Comput Math Appl*, 2006, **51**(9/10): 1529-1538.

[26] Alber Y I, Iusem A N, Solodov M V. On the projected subgradient method for nonsmooth convex optimization in a Hilbert space[J]. *Math Program*, 1998, **81**(1): 23-35.

[27] 殷洪友, 徐成贤, 张忠秀. F-互补问题及其与极小元问题的等价性[J]. 数学学报, 2001, **44**(4): 679-686. (YIN Hong-you, XU cheng-xian, ZHANG Zhong-xiu. The F-complementarity problem and its equivalence with the least element problem[J]. *Acta Math Sinica*, 2001, **44**(4): 679-686. (in Chinese))

[28] Zhong R Y, Huang N J. Stability analysis for Minty mixed variational inequality in reflexive Banach spaces[J]. *J Optim Theory Appl*, 2010, **147**(3): 454-472.

A Projected Subgradient Method for Non-Lipschitz Set-Valued Mixed Variational Inequalities

TANG Guo-ji, HUANG Nan-jing

(*Department of Mathematics*, *Sichuan University*, *Chengdu* 610064, *P. R. China*)

Abstract: A projected subgradient method for solving a class of set-valued mixed variational inequalities when the mapping was not necessarily Lipschitz was proposed. Under some suitable conditions, it is proved that the sequence generated by the method was strongly convergent to the unique solution of the problem in Hilbert spaces.

Key words: set-valued mixed variational inequality; projected subgradient method; non-Lipschitz mapping; convergence