

二维横观各向同性厚板在空间变化热源及体力作用下的动力学响应^{*}

M·伊斯兰¹, S·H·马利克¹, M·卡诺利亚²

- (1. 圣方济书院 数学系, 加尔各答 700016, 印度;
2. 阿里阿赫大学 数学系, 加尔各答 700091, 印度;
3. 加尔各答大学 应用数学系, 加尔各答 700009, 印度)

摘要: 研究热源和体力作用下的横观各向同性厚板的二维问题, 板的上表面无应力作用, 但有规定的表面温度作用; 板的下表面置于刚性基础之上, 并处于绝热状态. 采用 Green 和 Naghdi 提出的广义热弹性理论, 通过 Laplace 和 Fourier 双重变换, 在 Laplace-Fourier 变换域中, 得到位移和温度场的控制方程. 数值求解双重变换的逆变换, 采用一个基于 Fourier 级数展开的方法, 数值地求解 Laplace 变换的逆变换. 对材料镁 (Mg) 进行数值计算, 并用图形表示其结果. 推演出各向同性材料铜 (Cu) 的数值结果, 并用图形与横观各向同性材料镁进行比较. 同时研究了体力的影响.

关键词: 广义热弹性理论; Green-Naghdi 模型; 横观各向同性材料; 空间变化的热源; 体力

中图分类号: O343.6 文献标志码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.10.008

引 言

在过去的 30 年里, 这样的一些热弹性理论——认为热信号 (第 2 个声音信号) 的传播速度是有限的——引起了人们极大的关注. 传统的耦合热弹性理论, 以抛物线型热传导方程为基础^[1-3], 预测热的传播速度是无限的. 与之相比较, 这些理论包含一个双曲线型的热传导方程, 通称为广义热弹性理论. 在这些广义理论中, Lord 和 Shulman^[4] 提出了包括了一个弛豫时间的理论; Green 和 Lindsay^[5] 经过大量的调查研究, 发展了该理论, 提出了包括两个弛豫时间的理论. 在 Lord-Shulman^[4] 的理论中, 提出了一个修正的 Fourier 热传导定律, 将热量以及热量对时间的导数同时考虑进去, 取代传统的 Fourier 热传导定律. 在 Green-Lindsay 模型中, 传统的 Fourier 热传导定律并没有发生变化, 但是, 修正了经典的能量方程, 以及应力-应变的温度关系. 有限的热传导速度已为一些实验证据所证实, 在短的时间间隔内, 处理超大热通量的实际问题, 诸如在激光装置和能量通道发生的实际问题, 广义的热弹性理论比传统的热弹性理论更接近真实情况, 相关的文献可以参见文献[6-14].

从试验角度来看, 尽管在 40 年前, 已有学者开展绝缘固体中第二声信号的研究, 并提出相

* 收稿日期: 2010-06-29; 修订日期: 2011-05-04

作者简介: M. Kanoria, 教授, 博士 (联系人. E-mail: k_mri@yahoo.com).

本文原文为英文, 海洽译, 张禄坤校.

应的报告(如 Ackerman 和 Guyer 的文献[15]、Jackson 等的文献[16]、Jackson 和 Walker 的文献[17]、Rogers 的文献[18]、Narayanmurti 和 Dynes 的文献[19]),但是支持固体中热波速度有限的实验证据仍然相当稀少。大多数工程材料,诸如金属材料,拥有较高的热传导阻尼率,不适合在有关第二声信号传播的实验中使用。但是,随着最近材料科学的发展,将来也许可以找到(甚至可以为试验目的而制造出)热波以有限速度传播的、理想的研究材料。

Green 和 Naghdi^[20-22]对相关理论的发展上作出了贡献,他们对各向同性匀质材料提出 3 个广义热弹性理论模型,称为模型 I、II 和 III。该理论的本质是各自理论的线性化:模型 I^[20-21]简化了经典的热传导理论——Fourier 定律,线性化的模型 II 和 III,容许热波以有限的速度传播。特别地,模型 II 容许热能的耗散^[22],这是其它已有的热弹性模型所没有的。在该模型本构方程的推导中,开始使用简化了的能量方程,并将热位移梯度作为变量之一。Green 和 Naghdi 的模型 III^[21]容许热能的耗散,在该模型本构方程的推导中,同样始于简化了的能量方程,除温度梯度外,将热位移梯度作为变量之一。Green 和 Naghdi 的论文(见文献[22]),对各向同性匀质材料,位移场和温度场项的热弹性线性化理论,给出了所有控制方程的推导过程,以及相应初边值问题解的唯一性证明。在 Green 和 Naghdi^[22]的线性化理论中,Chandrasekharaiah^[7-8]建立起解的唯一性定理。Chandrasekharaiah^[9]以 GN 模型 II 为基础,由于边界上突加的温度和应力/应变,研究了半空间中热波的一维传播。Chandrasekharaiah 和 Srinath^[10]使用没有能量耗散的热弹性线性理论(TEWOED),对一个各向同性均质的无界热弹性体,研究由连续点热源引起的热弹性交互作用。Mallik 和 Kanoria^[23]利用广义热弹性理论^[22],在一个无限转动的弹性介质中,研究热源引起的热弹性交互作用,应用特征值法求解该问题。Taheri 等应用 II 型和 III 型的 GN 理论,在一个环形域中,研究了热波和机械波的传播。Roychoudhuri 和 Dutta^[24]以 TEWOED 为基础,在一个各向同性匀质的热弹性固体中,热源依赖时间连续分布,在有限的时间间隔内呈现周期性变化时,研究热弹性交互作用。Green 和 Naghdi^[22]提出的广义热弹性理论问题,为众多学者所研究(例如 Mallik 和 Kanoria 的文献[25-27]、Banik 等的文献[28]、Bondyopadhyay 和 Roychoudhuri 的文献[29]等)。在 Lord 和 Shulman^[4]提出的广义热弹性理论的基础上,Verma 和 Hasebe^[30]研究了横观各向同性板中波的传播。

本文研究横观各向同性厚板,在热源和体力的共同作用下的二维问题,板的上表面没有应力,但有给定表面温度分布;板的下表面置于刚性基础之上,但绝热。采用 Green 和 Naghdi^[21-22]提出的广义热弹性理论,求解决该问题,应用 Laplace 变换和 Fourier 变换,在 Laplace-Fourier 双重变换域中,求解位移场和温度场的控制方程。数值地求解双重变换的逆变换,使用一个以 Fourier 级数展开为基础的方法(Hoing 和 Hirdes 的文献[31]),数值地求解 Laplace 变换的逆变换。对材料镁(Mg)进行数值计算,结果以两个 GN^[20-22]模型的图形给出。作为特例相应导出各向同性材料铜(Cu)的图形结果,并与 GN 模型 II(TEWOED),横观各向同性镁(Mg)的结果进行比较。最后还研究了体力的影响,并以图形给出。

1 问题的公式化

考虑一个可传热的、横观各向同性的、无限均匀的厚板,在一个空间变化的热源作用下,初始状态热源的参考温度同为 T_0 。板的上表面无应力,但受到已知的温度分布作用,板的下表面置于刚性基础之上,且是绝热的。设厚板的上下表面取为坐标面 $x = \pm h$,以此来建立直角坐标系 $Oxyz$ 。考虑厚板平行于 xOy 平面的二维变形,位移矢量 \mathbf{u} 和温度 T 可表示为

$$\mathbf{u} = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0), T = T(x, y, t). \quad (1)$$

这时候的本构方程为

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = c_{11}e_{xx} + c_{12}e_{yy} - \beta_1(T - T_0), \\ \sigma_{yy} = c_{12}e_{xx} + c_{11}e_{yy} - \beta_1(T - T_0), \\ \sigma_{xy} = (c_{11} - c_{12})e_{xy}; \end{cases} \quad (2)$$

沿 x 和 y 方向的运动方程为

$$c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{c_{11} + c_{12}}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \rho F_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{c_{11} + c_{12}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \rho F_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial T}{\partial y}; \quad (4)$$

根据 Green-Naghdi 理论,这时候的热传导方程和 Fourier 定律可表示成

$$K^* \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \chi K_1 \left(\frac{\partial^2 \dot{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{T}}{\partial y^2} \right) + \rho \dot{Q} = \rho c_v \ddot{T} + T_0 \beta_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right), \quad (5)$$

$$q_x = - \left(\chi K_1 \frac{\partial T}{\partial x} + K^* \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad (6)$$

其中, $\chi = 0$ (GN 模型 II), $\chi = 1$ (GN 模型 III), ρ 为密度, c_{ij} 为横观各向同性材料的弹性常数, K_1 为沿 x 和 y 方向的导热率, K^* 为 GN 理论的附加材料常数, β_1 为温度应力系数, c_v 为定容热容. Q 为热源, 且 $\dot{v} = T$, 其中 v 为热位移.

引入以下无量纲变量:

$$\begin{cases} x' = c_1 \eta x, \quad y' = c_1 \eta y, \quad u' = c_1 \eta u, \quad v' = c_1 \eta v, \quad t' = c_1^2 \eta t, \\ t'_0 = c_1^2 \eta t_0, \quad q'_x = \frac{q_x \beta_1}{c_{11} K_1}, \quad h' = c_1 \eta h, \\ \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{11}}, \quad \theta = \frac{(T - T_0) \beta_1}{c_{11}}, \\ Q' = \frac{\rho \beta_1 Q}{K_1 c_1^2 \eta^2 c_{11}}, \quad F'_x = \frac{\rho F_x}{(\lambda + 2\mu) c_1 \eta}, \quad F'_y = \frac{\rho F_y}{(\lambda + 2\mu) c_1 \eta}, \quad K^{*'} = \frac{K^*}{K_1 c_1^2 \eta}, \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\eta = \frac{\rho c_v}{K_1}, \quad c_1^2 = \frac{c_{11}}{\rho}.$$

若省略上角的撇号, 方程(2) ~ (6)可改写为如下的无量纲形式:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + (a_2 - a_1) \frac{\partial v}{\partial y} - \theta, \quad (8)$$

$$\sigma_{yy} = (a_2 - a_1) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \theta, \quad (9)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{(1 + a_1 - a_2)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + F_x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (11)$$

$$a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + F_y = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (12)$$

$$K^* \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \chi \left(\frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial y^2} \right) + \dot{Q} = \ddot{\theta} + \varepsilon \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right), \quad (13)$$

$$\dot{q}_x = - \left(\chi \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} + K^* \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad (14)$$

其中

$$a_1 = \frac{c_{11} - c_{12}}{2c_{11}}, \quad a_2 = \frac{c_{11} + c_{12}}{2c_{11}}, \quad \varepsilon = \frac{T_0 \beta_1^2}{K_1 c_{11} \eta}. \quad (15)$$

在如下的初始条件下求解上述方程:

$$\theta = u = v = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad t = 0. \quad (16)$$

问题的边界条件可以取为

$$\begin{cases} \theta(h, y, t) = \theta_0 H(g - |y|), \\ \sigma_{xx}(h, y, t) = 0, \\ \sigma_{xy}(h, y, t) = 0, \\ u(-h, y, t) = 0, \\ v(-h, y, t) = 0, \\ q_x(-h, y, t) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

式(17)的第1个方程中, θ_0 和 g 为常数, 函数 $H(\cdot)$ 为 Heaviside 单位阶梯函数. 表面 $x = h$ 上没有应力作用, 上表面 y 轴两侧宽度 $2g$ 为一条加热带, 而表面的其余部分温度保持为 0.

函数 $f(x, y, t)$ 的 Laplace-Fourier 双重变换为

$$\begin{cases} \bar{f}(x, y, p) = \int_0^\infty f(x, y, t) e^{-pt} dt, \quad \text{Re}(p) > 0, \\ \hat{f}(x, q, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \bar{f}(x, y, p) e^{-iqy} dy. \end{cases} \quad (18)$$

对方程(8) ~ (14) 作 Laplace-Fourier 双重变换:

$$\hat{\sigma}_{xx} = \frac{d\hat{u}}{dx} + (a_2 - a_1) iq\hat{v} - \hat{\theta}, \quad (19)$$

$$\hat{\sigma}_{yy} = (a_2 - a_1) \frac{d\hat{u}}{dx} + iq\hat{v} - \hat{\theta}, \quad (20)$$

$$\hat{\sigma}_{xy} = \frac{1 + a_1 - a_2}{2} \left(\frac{d\hat{v}}{dx} + iq\hat{u} \right), \quad (21)$$

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} - (p^2 + a_1 q^2) \hat{u} + iq a_2 \frac{d\hat{v}}{dx} + \hat{F}_x = \frac{d\hat{\theta}}{dx}, \quad (22)$$

$$a_1 \frac{d^2\hat{v}}{dx^2} - (p^2 + q^2) \hat{v} + iq a_2 \frac{d\hat{u}}{dx} + \hat{F}_y = iq\hat{\theta}, \quad (23)$$

$$(K^* + \chi p) \frac{d^2\hat{\theta}}{dx^2} - \{ (K^* + \chi) q^2 + p^2 \} \hat{\theta} + p\hat{Q} = \varepsilon p^2 \left(\frac{d\hat{u}}{dx} + iq\hat{v} \right), \quad (24)$$

$$\hat{q}_x = - (p\chi + K^*) \frac{d\hat{\theta}}{dx}. \quad (25)$$

从方程(22) ~ (24) 中消去 \hat{u} 和 $\hat{\theta}$ 后, 得到

$$A(q, p) \frac{d^6\hat{v}}{dx^6} + B(q, p) \frac{d^4\hat{v}}{dx^4} + C(q, p) \frac{d^2\hat{v}}{dx^2} + D(q, p) \hat{v} = R(x, q, p), \quad (26)$$

再从方程(22) ~ (24) 中消去 \hat{u} 和 \hat{v} 后, 得到

$$A(q, p) \frac{d^6 \hat{\theta}}{dx^6} + B(q, p) \frac{d^4 \hat{\theta}}{dx^4} + C(q, p) \frac{d^2 \hat{\theta}}{dx^2} + D(q, p) \hat{\theta} = R_1(x, q, p), \quad (27)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} & A(q, p) = -a_1 a_2, \\ & B(q, p) = a_2 [(K^* + \chi)(1 + a_1) + a_1(1 + \varepsilon)p^2 + 3a_1(K^* + \chi)q^2], \\ & C(q, p) = \{ (1 + a_1)p^2 + 2a_1q^2 \} \{ a_2(K^* + \chi)q^2 + (a_2 + \varepsilon)p^2 \} - \\ & \quad a_2(K^* + \chi)(p^2 + q^2)(p^2 + a_1q^2), \\ & D(q, p) = (p^2 + q^2)(p^2 + a_1q^2) \{ a_2q^2(K^* + \chi) + (a_2 + \varepsilon)p^2 \} - \\ & \quad \varepsilon p^2(p^2 + a_1q^2) \{ (p^2 + q^2) - iq^3(K^* + \chi) \}, \\ & R(x, q, p) = -pa_2q^2 \left[(a_2 - 1) \frac{d^2 \hat{Q}}{dx^2} + (p^2 + a_1q^2) \hat{Q} \right] + \\ & \quad a_2 iq \left[(K^* + \chi) \frac{d^3 \hat{F}_x}{dx^3} - iq \{ (K^* + \chi)a_2q^2 + (a_2 + \varepsilon)p^2 \} \frac{d\hat{F}_x}{dx} \right], \\ & R_1(x, q, p) = -a_2 iqp \left[a_1 \frac{d^4 \hat{Q}_x}{dx^4} - \{ (p^2 + q^2) + (p^2 + a_1q^2)a_1 - \right. \\ & \quad \left. a_2^2q^2 \} \frac{d^2 \hat{Q}}{dx^2} + (p^2 + q^2)(p^2 + a_1q^2) \hat{Q} \right] + \\ & \quad iq a_2 \varepsilon p^2 \left[-a_1 \frac{d^3 \hat{F}_x}{dx^3} + \{ (1 - a_2)q^2 + p^2 \} \frac{d\hat{F}_x}{dx} \right]. \end{aligned} \right. \quad (28)$$

2 热源的空间分布

热源 $Q(x, y, t)$ 表示为

$$Q(x, y, t) = \frac{H(t) \cosh(bx)}{y^2 + a^2},$$

其中 a 和 b 为常数.

3 体 力

从现在开始,取体力如下:

$$F_x(x, y, t) = \frac{H(t) e^{-bx}}{a^2 + y^2}, \quad F_y(x, y, t) = 0,$$

其中 a 和 b 为常数.

于是有

$$\hat{Q}(x, q, p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-alq} \frac{\cosh(bx)}{ap},$$

$$\hat{F}_x(x, q, p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-alq} \frac{e^{-bx}}{ap}$$

和

$$\hat{F}_y(x, q, p) = 0.$$

然后得到

$$R(x, q, p) = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_2 q^2 e^{-alq} \cosh(bx) [(a_2 - 1)b^2 + (p^2 + a_1 q^2)] + \frac{ba_2 q^2}{ap} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-bx} e^{-alq} [a_2(K^* + \chi)(b^2 - q^2) - (a_2 + \varepsilon)p^2], \quad (29)$$

$$R_1(x, q, p) = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_2 i q e^{-alq} \cosh(bx) [a_1 b^4 - \{(p^2 + q^2) + (p^2 + a_1 q^2)a_1 - a_2^2 q^2\} b^2 + (p^2 + q^2)(p^2 + a_1 q^2)] + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_2 i q e^{-alq} b p e^{-bx} \varepsilon [a_1 b^2 + (a_2 - 1)q^2 - p^2]. \quad (30)$$

从而可以分别得到方程(26)和(27)的解

$$\hat{v}(x, q, p) = \sum_{j=1}^3 [B_j(q, p) e^{k_j x} + B_{-j}(q, p) e^{-k_j x}] + G(q, p) \cosh(bx) + G_1(q, p) e^{-bx} \quad (31)$$

和

$$\hat{\theta}(x, q, p) = \sum_{j=1}^3 [A_j(q, p) e^{k_j x} + A_{-j}(q, p) e^{-k_j x}] + G_2(q, p) \cosh(bx) + G_3(q, p) e^{-bx}, \quad (32)$$

其中

$$G(q, p) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a_2 q^2 e^{-alq} [(a_2 - 1)b^2 + (p^2 + a_1 q^2)]}{a(b^2 - k_1^2)(b^2 - k_2^2)(b^2 - k_3^2)}, \quad (33)$$

$$G_1(q, p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-alq} a_2 q^2 b [a_2(K^* + \chi)(b^2 - q^2) - (a_2 + \varepsilon)p^2]}{ap(b^2 - k_1^2)(b^2 - k_2^2)(b^2 - k_3^2)}, \quad (34)$$

$$G_2(q, p) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a_2 i q e^{-alq}}{a(b^2 - k_1^2)(b^2 - k_2^2)(b^2 - k_3^2)} [a_1 b^4 - \{(p^2 + q^2) + (p^2 + a_1 q^2)a_1 - a_2^2 q^2\} b^2 + (p^2 + q^2)(p^2 + a_1 q^2)], \quad (35)$$

$$G_3(q, p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a_2 i q e^{-alq} b p \varepsilon [a_1 b^2 + (a_2 - 1)q^2 - p^2]}{a(b^2 - k_1^2)(b^2 - k_2^2)(b^2 - k_3^2)}. \quad (36)$$

同时, k_j 和 $-k_j (j=1, 2, 3)$ 是下面方程的根:

$$A(q, p)k^6 + B(q, p)k^4 + C(q, p)k^2 + D(q, p) = 0. \quad (37)$$

将 \hat{v} 和 $\hat{\theta}$ 的表达式代入方程(22), 得到

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} - (p^2 + a_1 q^2) \hat{u} = \sum_{j=1}^3 [\{A_j(q, p) - i q a_2 B_j(q, p)\} e^{k_j x} - \{A_{-j}(q, p) - i q a_2 B_{-j}(q, p)\} e^{-k_j x}] k_j + b \sinh(bx) [G_2(q, p) - i q a_2 G(q, p)] - [G_3(q, p) + i q a_2 G_1(q, p)] b e^{-bx} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-bx} e^{-alq}}{ap}. \quad (38)$$

得到该方程的解

$$\hat{u}(x, q, p) = C_1(q, p) e^{k_4 x} + C_{-1}(q, p) e^{-k_4 x} +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^3 \left[\frac{[\{A_j(q,p) - iqa_2 B_j(q,p)\} e^{k_j x}] k_j}{k_j^2 - k_4^2} - \right. \\
& \left. \frac{[\{A_{-j}(q,p) - iqa_2 B_{-j}(q,p)\} e^{-k_j x}] k_j}{k_j^2 - k_4^2} \right] + \\
& \frac{b \sinh(bx) [G_2(q,p) - iqa_2 G(q,p)]}{b^2 - k_4^2} + \frac{[G_3(q,p) + iqa_2 G_1(q,p)] be^{-bx}}{b^2 - k_4^2} + \\
& \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-bx} e^{-a|q|}}{ap(b^2 - k_4^2)}, \tag{39}
\end{aligned}$$

其中 $k_4 = \sqrt{p^2 + a_1 q^2}$.

得到和方程(23)兼容的解 $\hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta}$:

$$\begin{aligned}
\hat{u}(x, q, p) = & \sum_{j=1}^3 \frac{[\{1 - iqa_2 f_j(q,p)\} A_j(q,p) e^{k_j x} - \{1 - iqa_2 f_j(q,p)\} A_{-j}(q,p) e^{-k_j x}] k_j}{k_j^2 - k_4^2} + \\
& \frac{b \sinh(bx) [G_2(q,p) - iqa_2 G(q,p)]}{b^2 - k_4^2} + \\
& \frac{[G_3(q,p) + iqa_2 G_1(q,p)] be^{-bx}}{b^2 - k_4^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-bx} e^{-a|q|}}{ap(b^2 - k_4^2)}, \tag{40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{v}(x, q, p) = & \sum_{j=1}^3 f_j(q,p) [A_j(q,p) e^{k_j x} + A_{-j}(q,p) e^{-k_j x}] + \\
& G(q,p) \cosh(bx) + G_1(q,p) e^{-bx}, \tag{41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(x, q, p) = & \sum_{j=1}^3 [A_j(q,p) e^{k_j x} + A_{-j}(q,p) e^{-k_j x}] + \\
& G_2(q,p) \cosh(bx) + G_3(q,p) e^{-bx}, \tag{42}
\end{aligned}$$

其中

$$f_j(q,p) = \frac{iq}{k_j^2 - (p^2 + q^2)}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{43}$$

从方程(19) ~ (21)和方程(40) ~ (42),可以得到 $\hat{\sigma}_{xx}, \hat{\sigma}_{yy}, \hat{\sigma}_{xy}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{xx} = & \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\{1 - iqa_2 f_j(q,p)\} k_j^2}{k_j^2 - k_4^2} + (a_2 - a_1) iq f_j(q,p) - 1 \right] \times \\
& [A_j(q,p) e^{k_j x} + A_{-j}(q,p) e^{-k_j x}] + \\
& \left[\frac{b^2 \{G_2(q,p) - iqa_2 G(q,p)\}}{b^2 - k_4^2} + (a_2 - a_1) iq G(q,p) - G_2(q,p) \right] \cosh(bx) - \\
& \left[\frac{\{G_3(q,p) + iqa_2 G_1(q,p)\} b^2}{b^2 - k_4^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{be^{-a|q|}}{ap(b^2 - k_4^2)} - \right. \\
& \left. (a_2 - a_1) iq G_1(q,p) - G_3(q,p) \right] e^{-bx}, \tag{44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{yy} = & \sum_{j=1}^3 \left[\frac{(a_2 - a_1) \{1 - iqa_2 f_j(q,p)\} k_j^2}{k_j^2 - k_4^2} + iq f_j(q,p) - 1 \right] \times \\
& [A_j(q,p) e^{k_j x} + A_{-j}(q,p) e^{-k_j x}] +
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{b^2(a_2 - a_1) \{ G_2(q, p) - iqa_2 G(q, p) \}}{b^2 - k_4^2} + iqG(q, p) - G_2(q, p) \right] \cosh(bx) -$$

$$\left[\frac{\{ G_3(q, p) + iqa_2 G_1(q, p) \} (a_2 - a_1) b^2}{b^2 - k_4^2} + \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{b(a_2 - a_1) e^{-alq}}{ap(b^2 - k_4^2)} + iqG_1(q, p) - G_3(q, p) \right] e^{-bx}, \quad (45)$$

$$\hat{\sigma}_{xy} = \frac{1 + a_1 - a_2}{2} \left[\sum_{j=1}^3 \left[\frac{\{ 1 - iqa_2 f_j(q, p) \} iq}{k_j^2 - k_4^2} + f_j(q, p) \right] \times \right.$$

$$k_j [A_j(q, p) e^{k_j x} - A_{-j}(q, p) e^{-k_j x}] +$$

$$\left[\frac{\{ G_2(q, p) - iqa_2 G(q, p) \} iq}{b^2 - k_4^2} + G(q, p) \right] b \sinh(bx) +$$

$$\left[\frac{\{ G_3(q, p) + iqa_2 G_1(q, p) \} iqb}{b^2 - k_4^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-alq}}{b^2 - k_4^2} - bG_1(q, p) \right] e^{-bx} \Big]. \quad (46)$$

边界条件的 Laplace-Fourier 双重变换域为

$$\begin{cases} \hat{\theta}(h, q, p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\theta_0 \sin(qg)}{pq}, \\ \hat{\sigma}_{xx}(h, q, p) = 0, \\ \hat{\sigma}_{xy}(h, q, p) = 0, \\ \hat{u}(-h, q, p) = 0, \\ \hat{v}(-h, q, p) = 0, \\ \hat{q}_x(-h, q, p) = 0. \end{cases} \quad (47)$$

利用边界条件(47), 得到

$$\sum_{j=1}^3 [A_j(q, p) e^{k_j h} + A_{-j}(q, p) e^{-k_j h}] =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\theta_0 \sin(qg)}{pq} - G_2(q, p) \cosh(bh) - G_3(q, p) e^{-bh}, \quad (48a)$$

$$\sum_{j=1}^3 [A_j(q, p) e^{k_j h} + A_{-j}(q, p) e^{-k_j h}] \times$$

$$\left[\frac{\{ 1 - iqa_2 f_j(q, p) \} k_j^2}{k_j^2 - k_4^2} + (a_2 - a_1) iq f_j(q, p) - 1 \right] =$$

$$- \left[\frac{b^2 \{ G_2(q, p) - iqa_2 G(q, p) \}}{b^2 - k_4^2} + (a_2 - a_1) iqG(q, p) - G_2(q, p) \right] \cosh(bh) +$$

$$\left[\frac{\{ G_3(q, p) + iqa_2 G_1(q, p) \} b^2}{b^2 - k_4^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{be^{-alq}}{ap(b^2 - k_4^2)} - \right.$$

$$\left. (a_2 - a_1) iqG_1(q, p) + G_3(q, p) \right] e^{-bh}, \quad (48b)$$

$$\sum_{j=1}^3 [A_j(q, p) e^{k_j h} - A_{-j}(q, p) e^{-k_j h}] \left[\frac{\{ 1 - iqa_2 f_j(q, p) \} iq}{k_j^2 - k_4^2} + f_j(q, p) \right] k_j =$$

$$- \left[\frac{\{ G_2(q, p) - iqa_2 G(q, p) \} iq}{b^2 - k_4^2} + G(q, p) \right] b \sinh(bh) -$$

$$\left[\frac{\{G_3(q,p) + iqa_2G_1(q,p)\}iqb}{b^2 - k_4^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-alq}}{b^2 - k_4^2} - bG_1(q,p) \right] e^{-bh}, \quad (48c)$$

$$\sum_{j=1}^3 [A_j(q,p)e^{-k_jh} - A_{-j}(q,p)e^{k_jh}] \frac{\{1 - iqa_2f_j(q,p)\}k_j}{k_j^2 - k_4^2} = \frac{b \sinh(bh) [G_2(q,p) - iqa_2G(q,p)]}{b^2 - k_4^2} - \frac{[G_3(q,p) + iqa_2G_1(q,p)]be^{bh}}{b^2 - k_4^2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{bh}e^{-alq}}{ap(b^2 - k_4^2)}, \quad (48d)$$

$$\sum_{j=1}^3 [A_j(q,p)e^{-k_jh} + A_{-j}(q,p)e^{k_jh}]f_j = -G(q,p) \cosh(bh) - G_1(q,p)e^{bh}, \quad (48e)$$

$$\sum_{j=1}^3 [A_j(q,p)e^{-k_jh} - A_{-j}(q,p)e^{k_jh}]k_j = bG_2(q,p) \sinh(bh) + bG_3(q,p)e^{bh}. \quad (48f)$$

上述线性方程组的解包含未知参数 $A_j(q,p), A_{-j}(q,p), j = 1, 2, 3$ 。上面完成了变换域中的求解过程。计算中作简单的替换：

$$a_1 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad a_2 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \epsilon = \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_v (\lambda + 2\mu)}, \quad \gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_i,$$

就可以将本问题推演出各向同性材料的结果,其中 λ, μ 为 Lamé 常数, ρ, c_v 和 α_i 分别为密度、定容热容和各向同性材料的线性膨胀系数。

4 双重变换的逆变换

函数 $\hat{f}(x, q, p)$ 在 Laplace 变换域中的表达式为

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, y, p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyq} \hat{f}(x, q, p) dq = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [\cos(qy) \hat{f}_e(x, q, p) + i \sin(qy) \hat{f}_o(x, q, p)] dq, \end{aligned} \quad (49)$$

其中 \hat{f}_e 和 \hat{f}_o 分别表示 $\hat{f}(x, q, p)$ 的偶数部分和奇数部分,为了得到空间-时间域中的解,对方程(49)作 Laplace 逆变换,从而可以利用基于 Fourier 级数展开方法的数值求解。

数值逆变换解法的概要介绍如下。

设函数 $f(x, y, t)$ 的 Laplace 变换为 $\bar{f}(x, y, p)$, 则 Laplace 变换的逆变换公式为

$$f(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{pt} \bar{f}(x, y, p) dp, \quad (50)$$

其中 d 为任意实数,比 $\bar{f}(x, y, p)$ 的所有奇点的实部都大。取 $p = d + iw$, 则上面的积分变为

$$f(x, y, t) = \frac{e^{dt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} \bar{f}(x, y, d + iw) dw. \quad (51)$$

将 $e^{-dt}f(x, y, t)$ 在区间 $[0, 2T]$ 中,用 Fourier 级数展开,得到近似公式^[31]：

$$f(x, y, t) = f_{\infty}(x, y, t) + E_D, \quad (52)$$

其中

$$f_{\infty}(x, y, t) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k, \quad 0 \leq T \leq 2T, \quad (53)$$

$$c_k = \frac{e^{dt}}{T} \left[e^{ik\pi t/T} \bar{f}\left(x, y, d + \frac{ik\pi t}{T}\right) \right], \quad (54)$$

而 E_D 为离散误差. 选取足够大的 d , 将误差 E_D 控制到任意小^[31]. 可将方程(53)中的无穷级数取有限 N 项, 则 $f(x, y, t)$ 的近似值变为

$$f_N(x, y, t) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{k=1}^N c_k, \quad 0 \leq t \leq 2T. \quad (55)$$

使用该公式来估计 $f(x, y, t)$ 时, 截断误差 E_T 必须加上离散误差. 有两种方法用来减少全局误差, 第1种称为 Korrektor 法, 用来减少离散误差; 第2种称为 ε -算法, 用于加速收敛过程. Korrektor 法使用下面的公式来估计函数 $f(x, y, t)$:

$$f(x, y, t) = f_\infty(x, y, t) - e^{-2dT} f_\infty(x, y, 2T + \eta) + E'_D, \quad (56)$$

其中离散误差 $|E'_D| \ll |E_D|$, 因而, $f(x, y, t)$ 的近似值变为

$$f_{NK}(x, y, t) = f_N(x, y, t) - e^{-2dT} f'_N(x, y, 2T + \eta). \quad (57)$$

下面叙述 ε -算法, 加快方程(53)中级数的收敛速度. 令 $N = 2q + 1$, 其中 q 为自然数, $s_m = \sum_{k=1}^m c_k$ 为式(55)中级数部分和的序列, 序列 ε 的定义如下:

$$\varepsilon_{0,m} = 0, \quad \varepsilon_{1,m} = s_m$$

和

$$\varepsilon_{l+1,m} = \varepsilon_{l-1,m+1} + \frac{1}{\varepsilon_{l,m+1} - \varepsilon_{l,m}}, \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

可以发现^[31], 序列 $\varepsilon_{1,1}, \varepsilon_{3,1}, \varepsilon_{5,1}, \dots, \varepsilon_{N,1}$ 收敛于 $f(x, y, t) + E_D - c_0/2$, 比部分和序列 $s_m (m = 1, 2, 3, \dots)$ 的收敛速度快. 在使用由方程(54)组成的 Laplace 逆变换的实际过程中, 同时使用 ε -算法, d 和 T 值的选取参考了 Honig 和 Hirdes^[31] 给出的准则.

5 数值结果和讨论

为了图示数值结果, 选择板的材料为镁 (Mg), 其物理参数如下^[32]:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 5.974 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \quad c_{12} = 2.624 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \\ c_{13} &= 2.17 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \quad c_{33} = 6.17 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \\ c_{44} &= 1.510 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \quad \beta_1 = 2.68 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}, \\ c_v &= 1.04 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \quad K_1 = 1.7 \times 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \\ \epsilon &= 2.02 \times 10^{-2}, \quad \rho = 1.74 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad T_0 = 298 \text{ K}. \end{aligned}$$

使用 Laguerre 法得到多项式方程(37)在复数域中的根, 在数值计算时取 $K^* = 200$. 使用一个基于 Fourier 级数展开的方法, 数值地计算 Laplace 逆变换^[31]. 图1至图6在 $y = 0$ 和 $t = 0.25$ 时, 就 Green 和 Naghdi^[21-22] 的两个模型, 即模型 II 和模型 III, 分有体力 (WBF) 和无体力 (WOBF) 两种情况, 给出了位移、温度和应力随板厚 x 变化结果的比较. 图7至图12给出了各向同性铜材的位移、温度和应力结果的比较, 铜材的材料参数取自 El-Maghraby 的文献[33]:

$$\begin{aligned} \lambda &= 7.76 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \quad \mu = 3.86 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \quad \rho = 8954 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \\ K &= 386 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \quad c_v = 383.1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \\ T_0 &= 293 \text{ K}, \quad \alpha_l = 1.78 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}, \\ \epsilon &= 0.0168, \quad \theta_0 = 1, \quad h = 0.5, \quad g = 1, \quad a = 1, \quad b = 1. \end{aligned}$$

图1和图2中, 当 $y = 0, t = 0.25$, GN 模型 II (TEWOED) 和 GN 模型 III (TEWED) 时, 分别给出了位移分量 u 和 v 随板厚 x 的变化情况. 从图1和图2可以看出, 刚性基础 $x = -0.5$ 处的位移为0, 这与边界条件相符; 上表面 $x = 0.5$ 处的位移最大, 与物理支撑相符. 模型 II 的位移大

于模型 III 的位移, 因为模型 III 中出现能量耗散项 \dot{T} (见方程(5)). 图 1 和图 2 中还可以看到, 在模型 II 和模型 III 中, 有体力(WBF)比无体力(WOBF)时, 振荡更为明显.

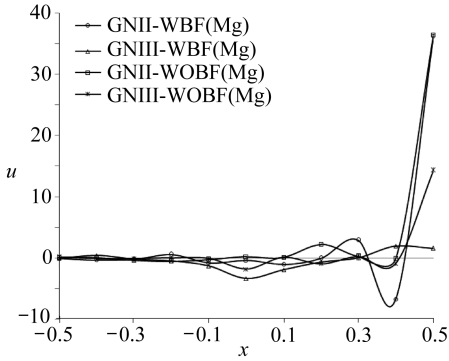


图 1 当 $t = 0.25$ 和 $y = 0$ 时, 位移分量 u 随 x 的变化

Fig. 1 Variation of displacement component u against x for $t = 0.25$ and $y = 0$

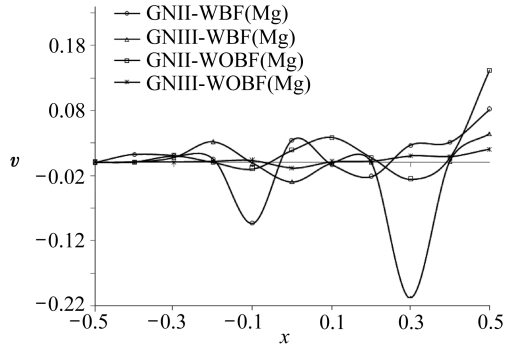


图 2 当 $t = 0.25$ 和 $y = 0$ 时, 位移分量 v 随 x 的变化

Fig. 2 Variation of displacement component v against x for $t = 0.25$ and $y = 0$

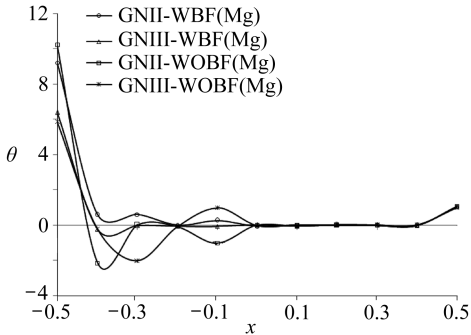


图 3 当 $t = 0.25$ 和 $y = 0$ 时, 温度 θ 随 x 的变化

Fig. 3 Variation of temperature θ for $t = 0.25$ and $y = 0$

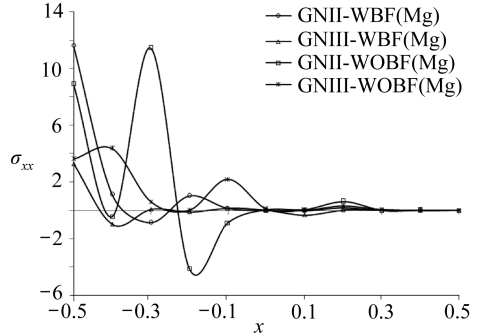


图 4 当 $t = 0.25$ 和 $y = 0$ 时, 应力分量 σ_{xx} 随 x 的变化

Fig. 4 Variation of stress component σ_{xx} for $t = 0.25$ and $y = 0$

图 3 在 $y = 0$ 和 $t = 0.25$ 时, 给出了温度 θ 随 x 的分布. 从图 3 可以看到, 上表面处的 $\theta = 1$, 这与边界条件相符. 下表面置于刚性基础上, 又是绝热的, 温度最高, 并且在下表面附近出现明显的振荡, 是因为热波的反射. 图 4 在相同的模型 II 和模型 III 参数下, 绘出了正应力 σ_{xx} 随 x 的变化. 从图中可以看到, 上表面无应力, 这正是期待的; 下表面附近出现明显的振荡, 原因和图 2 是一样的. 对正应力 σ_{xx} 来说, 模型 II 和模型 III 有体力(WBF)比无体力(WOBF)时, 振荡明显减弱.

图 5 和图 6 分别给出剪应力 σ_{xy} 和正应力 σ_{yy} 随 x 的变化. 上述两个图给出了横观各向同性材料镁, 有体力(WBF)和无体力(WOBF)时结果的比较.

图 7 和图 8 描绘出 $y = 0, t = 0.25$, 各向同性材料铜(Cu), GN 模型 II WBF 和 WOBF 两种情况时, 位移分量 u 和 v 随 x 的变化, 并将结果与横观各向同性材料镁(Mg)相比较. 从图 7 和图 8 可以看到, 两种情况(WBF 和 WOBF)下的下边界位移均为 0, 与理论条件相符; 两种情况(WBF 和 WOBF)下, 横观各向同性材料镁的位移均大于各向同性材料铜, 这与实际完全相符. 还可以看到, 对于各向同性材料铜, WBF 时的振荡幅度比 WOBF 大得多.

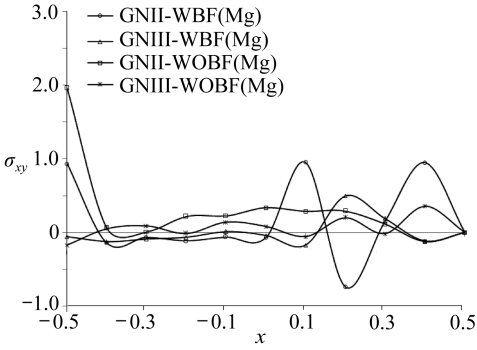


图5 当 $t = 0.25$ 和 $y = 0$ 时,应力分量 σ_{xy} 随 x 的变化

Fig. 5 Variation of stress component σ_{xy} for $t = 0.25$ and $y = 0$

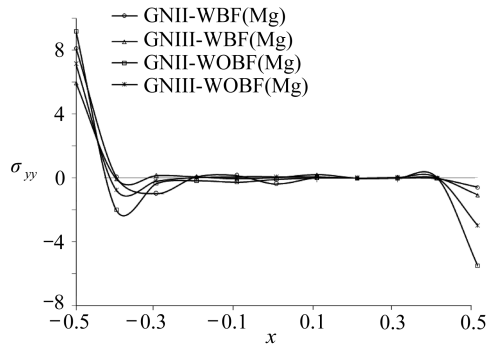


图6 当 $t = 0.25$ 和 $y = 0$ 时,应力分量 σ_{yy} 随 x 的变化

Fig. 6 Variation of stress component σ_{yy} for $t = 0.25$ and $y = 0$

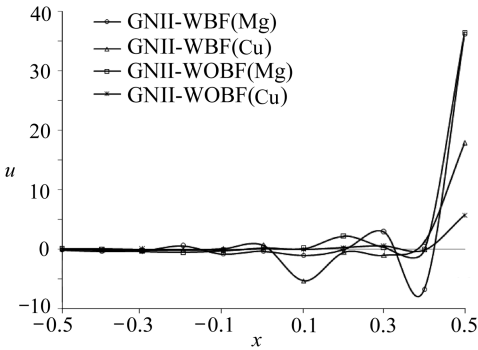


图7 当 $t = 0.25$ 和 $y = 0$ 时,位移分量 u 随 x 的变化

Fig. 7 Variation of displacement component u against x for $t = 0.25$ and $y = 0$

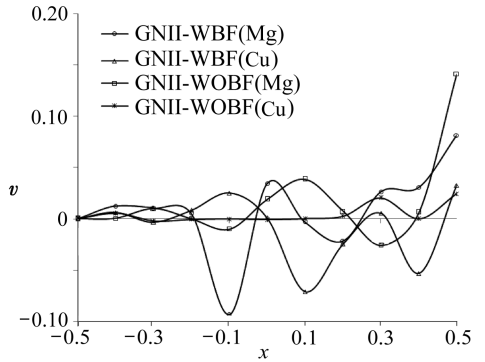


图8 当 $t = 0.25$ 和 $y = 0$ 时,位移分量 v 随 x 的变化

Fig. 8 Variation of displacement component v against x for $t = 0.25$ and $y = 0$

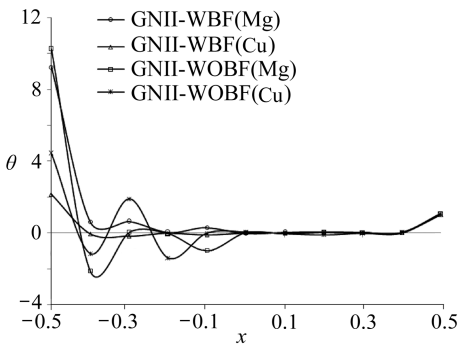


图9 当 $t = 0.25$ 和 $y = 0$ 时,温度 θ 随 x 的变化

Fig. 9 Variation of temperature θ for $t = 0.25$ and $y = 0$

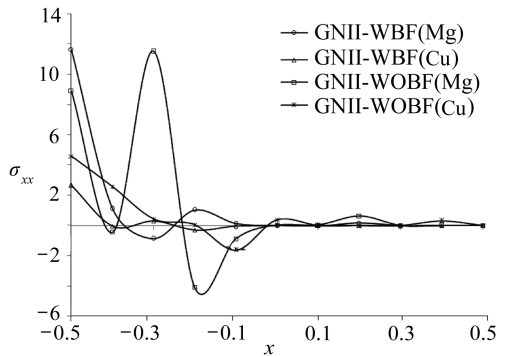


图10 当 $t = 0.25$ 和 $y = 0$ 时,应力分量 σ_{xx} 随 x 的变化

Fig. 10 Variation of stress component σ_{xx} for $t = 0.25$ and $y = 0$

图9 在与图8取相同参数时,给出温度 θ 随 x 的变化情况.从图8可以看到,WBF和WOBF两种情况下,下边界处的温度最大,而上边界处为 $\theta = 1$,与边界条件是一致的.正如前

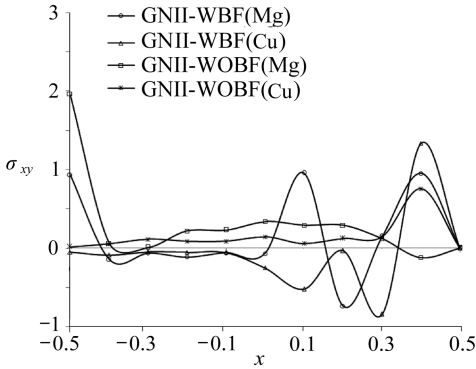


图 11 当 $t = 0.25$ 和 $y = 0$ 时,应力分量 σ_{xy} 随 x 的变化

Fig. 11 Variation of stress component σ_{xy} for $t = 0.25$ and $y = 0$

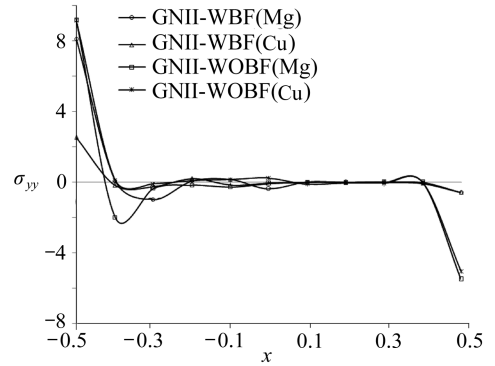


图 12 当 $t = 0.25$ 和 $y = 0$ 时,应力分量 σ_{yy} 随 x 的变化

Fig. 12 Variation of stress component σ_{yy} for $t = 0.25$ and $y = 0$

面所述的原因,在下表面附近温度出现明显的振荡。值得注意的是,无论是 WBF 还是 WOBF,在 $x = -0.5$ 处,横观各向同性材料的温度均高于各向同性材料。图 10 在同样的条件下,给出了正应力 σ_{xx} 随 x 的变化情况,所有情况下,量值的变化特性几乎相同。应力波在下边界处反射,在 $x = 0.5$ 处消失,这与上表面无应力的力学边界条件是一致的(即 $\sigma_{xx}(h, y, t) = 0$)。从图 10 可以看到, WBF 时,两种材料(Mg 和 Cu)的应力波振荡幅度均减弱。

图 11 和图 12 在与图 10 取相同的参数时,分别给出剪应力 σ_{xy} 和正应力 σ_{yy} 随 x 的变化情况。从图 11 看到,有体力(WBF)时,不管是横观各向同性材料(Mg),还是各向同性材料(Cu),在上边界附近,剪应力 σ_{xy} 的幅值在增加,并最终变为 0。从图 12 可以看到,正应力 σ_{yy} 在下边界处最大,在上边界处最小。在没有体力时,所有的图形,与 Mallik 和 Kanoria^[24] 给出的结果相一致。

致谢 作者对加尔各答大学应用数学系的 S. C. 伯斯教授所提出的宝贵建议及其指导,表示衷心的感谢!

参考文献:

- [1] Chadwick P. Thermoelasticity, the dynamic theory[C]//Sneddon I N, Hill R. *Progress in Solid Mechanics*. Vol I. Amsterdam; North-Holland, 1960; 263-368.
- [2] Nowacki W. *Thermoelasticity*[M]. Oxford; Pergamon Press, 1962.
- [3] Nowacki W. *Dynamic Problems of Thermoelasticity*[M]. Leyden; Noordhoff International Publishing, 1975.
- [4] Lord H, Shulman Y. A generalized dynamic theory of thermoelasticity[J]. *J Mech Phys Solids*, 1967, **15**(5): 299-309.
- [5] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity[J]. *J Elasticity*, 1972, **2**(1): 1-7.
- [6] Chandrasekharaiah D S. Thermoelasticity with second sound[J]. *Appl Mech Rev*, 1986, **39**(3): 355-376.
- [7] Chandrasekharaiah D S. A note on the uniqueness of solution in the theory of thermoelasticity without energy dissipation[J]. *J Elasticity*, 1996, **43**(3): 279-283.
- [8] Chandrasekharaiah D S. A uniqueness theorem in the theory of thermoelasticity without energy dissipation[J]. *J Thermal Stresses*, 1996, **19**(3): 267-272.

- [9] Chandrasekharaiah D S. One dimensional wave propagation in the linear theory of thermoelasticity without energy dissipation[J]. *J Thermal Stresses*, 1996, **19**(8) : 695-710.
- [10] Chandrasekharaiah D S, Srinath K S. Thermoelastic interactions without energy dissipation due to a point heat sources[J]. *J Elasticity*, 1998, **50**(2) : 97-108.
- [11] Sherief H H. On uniqueness and stability in generalized thermoelasticity[J]. *Quart Appl Math*, 1987, **45**: 773-778.
- [12] Ignaczak J. Uniqueness in generalized thermoelasticity[J]. *J Thermal Stresses*, 1979, **2**(2) : 171-175.
- [13] Ignaczak J. A note on uniqueness in thermoelasticity with one relaxation time[J]. *J Thermal Stresses*, 1982, **5**(3/4) : 257-263.
- [14] Ignaczak J. Generalized thermoelasticity and its applications[C]//Hetnarski R B. *Thermal Stresses*. Chapter 4. Vol III. Oxford: Elsevier, 1989.
- [15] Ackerman C C, Guyer R A. Temperature pulses in dielectric solids[J]. *Ann Phys*, 1968, **50**(1) : 128-185.
- [16] Jackson H E, Walker C T, McNelly T F. Second sound in NaF[J]. *Phys Rev Lett*, 1970, **25**(1) : 26-28.
- [17] Jackson H E, Walker C T. Thermal conductivity, second sound, and phonon-phonon interactions in NaF[J]. *Phys Rev*, 1971, **3**(4) : 1428-1439.
- [18] Rogers S J. Transport of heat and approach to second sound in some isotopically pure Alkali-Halide crystals[J]. *Phys Rev*, 1971, **3**(4) : 1440-1457.
- [19] Narayanmurti V, Dynes R C. Observation of second sound in bismuth[J]. *Phys Rev Lett*, 1972, **28**(22) : 1461-1465.
- [20] Green A E, Naghdi P M. A re-examination of the basic results of thermomechanics[J]. *Proc Roy Soc London Ser A*, 1991, **432**: 171-194.
- [21] Green A E, Naghdi P M. On undamped heat waves in an elastic solid[J]. *J Thermal Stresses*, 1992, **15**(2) : 252-264.
- [22] Green A E, Naghdi P M. Thermoelasticity without energy dissipation[J]. *J Elasticity*, 2006, **31**(3) : 189-208.
- [23] Mallik S H, Kanoria M. Effect of rotation on thermoelastic interaction with and without energy dissipation in an unbounded medium due to heat sources—an eigenvalue approach[J]. *Far East J Appl Math*, 2006, **23**(2) : 147-167.
- [24] Roychoudhuri S K, Dutta P S. Thermoelastic interaction without energy dissipation in an infinite solid with distributed periodically varying heat sources[J]. *Int J Solids Structures*, 2005, **42**(14) : 4192-4203.
- [25] Mallik S H, Kanoria M. A two dimensional problem for a transversely isotropic generalized thermoelastic thick plate with spatially varying heat source[J]. *Euro J Mech /A Solids*, 2008, **27**(4) : 607-621.
- [26] Mallik S H, Kanoria M. A two dimensional problem in generalized thermoelasticity for a rotating orthotropic infinite medium with heat sources[J]. *Indian J Math*, 2007, **49**(1) : 47-70.
- [27] Mallik S H, Kanoria M. Generalized thermoelastic functionally graded solid with a periodically varying heat source[J]. *Int J Solids Structures*, 2007, **44**(22/23) : 7633-7645.
- [28] Banik S, Mallik S H, Kanoria M. Thermoelastic interaction with energy dissipation in an infinite solid with distributed periodically varying heat sources[J]. *Int J Pure Appl Math*, 2007, **34**(2) : 231-245.

- [29] Bondyopadhyay N, Roychoudhuri S K. Thermoelastic wave propagation without energy dissipation in an elastic half space[J]. *Bull Cal Math Soc*, 2005, **97**(6): 489-502.
- [30] Verma K L, Hasebe N. Wave propagation in transversely isotropic plates in generalized thermoelasticity[J]. *Arch Appl Math*, 2002, **72**(6/7): 470-482.
- [31] Honig G, Hirdes U. A method for the numerical inversion of the Laplace transform[J]. *J Comp Appl Math*, 1984, **10**(1): 113-132.
- [32] Dhaliwal R S, Singh A. *Dynamic Coupled Thermoelasticity* [M]. Delhi: Hindustan Pub, 1980.
- [33] El-Maghraby N M. Two dimensional problem in generalized thermoelasticity with heat sources [J]. *J Thermal Stresses*, 2004, **27**(3): 227-239.

Study of Dynamic Response in a Two Dimensional Transversely Isotropic Thick Plate With Spatially Varying Heat Sources and Body Forces

Mohsin Islam¹, Sadek Hossain Mallik², Mridula Kanoria³

(1. *Department of Mathematics, St. Xavier's College (Evening)*, 30,
Mother Teresa Sarani (Park Street), Kolkata 700016, India;

2. *Department of Mathematics, Aliah University, DN-41, Sector V,*
Salt Lake City, Kolkata 700091, India;

3. *Department of Applied Mathematics, University of Calcutta, Kolkata 700009, India)*

Abstract: A two dimensional problem for a transversely isotropic thick plate having heat source and body force was studied. The upper surface of the plate was stress free with prescribed surface temperature while the lower surface of the plate rest on a rigid foundation and was thermally insulated. The study was carried out in the context of generalized thermoelasticity proposed by Green and Naghdi. The governing equations for displacement and temperature fields were obtained in Laplace-Fourier transform domain by applying Laplace and Fourier transform techniques. The inversion of double transform had been done numerically. The numerical inversion of Laplace transform was done by using a method based on Fourier series expansion technique. Numerical computations had been done for magnesium (Mg) and the results were presented graphically. The results for an isotropic material (Cu) had been deduced numerically and presented graphically to compare with those of transversely isotropic material (Mg). The effect of body force was also studied.

Key words: generalized thermoelasticity; Green-Naghdi model; transversely isotropic material; spatially varying heat source; body force