

# 各态历经的地震动空间场的简化模拟\*

高玉峰<sup>1,2</sup>, 吴勇信<sup>1,2</sup>, 黎冰<sup>3</sup>

- (1. 河海大学 岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 南京 210098;  
2. 河海大学 岩土工程科学研究所, 南京 210098;  
3. 东南大学 土木工程学院, 南京 210096)

**摘要:** 基于地震动空间场模拟中运用较广泛的原型谱表示法, 给出了一种各态历经地震动空间场的模拟公式. 首先给出原型谱表示法中体现任意两点间相关性的相位角的具体表达式, 使其具有明确的物理意义, 从而使得对复功率谱矩阵的 Cholesky 分解转化为对实数域内的相干函数矩阵的 Cholesky 分解, 提高了合成效率. 同时还在模拟公式中引入了双索引频率, 以使得模拟公式具有均值与相关函数(自/互功率谱密度函数)的各态历经性, 还对其各态历经性进行了理论上的证明, 证明了当所模拟的各点地震动时间序列取一个周期时, 其均值与相关函数的各态历经性. 为进一步提高模拟效率, 还给出了特定条件下, 相干函数矩阵 Cholesky 分解后下三角矩阵中各元素的解析解, 使得在合成中可以避免反复地在各频率下对相干函数矩阵进行 Cholesky 分解, 从而实现了模拟模型的简化. 最后, 给出一个简单的模拟实例, 对改进前后模拟的地震动场进行比较, 以说明改进后公式的模拟效果.

**关键词:** 地震动场; 原型谱表示法; 各态历经; 双索引频率; 相干函数矩阵; 解析解

**中图分类号:** TU973 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.10.007

## 引 言

实际地震台阵的强震记录表明, 在较小的范围内地震动即有所差异. 在对结构物进行动力分析时常常采用一致地震动输入, 这样的输入条件对于小尺度结构物可以接受, 但对于大跨度的结构物则显得过于粗糙. 在对大跨度结构物(例如大坝、桥梁、长距离管道)进行动力反应分析时, 有必要考虑地震动随机场的空间变异性. 而由于实际地震动台阵记录的稀缺, 常需要人工合成多点相关的地震动, 因此有必要提出一种合理、简便的空间相关多点地震动的合成方法.

许多学者对空间相关的随机地震动场的模拟方法进行了研究, 这些方法主要是基于已知各点地震动自功率谱及相干函数, 来模拟与目标自功率谱及相干函数相一致的空间相干的地

\* 收稿日期: 2010-04-14; 修订日期: 2011-07-17

基金项目: 国家自然科学基金重大计划资助项目(90815020;50808067)

作者简介: 高玉峰(1966—), 男, 安徽来安人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. E-mail: yfgao66@yahoo.com.cn);

吴勇信(1985—), 男, 江苏射阳人, 博士生(E-mail: yongxinwuhhu@yahoo.com.cn).

震动场。Shinozuka 等<sup>[1]</sup>基于原型谱表示法,运用三角级数求和法模拟空间相关的多点地震动。Hao 等<sup>[2]</sup>采用其基于实际地震记录分析得到的相关函数并基于原型谱表示法来模拟与实际地震记录相一致的多点地震动。Li 和 Kareem<sup>[3]</sup>将随机分解法与快速 Fourier 变换(FFT)相结合,模拟与给定的谱矩阵相一致的空间多点地震动,并通过分析所给定的目标地震动的非平稳特性来构建渐进谱矩阵,实现模拟地震动的非平稳化。Zerva<sup>[4]</sup>基于快速 Fourier 变换(FFT)技术及地震动的相干函数模型来模拟空间相干的多点平稳地震动。Ramadan 和 Novak<sup>[5-6]</sup>基于余弦函数求和法,通过对相干函数进行 Fourier 分解求得幅值系数,来模拟与给定的自功率谱及相干函数相一致的空间地震动场。Deodatis<sup>[7]</sup>基于原型谱表示法,分别以功率谱矩阵与反应谱为目标谱,通过迭代的算法来模拟空间相关的非平稳地震动。Shrikhande 等<sup>[8]</sup>同样基于原型谱表示法,通过引入了实际地震记录相位谱与持时谱来实现地震动的非平稳化。Paola 等<sup>[9]</sup>基于谱表示法,通过对功率谱矩阵进行特征正交分解来模拟空间相关的多点地震动。Jankowski 等<sup>[10]</sup>基于相干函数来调整地震动的相位的简化方法来模拟空间相关的地震动。Shama<sup>[11]</sup>基于单点地震动模拟中的余弦函数求和法,引入相位变化角,并建立相位变化角与相干函数之间的关系,来模拟空间相干的地震动场。在上述方法中,又以原型谱表示法在地震动的模拟中应用较为广泛。

我国学者基于原型谱表示法做了很多研究工作。屈铁军和王前信<sup>[12-13]</sup>对原型谱表示法进行了改进,提出生成每一个点地震动时均考虑与其它各个点的相关性;夏友柏等<sup>[14]</sup>给出了一种相位角是确定的多点地震动的合成公式,而通过对迟滞相关矩阵进行分解来求得幅值谱;刘先明和叶继红等<sup>[15]</sup>在屈铁军研究的基础上对功率谱矩阵的分解方法进行了改进,提高了多点地震动的合成的效率;梁建文<sup>[16-17]</sup>基于渐进谱理论提出了非平稳地震动模拟的方法;胡亮等<sup>[18]</sup>提出了一种基于特征正交分解的多点地震动模拟方法;董汝博和周晶等<sup>[19-20]</sup>根据地震波的传播特点,对屈铁军的合成方法进行了修改,通过修正随机相位角,使生成的多点地震动在局部场地上具有收敛性,并给出了已知相位差谱和未知相位差谱两种情况下的多点非平稳地震动的合成方法。全伟和李宏男<sup>[21]</sup>将小波变化方法运用到多维地震动的合成中,以生产与目标反应谱相一致的多维地震动时程。

原型谱表示法是通过功率谱密度矩阵进行 Cholesky 分解,化一维多变量过程模拟问题为若干个不相干的单变量过程模拟问题。原型谱表示法来源于谱表示法,也是其它许多随机过程(例如风场、波)模拟中较为常用的一种方法。Shinozuka<sup>[22-23]</sup>在多维多变量随机过程的模拟中就提出了谱表示法,并对其进行了深入的研究。Yang<sup>[24]</sup>将 FFT 技术运用到该方法中,大大地提高了模拟效率。其后 Vaicaitis 等<sup>[25]</sup>就将原型谱表示方法运用于一维多变量风场的模拟中,并得到了广泛的运用。Shinozuka 等<sup>[1]</sup>将其运用到空间相关的多点地震动的模拟中。Shinozuka 等<sup>[26-27]</sup>再次清晰地阐述了该模拟方法,并说明模拟结果是非各态历经的,这将需要较多的模拟次数以降低误差,并指出了在实际工程运用中,各态历经性更为重要。Deodatis<sup>[28]</sup>在随机风场的模拟中,将双索引频率引入原型谱表示法,并证明了该模拟方法的各态历经性,得到各态历经风场模拟的公式。

本文的研究基于原型谱表示法,首先给出了合成公式中体现各点之间相干性的相位角的具体表达式,从而将对复功率谱密度矩阵的分解转化为实相干函数矩阵的分解,使 Cholesky 分解得以在实数域内进行。由于各态历经性在地震动场模拟中的重要性,则将双索引频率引入地

震动空间场模拟的公式,并进一步从理论上证明了改进后公式的各态历经性.在实际工程运用中,常常模拟点数较多且可以将其简化为等间距分布.本文基于已有的空间地震动场的相干函数模型,给出了当地震动场模拟点等间距分布时,相干函数矩阵 Cholesky 分解后下三角矩阵各元素的解析解,从而进一步提高了地震动场模拟的效率,简化了模拟模型.

## 1 空间相关的多点平稳地震动的描述

在模拟空间相关多点地震动时,一般可以将空间地震动场简化为一个单维多变量平稳的随机过程,设其为  $X(t)$ ,其元素为  $x_j(t)$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ),则其各个元素一般为 0 均值的随机过程,即  $E[x_j(t)] = 0$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ <sup>[9]</sup>.各点地震动可用图 1 的简化模型表示.

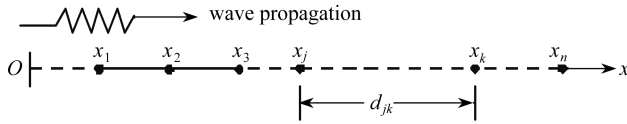


图 1 地震动空间场的简化模型

Fig. 1 Simplified model of spatially correlated earthquake ground motions

对于空间各点之间的相关性一般可以通过互协方差矩阵或互功率谱密度矩阵来表示.它们的协方差矩阵可以表示为

$$\mathbf{R}(\tau) = \begin{bmatrix} R_{11}(\tau) & R_{12}(\tau) & \cdots & R_{1n}(\tau) \\ R_{21}(\tau) & R_{22}(\tau) & \cdots & R_{2n}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1}(\tau) & R_{n2}(\tau) & \cdots & R_{nn}(\tau) \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (1)$$

其中,  $\tau$  表示滞时,  $R_{jj}(\tau)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 为随机过程  $x_j(t)$  的自相关函数,  $R_{jk}(\tau)$  ( $j, k = 1, 2, \dots, n$ ;  $j \neq k$ ) 为随机过程  $x_j(t)$  与  $x_k(t)$  之间的互相关函数.且它们满足

$$R_{jj}(\tau) = R_{jj}(-\tau), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2a)$$

$$R_{jk}(\tau) = R_{kj}(-\tau), \quad j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n; j \neq k. \quad (2b)$$

功率谱密度矩阵可以表示为

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) & \cdots & S_{1n}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) & \cdots & S_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1}(\omega) & S_{n2}(\omega) & \cdots & S_{nn}(\omega) \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (3)$$

该矩阵中对角线元素  $S_{jj}(\omega)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 为自功率谱密度函数,其为关于频率  $\omega$  的非负实数,满足  $S_{jj}(\omega) = S_{jj}(-\omega)$ ;其余元素  $S_{jk}(\omega)$  ( $j, k = 1, 2, \dots, n$ ;  $j \neq k$ ) 为互功率谱密度函数,其为关于频率  $\omega$  的复数.对于任意两个平稳随机过程  $x_j(t)$  与  $x_k(t)$  的互功率谱密度函数可以通过频域内的相关函数表示为<sup>[29]</sup>

$$S_{jk}(\omega) = \gamma_{jk}(\omega) \sqrt{S_{jj}(\omega) S_{kk}(\omega)}, \quad (4)$$

其中,  $\gamma_{jk}(\omega)$  为频域内表示的两点间的相关函数,其一般可以表示为

$$\gamma_{jk}(\omega) = \rho_{jk}(\omega) e^{-i\omega d_{jk}^L/v_a}, \quad (5)$$

其中  $\rho_{jk}(\omega)$  为相干函数,体现部分相干效应,其一般是关于频率和距离的函数满足:

$$\rho_{jk}(\omega) = |\gamma_{jk}(\omega)|, \quad (6a)$$

$$\rho_{jk}(\omega) = \rho_{kj}(\omega) = \rho_{jk}(-\omega) = \rho_{kj}(-\omega). \quad (6b)$$

基于实际的台阵记录,许多们也提出了许多相干函数模型;  $e^{-i\omega d_{jk}^L/v_a}$  体现行波效应,  $v_a$  为视波速;  $d_{jk}^L$  表示向量  $j$  和  $k$  两点间距离在 seismic wave 传播方向上的投影,且分正负,满足

$$d_{jk}^L = -d_{kj}^L, \quad (7a)$$

$$d_{ij}^L - d_{ik}^L = d_{kj}^L. \quad (7b)$$

根据上述可知,互功率谱密度函数一般满足

$$S_{jk}(\omega) = S_{jk}^*(-\omega) = S_{jk}^*(\omega) = S_{kj}(-\omega), \quad \forall \omega, \quad (8)$$

上标“\*”表示是共轭复数,下同。

由此可知功率谱矩阵  $\mathbf{S}(\omega)$  为 Hermit 矩阵,且其一般为非负定矩阵。

此外,根据 Wiener-Khintchine 定理,互协方差矩阵与互功率谱密度矩阵中的元素满足以下关系:

$$S_{jk}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{jk}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (9a)$$

$$R_{jk}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{jk}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (9b)$$

## 2 空间相关多点地震动的模拟公式

### 2.1 原型谱表示法

当所模拟的地震动  $X(t)$  的自功率谱密度函数为  $\mathbf{S}(\omega)$  (下文模拟中均采用单边功率谱密度函数),及任意两点地震动  $x_j(t)$  与  $x_k(t)$  间的频域内的相关函数  $\gamma_{jk}(\omega)$  均已知时,即已知功率谱矩阵(协方差矩阵)。则所需模拟的地震动空间场中任意一点的地震动时程  $x_j(t)$  可表示为<sup>[2]</sup>

$$x_j(t) = \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^N \sqrt{2\Delta\omega} |H_{jm}(\omega_l)| \cos[\omega_l t - \theta_{jm}(\omega_l) + \varphi_{ml}]. \quad (10a)$$

具体可表示为

$$\begin{cases} x_1(t) = \sum_{l=1}^N \sqrt{2\Delta\omega} |H_{1m}(\omega_l)| \cos[\omega_l t - \theta_{1m}(\omega_l) + \varphi_{ml}], \\ x_2(t) = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^N \sqrt{2\Delta\omega} |H_{2m}(\omega_l)| \cos[\omega_l t - \theta_{2m}(\omega_l) + \varphi_{ml}], \\ \vdots \\ x_n(t) = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^N \sqrt{2\Delta\omega} |H_{nm}(\omega_l)| \cos[\omega_l t - \theta_{nm}(\omega_l) + \varphi_{ml}], \end{cases} \quad (10b)$$

上式中,  $\Delta\omega$  为频率增量,  $\omega_l = l\Delta\omega$ , 且  $\Delta\omega = \omega_u/N$ ,  $N$  为频率离散点数,  $\omega_u$  为截止圆频率。  $\varphi_{ml}$  是在  $(0, 2\pi)$  区间上均匀分布的相互独立随机相位角;  $|H_{jk}(\omega_l)|$  和  $\theta_{jk}(\omega_l)$  是考虑  $x_j(t)$  与  $x_k(t)$  相关性的第  $l$  个频率成分的幅值与相位角,其取值要满足  $x_j(t)$  与  $x_k(t)$  的相关性和相位特性,它们的取值可以通过对互功率谱矩阵进行 Cholesky 分解来确定。

对于互功率谱矩阵可以通过 Cholesky 法对其进行分解,将其分解为一个上三角矩阵和下三角矩阵的乘积:

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) [\mathbf{H}^*(\omega)]^T, \quad (11a)$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & & & \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ H_{n1}(\omega) & H_{n1}(\omega) & \cdots & H_{nn}(\omega) \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (11b)$$

下三角矩阵  $\mathbf{H}(\omega)$  中对角线元素为非负的实数,  $H_{jk}(j > k)$  为复数, 其它元素的值均为 0. 对于式(10)中的元素  $H_{jk}(j \geq k)$  通常可以表示成下式:

$$H_{jk}(\omega) = |H_{jk}(\omega)| e^{i\theta_{jk}(\omega)}, \quad (12a)$$

其中

$$\theta_{jk}(\omega) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[H_{jk}(\omega)]}{\text{Re}[H_{jk}(\omega)]} \right\}. \quad (12b)$$

这样将  $H_{jk}(\omega_l)$  和  $\theta_{jk}(\omega_l)$  代入模拟式(10)中, 并通过生成  $(0, 2\pi)$  区间上均匀分布的随机相位角  $\varphi_{ml}$ , 就可以模拟出空间相关的平稳随机过程  $X(t)$ .

当截断频率足够小时, 上述模拟公式(10)精度很高; 但在实际应用中, 为了提高计算效率, 并同时满足精度的要求, 常可以按照 Shinozuka 和 Deodatis<sup>[27]</sup> 给出的法则来确定:

$$\int_0^{\omega_u} \mathbf{S}(\omega) d\omega = (1 - \varepsilon) \int_0^{\infty} \mathbf{S}(\omega) d\omega \quad (\varepsilon \ll 1, \text{ 即 } \varepsilon = 0.01, 0.001). \quad (13b)$$

此外, 在实际的模拟过程中一般得到是离散的随机过程, 为了避免信号失真, 则其时间增量  $\Delta t$  要求满足<sup>[28]</sup>:

$$\Delta t \leq \frac{2\pi}{2\omega_u}. \quad (14)$$

## 2.2 改进的原型谱表示法

通过上述的原型谱表示法所模拟的随机过程  $X(t)$  其均值是各态历经的<sup>[26]</sup>, 且与目标值相一致, 均为 0. 但上述模拟方法的二阶矩却表现出非各态历经的特性, 具体表现为其整体的自功率谱与互功率谱是与目标谱相一致的, 而其各个随机过程的自功率谱(自相关函数)或任意两个随机过程的互功率谱(互相关函数)却是所生成的随机相位角的函数, 且常常与目标谱(或目标相关函数)不一致.

Deodatis<sup>[28]</sup> 在风场的模拟中引入了双索引频率, 使模拟的随机风场具有各态历经性. 该小节将引入双索引频率, 来模拟各态历经的地震动空间场, 同时给出了体现空间两点  $x_j(t)$  与  $x_k(t)$  在频率  $\omega$  下相位之间相关性的  $\theta_{jk}(\omega)$  的表达式, 给予其明确的物理意义, 从而使得对复功率谱密度矩阵的分解转化为对实数域内的实相干函数矩阵的分解, 提高了合成效率. 此外, 本节还将进一步从理论上证明了改进后合成方法所模拟的随机过程各态历经性.

在模拟地震动随机场时, 常常假定模拟的各点处的自功率谱密度函数相同, 设其为  $S_0(\omega)$ . 则基于谱表示改进后的 1D-nV 地震动空间随机场中任一点的地震动时程  $x_j(t)$  可以表示为

$$x_j(t) = \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^N \sqrt{2\Delta\omega S_0(\omega_{ml})} L_{jm}(\omega_{ml}) \cos[\omega_{ml}t + \omega_{ml}d_{jm}^l/v_a + \varphi_{ml}], \quad (15a)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \sum_{l=1}^N \sqrt{2\Delta\omega S_0(\omega_{ml})} L_{11}(\omega_{1l}) \cos[\omega_{1l}t + \varphi_{1l}], \\ x_2(t) = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^N \sqrt{2\Delta\omega S_0(\omega_{ml})} L_{2m}(\omega_{ml}) \cos[\omega_{ml}t + \omega_{ml}d_{2m}^L/v_a + \varphi_{ml}], \\ \vdots \\ x_n(t) = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^N \sqrt{2\Delta\omega S_0(\omega_{ml})} L_{nm}(\omega_{ml}) \cos[\omega_{ml}t + \omega_{ml}d_{nm}^L/v_a + \varphi_{ml}], \end{cases} \quad (15b)$$

上述模拟公式中  $\omega_{ml}$  即为双索引频率,其可以表示为

$$\omega_{ml} = (l-1)\Delta\omega + \frac{m}{n}\Delta\omega, \quad m = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

而体现任意两点地震动时程  $x_j(t)$  与  $x_m(t)$  在频率  $\omega_{ml}$  下幅值相关性的  $L_{jm}(\omega_{ml})$  ( $j > m$ ) 则可以通过对实相干函数矩阵  $\boldsymbol{\rho}(\omega)$  进行 Cholesky 分解求得.

首先定义实相干函数矩阵  $\boldsymbol{\rho}(\omega)$ , 其可表示为

$$\boldsymbol{\rho}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12}(\omega) & \cdots & \rho_{1n}(\omega) \\ \rho_{21}(\omega) & 1 & \cdots & \rho_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}(\omega) & \rho_{n2}(\omega) & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

上述矩阵  $\boldsymbol{\rho}(\omega)$  中的任一项  $\rho_{jk}(\omega)$  ( $j, k = 1, 2, \dots, n$ ) 的意义如式(5)所述,则可知上述相干函数矩阵  $\boldsymbol{\rho}(\omega)$  为实对称矩阵,同样可对其进行 Cholesky 分解,分解为一个上三角矩阵和下三角矩阵的乘积,表示为

$$\boldsymbol{\rho}(\omega) = \mathbf{L}(\omega) [\mathbf{L}(\omega)]^T, \quad (18a)$$

$$\mathbf{L}(\omega) = \begin{bmatrix} L_{11}(\omega) & & & \\ L_{21}(\omega) & L_{22}(\omega) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ L_{n1}(\omega) & L_{n2}(\omega) & \cdots & L_{nn}(\omega) \end{bmatrix}. \quad (18b)$$

这样通过上述分解就可以得到模拟式(13)中  $L_{jk}(\omega_{kl})$  的值.此外,式(15)中其它各项与式(5)及式(10)中所述相同.

通过上述改进的原型谱表示法所模拟的随机地震动空间场  $X(t)$  的周期为

$$T_0 = n \frac{2\pi}{\Delta\omega} \neq 0. \quad (19)$$

为了从理论上说明上述改进的方法均值与功率谱密度函数(相关函数)具有很好的各态历经性,且均与目标值很好的吻合,现作以下4方面的证明.

**证明 1**  $E[x_j(t)] = E[x_j^0(t)] = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  (其中上标“0”表示目标值).

$$\begin{aligned} E[x_j(t)] &= E \left[ \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^N \sqrt{2\Delta\omega S_0(\omega_{ml})} L_{jm}(\omega_{ml}) \cos(\omega_{ml}t + \omega_{ml}d_{jm}^L/v_a + \varphi_{ml}) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^N \sqrt{2\Delta\omega S_0(\omega_{ml})} L_{jm}(\omega_{ml}) \cos(\omega_{ml}t + \omega_{ml}d_{jm}^L/v_a + \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^N \sqrt{2\Delta\omega S_0(\omega_{ml})} L_{jm}(\omega_{ml}) \int_0^{2\pi} \cos(\omega_{ml}t + \omega_{ml}d_{jm}^L/v_a + \varphi) d\varphi = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

则可以得到



$$E[x_j(t)] = E[x_j^0(t)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

证明 2  $S_{jk}(\omega) = S_{jk}^0(\omega) (R_{jk}(\tau) = R_{jk}^0(\tau))$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, n$ ,

$$R_{jk}(t_1, t_2) = E[x_j(t_1)x_k(t_2)] =$$

$$E \left\{ \left[ \sum_{m_1=1}^n \sum_{l_1=1}^N \sqrt{2\Delta\omega S_0(\omega_{m_1 l_1})} L_{j m_1}(\omega_{m_1 l_1}) \cos(\omega_{m_1 l_1} t_1 + \omega_{m_1 l_1} d_{j m_1}^L / v_a + \varphi_{m_1 l_1}) \right] \times \right. \\ \left. \left[ \sum_{m_2=1}^n \sum_{l_2=1}^N \sqrt{2\Delta\omega S_0(\omega_{m_2 l_2})} L_{k m_2}(\omega_{m_2 l_2}) \cos(\omega_{m_2 l_2} t_2 + \omega_{m_2 l_2} d_{k m_2}^L / v_a + \varphi_{m_2 l_2}) \right] \right\} = \\ \sum_{m_1=1}^n \sum_{m_2=1}^n \sum_{l_1=1}^N \sum_{l_2=1}^N 2\Delta\omega \sqrt{S_0(\omega_{m_1 l_1}) S_0(\omega_{m_2 l_2})} L_{j m_1}(\omega_{m_1 l_1}) L_{k m_2}(\omega_{m_2 l_2}) \times \\ E[\cos(\omega_{m_1 l_1} t_1 + \omega_{m_1 l_1} d_{j m_1}^L / v_a + \varphi_{m_1 l_1}) \cos(\omega_{m_2 l_2} t_2 + \omega_{m_2 l_2} d_{k m_2}^L / v_a + \varphi_{m_2 l_2})]. \quad (22)$$

由于  $\varphi_{m_l}$  是在  $[0, 2\pi]$  范围内相互独立且均匀分布的随机相位角, 它们满足以下关系式:

$$E[\cos(\omega_{m_1 l_1} t_1 + \omega_{m_1 l_1} d_{j m_1}^L / v_a + \varphi_{m_1 l_1}) \cos(\omega_{m_2 l_2} t_2 + \omega_{m_2 l_2} d_{k m_2}^L / v_a + \varphi_{m_2 l_2})] = 0, \\ m_1 \neq m_2 \text{ 或 } l_1 \neq l_2, \quad (23a)$$

$$E[\cos(\omega_{m_1 l_1} t_1 + \omega_{m_1 l_1} d_{j m_1}^L / v_a + \varphi_{m_1 l_1}) \cos(\omega_{m_2 l_2} t_2 + \omega_{m_2 l_2} d_{k m_2}^L / v_a + \varphi_{m_2 l_2})] = \\ \frac{1}{2} \cos[\omega_{m_1 l_1} (t_2 - t_1) - \omega_{m_1 l_1} d_{j k}^L / v_a], \quad m_1 = m_2 \text{ 和 } l_1 = l_2, \quad (23b)$$

考虑到式(7)和式(23), 式(22)可以进一步表示为

$$R_{jk}(t_1, t_2) = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^N \Delta\omega S_0(\omega_{ml}) L_{jm}(\omega_{ml}) L_{km}(\omega_{ml}) \cos[\omega_{ml}(t_2 - t_1) - \omega_{ml} d_{jk}^L / v_a]. \quad (24)$$

进一步可以表示为

$$R_{jk}(\tau) = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^N \Delta\omega S_0(\omega_{ml}) L_{jm}(\omega_{ml}) L_{km}(\omega_{ml}) \cos(\omega_{ml}\tau - \omega_{ml} d_{jk}^L / v_a). \quad (25)$$

当  $\Delta\omega \rightarrow 0$  或  $N \rightarrow +\infty$  时, 式(25)可表示为

$$R_{jk}(\tau) = \int_0^{\omega_u} \sum_{m=1}^n S_0(\omega) L_{jm}(\omega) L_{km}(\omega) \cos(\omega\tau - \omega d_{jk}^L / v_a) d\omega = \\ \int_0^{\omega_u} S_0(\omega) \rho_{jk}^0 \cos(\omega\tau - \omega d_{jk}^L / v_a) d\omega. \quad (26)$$

而由式(9b)可知

$$R_{jk}^0(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_0(\omega)}{2} \rho_{jk}^0(\omega) e^{i\omega(\tau - d_{jk}^L / v_a)} d\omega. \quad (27)$$

运用函数的奇偶性, 式(27)可化简为

$$R_{jk}^0(\tau) = \int_0^{+\infty} S_0(\omega) \rho_{jk}^0(\omega) \cos(\omega\tau - \omega d_{jk}^L / v_a) d\omega. \quad (28)$$

比较式(26)与式(28)可得

$$R_{jk}(\tau) = R_{jk}^0(\tau), \quad j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (29a)$$

由于  $R_{jk}(\tau)$  与  $S_{jk}(\omega)$  是满足 Wiener-Khintchine 关系的 Fourier 变化, 可得

$$S_{jk}(\omega) = S_{jk}^0(\omega), \quad j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (29b)$$

证明 3 当  $T = T_0$  时,  $\langle x_j'(t) \rangle = E[x_j^0(t)] = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  ( $\langle x_j'(t) \rangle$  时域内的平均值).

$$\langle x_j'(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T f_j'(t) dt =$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^N \sqrt{2\Delta\omega S_0(\omega_{ml})} L_{jm}(\omega_{ml}) \cos[\omega_{ml}t + \omega_{ml}d_{jm}^L/v_a + \varphi'_{ml}] dt, \quad (30)$$

上式中的积分函数是一个关于  $t$  的周期函数,且它们的周期为  $T_0$ ,而三角函数在整个周期内的积分为 0,所以可以得到

$$\langle x'_j(t) \rangle_T = E[x'_j(t)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (31)$$

**证明 4** 当  $T = T_0$  时,  $S'_{jk}(\omega) = S_0^0(\omega)$  ( $R'_{jk}(\tau) = R_{jk}^0(\tau)$ ),  $j, k = 1, 2, \dots, n$  ( $S'_{jk}(\omega)$  是时域内的自/互功率谱密度,  $R'_{jk}(\tau)$  是时域内的自/互相关函数).

$$\begin{aligned} R'_{jk}(\tau) &= \langle x'_j(t)x'_k(t+\tau) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T x'_j(t)x'_k(t+\tau) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T 2\Delta\omega \sum_{m_1=1}^n \sum_{m_2=1}^n \sum_{l_1=1}^N \sum_{l_2=1}^N \sqrt{S_0(\omega_{m_1l_1})S_0(\omega_{m_2l_2})} L_{jm_1}(\omega_{m_1l_1}) L_{km_2}(\omega_{m_2l_2}) \times \\ &= \frac{1}{T} \Delta\omega \sum_{m_1=1}^n \sum_{m_2=1}^n \sum_{l_1=1}^N \sum_{l_2=1}^N \sqrt{S_0(\omega_{m_1l_1})S_0(\omega_{m_2l_2})} L_{jm_1}(\omega_{m_1l_1}) L_{km_2}(\omega_{m_2l_2}) \times \\ &= \left\{ \int_0^T \cos[(\omega_{m_1l_1} + \omega_{m_2l_2})t + \omega_{m_2l_2}\tau + \omega_{m_1l_1}d_{jm_1}^L/v_a + \omega_{m_2l_2}d_{km_2}^L/v_a + \varphi'_{m_1l_1} + \varphi'_{m_2l_2}] dt + \int_0^T \cos[(\omega_{m_2l_2} - \omega_{m_1l_1})t + \omega_{m_2l_2}\tau + \omega_{m_1l_1}d_{jm_1}^L/v_a - \omega_{m_2l_2}d_{km_2}^L/v_a + \varphi'_{m_2l_2} - \varphi'_{m_1l_1}] dt \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

由于三角函数在整个周期中积分为 0,则可以得到

(i) 对于任意的  $l_1, l_2, m_1, m_2$  组合,下式均成立:

$$\int_0^T \cos[(\omega_{m_1l_1} + \omega_{m_2l_2})t + \omega_{m_2l_2}\tau + \omega_{m_1l_1}d_{jm_1}^L/v_a + \omega_{m_2l_2}d_{km_2}^L/v_a + \varphi'_{m_1l_1} + \varphi'_{m_2l_2}] dt = 0. \quad (33a)$$

(ii) 当  $l_1 \neq l_2$  或  $m_1 \neq m_2$  时

$$\int_0^T \cos[(\omega_{m_2l_2} - \omega_{m_1l_1})t + \omega_{m_2l_2}\tau + \omega_{m_2l_2}d_{km_2}^L/v_a - \omega_{m_1l_1}d_{jm_1}^L/v_a + \varphi'_{m_2l_2} - \varphi'_{m_1l_1}] dt = 0. \quad (33b)$$

考虑到式(7)和式(33),式(32)可表示为

$$\begin{aligned} R'_{jk}(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^N \Delta\omega S_0(\omega_{ml}) L_{jm}(\omega_{ml}) L_{km}(\omega_{ml}) \int_0^T \cos[\omega_{ml}\tau - \omega_{ml}d_{jk}^L/v_a] dt = \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^N \Delta\omega S_0(\omega_{ml}) L_{jm}(\omega_{ml}) L_{km}(\omega_{ml}) \cos[\omega_{ml}\tau - \omega_{ml}d_{jk}^L/v_a]. \end{aligned} \quad (34)$$

当  $\Delta\omega \rightarrow 0$  或  $N \rightarrow +\infty$  时,上式可表示为

$$\begin{aligned} R'_{jk}(\tau) &= \int_0^{\omega_u} \sum_{m=1}^n S_0(\omega) L_{jm}(\omega) L_{km}(\omega) \cos[\omega\tau - \omega d_{jk}^L/v_a] d\omega = \\ &= \int_0^{\omega_u} S_0(\omega) \rho_{jk}^0(\omega) \cos[\omega\tau - \omega d_{jk}^L/v_a] d\omega. \end{aligned} \quad (35)$$

比较式(28)与式(35)可得

$$R'_{jk}(\tau) = R_{jk}^0(\tau) \quad j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (36a)$$

同时根据式(9)中  $R_{jk}(\tau)$  与  $S_{jk}(\omega)$  的对应关系,可得



$$S'_{jk}(\omega) = S^0_{jk}(\omega), \quad j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (36b)$$

综合式(21)与式(31)可知,当取时域长度为一个周期的时间序列进行分析时,改进后的原型谱表示法的整体均值与时域内的均值相一致,即具有各态历经性,且均与目标值相同;同时根据式(29)与式(36)可知,当取时域长度为一个周期时间序列进行分析时,改进后的原型谱表示法的整体相关函数(功率谱)与时域内的相关函数(功率谱)相一致,即具有各态历经性,且均与目标值相同。

### 2.3 相干函数矩阵 Cholesky 分解的解析解

通过上述改进的谱表示法进行地震动空间场模拟时,尽管已经将对复数域内的功率谱矩阵的分解转化为对实数域内相干函数矩阵的分解,提高了模拟效率,然而,由于仍需对相干函数矩阵反复地在各个频率下进行 Cholesky 分解,所以模拟效率仍随着频率离散点或地震动模拟点的增加而大大增加。然而在实际应用中进行地震动场模拟时,各点间常常可以简化为等间距分布。对于这样的特殊情况, Yang 等<sup>[30-31]</sup>在风场模拟中就对其进行了研究,并给出了模拟点等间距分布时,功率谱矩阵 Cholesky 分解下三角矩阵中各元素的解析解。Cao 等<sup>[32]</sup>将该解析解用于各态历经风场模拟并运用了 FFT 方法。Li 等<sup>[33]</sup>利用上述解析解简化了大跨斜拉桥随机风场的模拟。

许多学者基于实际的台阵记录对地震动场的相干函数模型进行了研究,并提出了相应的相干函数模型,例如 Loh 和 Lin 模型<sup>[34]</sup>、Harichandran 和 Vanmarcke 模型<sup>[35]</sup>、Hao 等模型<sup>[2]</sup>、Feng 等模型<sup>[36]</sup>、Loh 和 Yeh 模型<sup>[37]</sup>等。在上述模型中,Loh 和 Lin 模型、Loh 和 Yeh 模型及 Feng 和 Hu 模型均是距离的指数函数,对于这种特殊的函数,其构成的相干函数矩阵 Cholesky 分解后的下三角矩阵中各元素的可以通过简单的解析式来表达,通过该表达式就可以直接求得 Cholesky 分解后的下三角矩阵中各元素的值,避免了重复而复杂的 Cholesky 分解,从而提高了计算效率。本文以 Loh 和 Lin 模型为例进行说明,该模型表示如下:

$$\rho_{jk}(d_{jk}, \omega) = e^{-(a+b\omega^2)|d_{jk}|}. \quad (37)$$

当模拟点之间是等间距分布,设间距为  $d$ , 则相干函数矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{\rho}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_d(\omega) & \rho_d^2(\omega) & \cdots & \rho_d^{n-1}(\omega) \\ \rho_d(\omega) & 1 & \rho_d(\omega) & \cdots & \rho_d^{n-2}(\omega) \\ \rho_d^2(\omega) & \rho_d(\omega) & 1 & \cdots & \rho_d^{n-3}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_d^{n-1}(\omega) & \rho_d^{n-2}(\omega) & \rho_d^{n-3}(\omega) & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (38)$$

其中

$$\rho_d(\omega) = e^{-(a+b\omega^2)d}. \quad (39)$$

则当对矩阵  $\boldsymbol{\rho}(\omega)$  进行 Cholesky 分解时,分解后的下三角矩阵  $\boldsymbol{L}(\omega)$  可以表示为

$$\boldsymbol{L}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \rho_d & \sqrt{1-\rho_d^2} & & & 0 \\ \rho_d^2 & \rho_d\sqrt{1-\rho_d^2} & \sqrt{1-\rho_d^2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \rho_d^{n-1} & \rho_d^{n-2}\sqrt{1-\rho_d^2} & \rho_d^{n-3}\sqrt{1-\rho_d^2} & \cdots & \sqrt{1-\rho_d^2} \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (40)$$

对于上述下三角矩阵中的各个元素可以用下式统一表示为

$$L_{jk}(\omega) = \begin{cases} 0, & 1 \leq j < k \leq n, \\ \rho_d^{j-k}(\omega), & k = 1; k \leq j \leq n, \\ \rho_d^{j-k}(\omega) \sqrt{1 - \rho_d^2(\omega)}, & 2 \leq k \leq j \leq n, \end{cases} \quad (41)$$

上式给出了实相干函数矩阵分解后的下三角矩阵中各元素的解析表达式,通过上述解析式可以直接求得在各频率下实相干函数矩阵 Cholesky 分解后各元素值,大大提高了对实相干函数矩阵进行 Cholesky 分解的计算效率,从而缩短了模拟时间.文献[30]指出了,当模拟点数较多时,使用该解析解可以将计算效率提高近一倍.

## 2.4 地震动的非平稳化

通过上述方法模拟的空间相关地震动是平稳的随机过程,而实际的地震动一般表现为非平稳特性.对地震动进行非平稳化时,主要有如下两种方法:1)将平稳的地震动乘以一个包络函数;2)采用相位差谱进行时频非平稳化.Deodatis<sup>[7]</sup>基于原型谱表示法采用乘以包络函数的方法来模拟非平稳的地震动,并给出了3种不同空间相关地震动非平稳化的实例.在实例1与实例2中以互功率谱矩阵为目标谱,分别乘以随时间变化及随时间与频率同时变化的包络函数来实现地震动的非平稳化.由于实际工程运用中常常以反应谱为目标谱,在实例3中Deodatis以反应谱为目标谱,通过迭代的算法来模拟空间相关的非平稳地震动.董汝博和周晶等<sup>[19-20]</sup>运用相位差谱来合成时频非平稳的地震动时程,并给出了已知相位差谱和未知相位差谱两种情况下的多点非平稳地震动的合成方法,该方法在国内相关研究中运用较广泛.本文改进的方法同样可以采用上述两种方法来实现地震动的非平稳化.下文的模拟实例中,将借鉴上述方法,在未知相位差谱的情况下,通过乘以包络函数来实现非平稳化(具体可参见文献[19-20]).

## 3 空间相关多点地震动的合成实例

为简化起见,本文选取了沿地震动传播方向上间距为100 m的空间4个点,其位置分布图如图2所示.

本文选取的自功率谱模型为 Clough 和 Penzien 模型<sup>[38]</sup>,该模型是基于 Kanai-Tajimi 自功率谱模型进行修正的加速度功率谱,其一般可以表示为

$$S(\omega) = \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \times \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} S_0, \quad (42)$$

其中,  $S_0$  表示基岩的白噪声强度,  $\omega_g$  和  $\xi_g$  反映第1个过滤层的土层特性,  $\omega_g$  为第1层的自振频率,  $\xi_g$  为第1层的阻尼比;  $\omega_f$  和  $\xi_f$  反映第2个过滤层的土层特性,  $\omega_f$  为第2层的自振频率,  $\xi_f$  为第2层的阻尼比.

Kiureghian 等<sup>[29]</sup>给出了不同土层条件下,上述自功率谱模型中各参数的取值,具体见表1.

本文中的自功率谱模型参数选取上表中所给的中性土的参数值(如表1黑体字部分),自动率谱模型中的参数  $S_0$  的取值为  $0.012 \text{ m}^2/\text{s}^3$ . 根据上述所选取的参数,本文的目标自功率谱

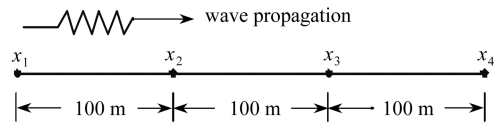


图2 地震动模拟点的空间分布图  
Fig. 2 Configuration of points location for simulation example

密度函数如图 3 所示。

表 1 自功率谱模型参数的选取

Table 1 Parameters of auto-spectral density function for different soil types

soil type	$\xi_g$	$\omega_g / (\text{rad/s})$	$\xi_f$	$\omega_f / (\text{rad/s})$
firm	0.6	15.0	0.6	1.5
Medium	<b>0.4</b>	<b>10.0</b>	<b>0.6</b>	<b>1.0</b>
soft	0.2	5.0	0.6	0.5

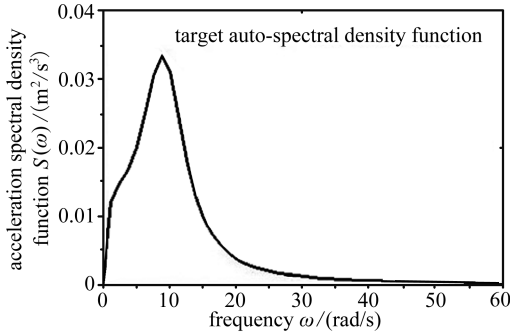


图 3 目标自功率谱密度函数

Fig. 3 Target auto-spectral density function (SDF) of acceleration

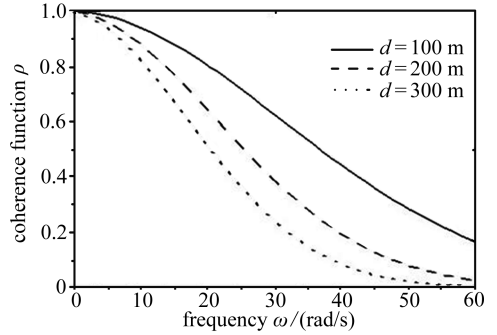


图 4 目标相干函数曲线

Fig. 4 Target incoherence function of ground motions

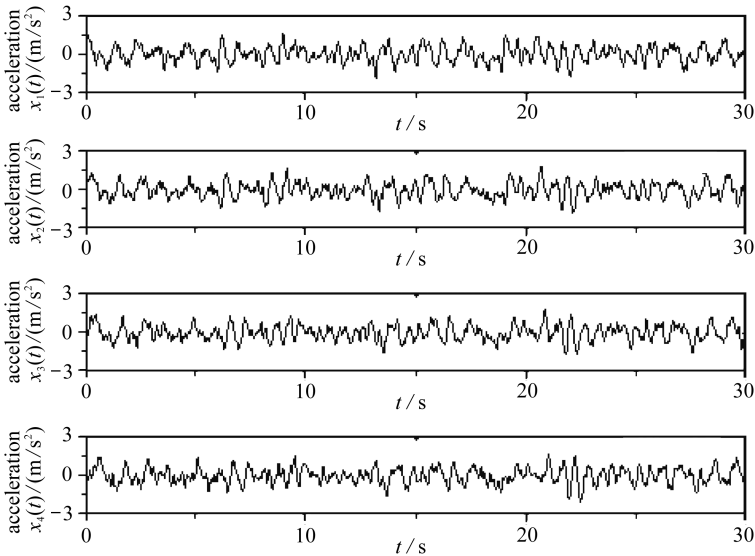


图 5 模拟的空间各点平稳地震动

Fig. 5 Generated stationary ground accelerations

本文选取的相干函数模型为 Loh 和 Lin 模型,该模型的具体表达式如式(37)所示,文献中基于 SMART-1 台阵 40 强震记录给出了该模型中参数的取值,本文中相干函数模型中参数的取值就选用其所给的值:  $a = 0.02$ ,  $b = 0.005$ 。根据该参数,相干函数在间距  $d$  分别为 100 m, 200 m, 300 m 时的函数图像如图 4 所示。

此外,本文选取的视波速  $v_a = 600 \text{ m/s}$ 。

基于上述的自功率谱模型与相干函数模型,并生成一组  $(0, 2\pi)$  均匀分布的随机数,就可

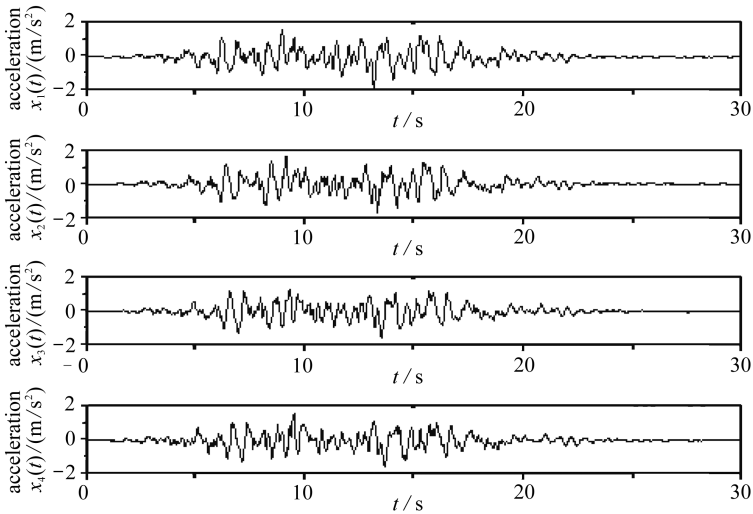


图6 模拟的空间各点非平稳地震动

Fig. 6 Generated non-stationary ground accelerations

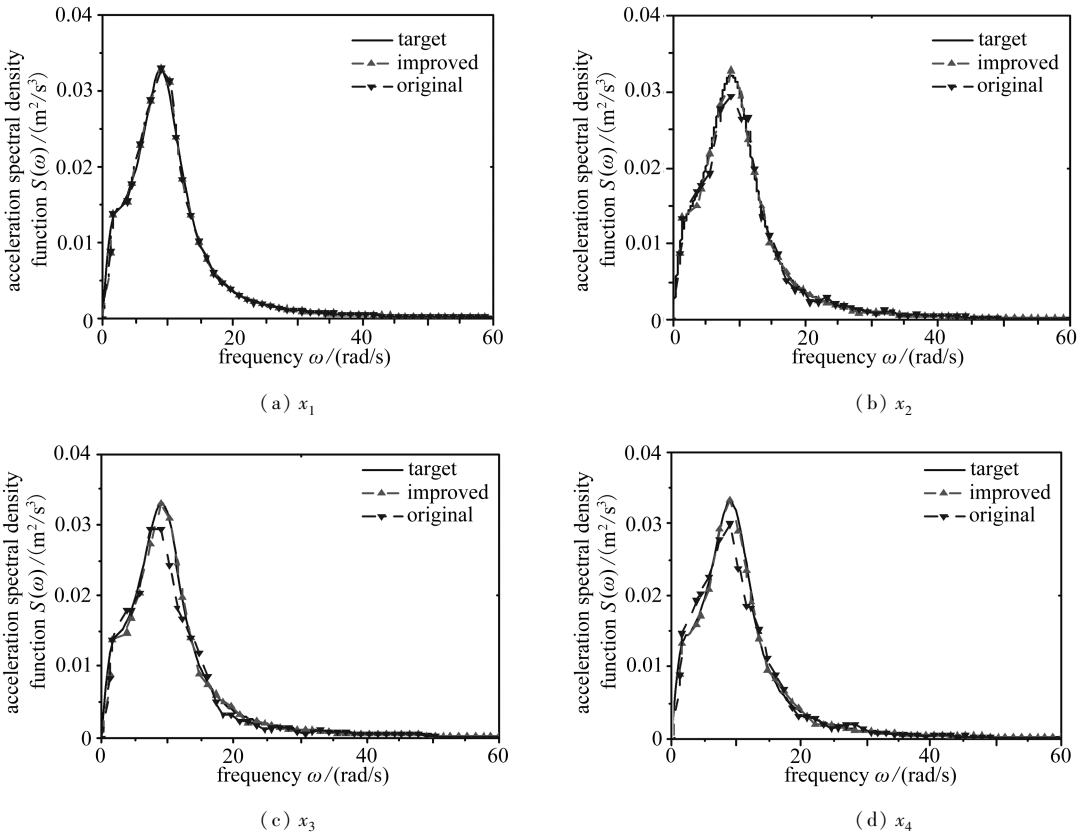


图7 各模拟点地震动时程的自功率谱

Fig. 7 Comparison between target auto-sdf and auto-sdf of generated ground motions

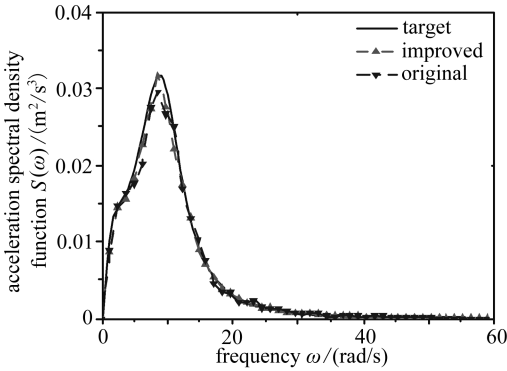
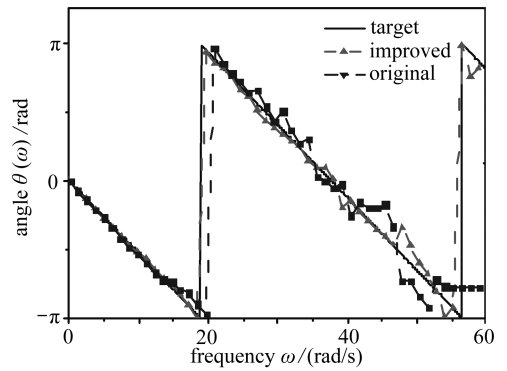
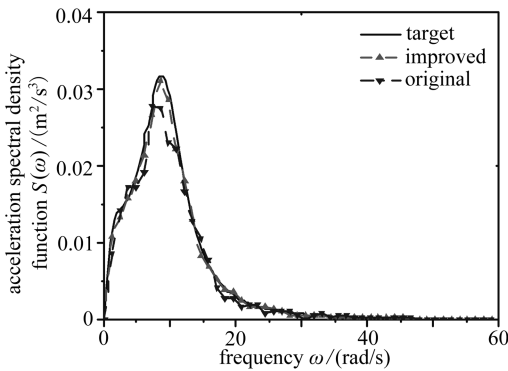
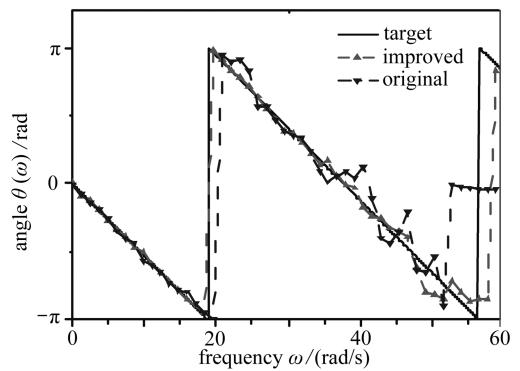
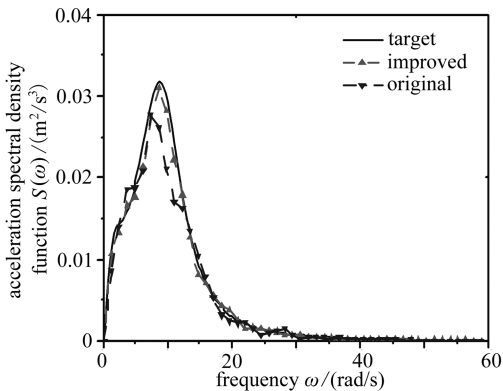
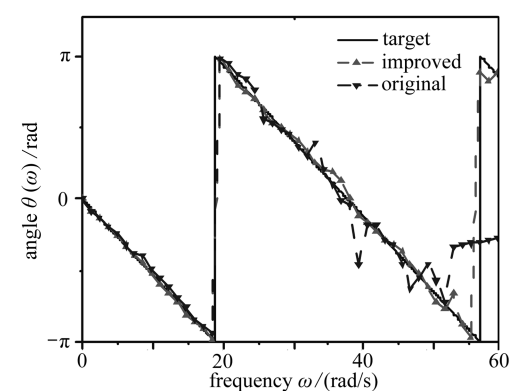
以按照式(15)模拟各个点地震动时程。本文所模拟的随机平稳地震动时程如图5所示,对平稳地震动进行非平稳化后的地震动如图6所示。

由于对地震动进行非平稳化以后常常会对各点地震动间的相关性产生影响,因此,为了能

更好说明本文改进的方法所模拟的地震动相关性与目标值能更好的相一致,下文则对所模拟的平稳地震动过程进行频域内的谱分析。

以下通过对所生成的空间 4 个点的随机地震动时程在频域内进行谱分析(谱估计均采用平均周期图法),并与改进前的同条件下模拟的地震动相比较,以说明改进后方法的模拟效果:

1) 通过将所模拟的各点随机地震动的自功率谱与目标自功率谱进行比较,如图 7 所示,可见改进后方法的各点地震动的自功率谱均于目标自功率谱吻合较好,且改进后方法所模拟的各点地震动(除第 1 点  $x_1$  的地震动外)的自功率谱与改进前相比更好地与目标自功率谱相

(a1)  $x_1, x_2$ (a2)  $x_1, x_2$ (b1)  $x_2, x_3$ (b2)  $x_2, x_3$ (c1)  $x_3, x_4$ (c2)  $x_3, x_4$

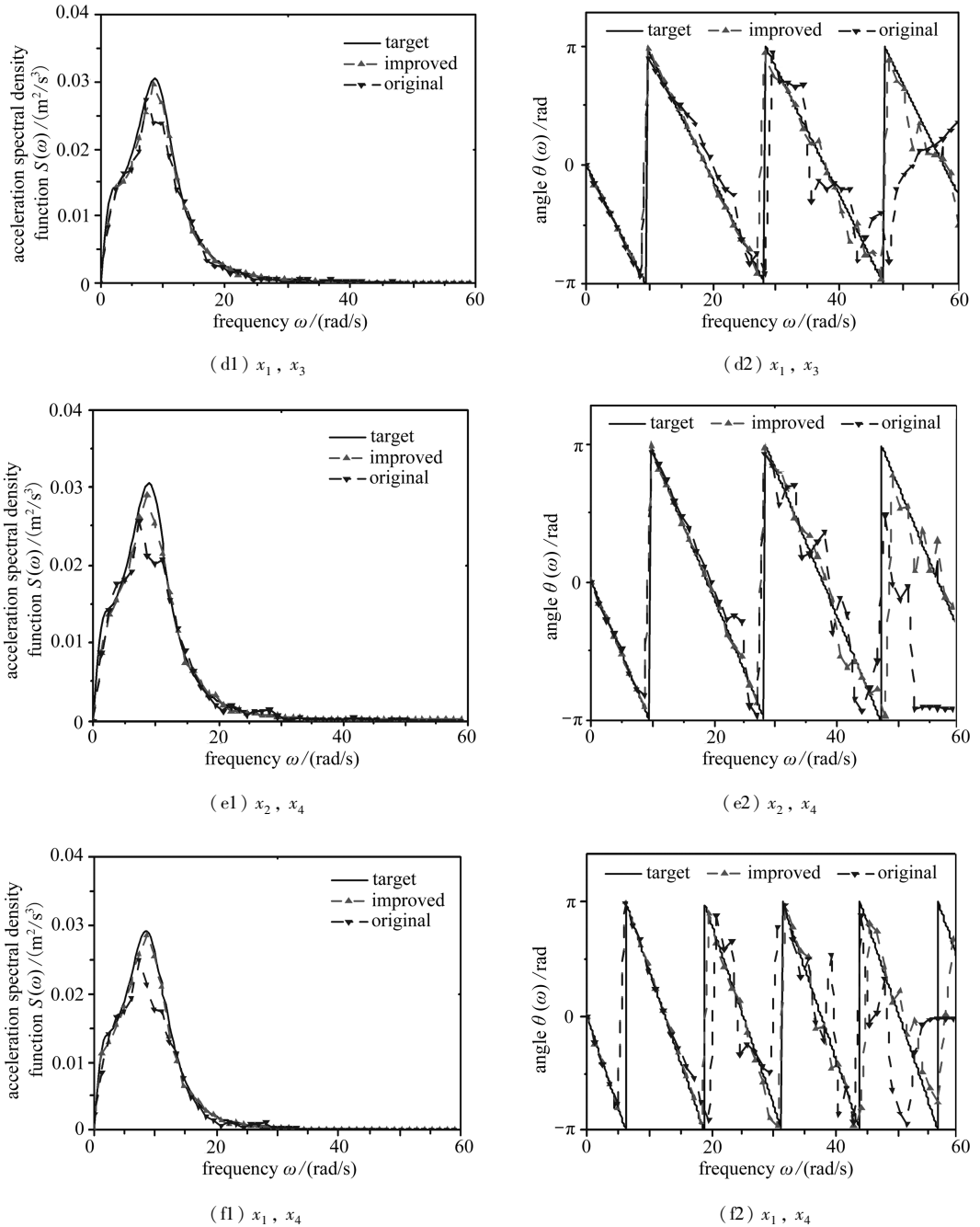


图8 各模拟点之间的的互功率谱

Fig.8 Comparison between Target Cross-SDF and Cross-SDF of Generated ground motions

一致。对于第1点  $x_1$  的地震动由于改进前后其合成公式未发生变化,所以改进前后第1点地震的自功率谱是一致的。

2) 通过将所模拟的任意两点的地震动的互功率谱与目标互功率谱进行比较,由于互功率谱为复数,为较好地对比互功率谱进行考察,本文对复数的幅值(模)与幅角分别进行了比较,如图8所示,可见改进后方法的任意两点的互功率谱均与目标互功率谱吻合较好,且改进后方法所模拟的各点地震动的互功率谱与改进前相比更好地与目标互功率谱相一致。



## 4 结 论

本文的研究基于在震动场模拟中较广泛应用的原型谱表示法,首先给出了其合成公式中体现各点之间相干性的相位角的具体表达式,从而将对复功率谱密度矩阵的分解转化为实相干函数矩阵的分解,使 Cholesky 分解得以在实数域内进行,并同时引入双索引频率到震动空间场的模拟公式中,以使得所模拟的震动场有较好的各态历经性。为了说明改进后的震动空间场模拟公式的各态历经性,本文分别从理论上证明了当所模拟的震动时间序列长度取一个周期时,改进后公式的均值与功率谱密度函数均具有各态历经性。此外,本文还给出一个简单的具体模拟实例,并通过对所模拟的震动进行频域内的谱分析,以说明改进后的模拟公式所模拟的震动的自功率谱和互功率谱与原型谱表示法相比,更加与目标谱相一致,且具有较好的各态历经性。

由于实际震动场模拟时,常常可将各点看作为等间距分布的,因此本文基于已有的空间震动场的相干函数模型,给出了当地震动场模拟点等间距分布时,相干函数矩阵 Cholesky 分解后下三角矩阵中各元素的解析解,利用该解析解可以避免反复地在各频率下对相干函数矩阵进行 Cholesky 分解,而只需用该解析解进行直接求解,大大减小了因 Cholesky 分解带来的较大的计算量,从而进一步提高了震动场模拟的效率,简化了模拟模型。

### 参考文献:

- [1] Shinozuka M, Deodatis G. Stochastic process models for earthquake ground motion[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1988, **3**(3):114-123.
- [2] Hao H, Oliveira C S, Penzien J. Multiple-station ground motion processing and simulation based on SMART-1 array data[J]. *Nuclear Engineering and Design*, 1989, **111**(3):293-310.
- [3] LI You-sun, Kareem A. Simulation of multivariate nonstationary random processes by FFT[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1991, **117**(5):1037-1058.
- [4] Zerva A. Seismic ground motion simulations from a class of spatial variability models[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1992, **21**(4):351-361.
- [5] Ramadan O, Novak M. Simulation of spatially incoherent random ground motions[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1993, **119**(5):997-1016.
- [6] Ramadan O, Novak M. Simulation of multidimensional, anisotropic ground motions[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1994, **120**(8):1173-1785.
- [7] Deodatis George. Non-stationary stochastic vector processes; seismic ground motion applications[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1996, **11**(3):149-168.
- [8] Shrikhande M, Gupta Vinay K. Synthesizing ensembles of spatially correlated accelerograms[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1998, **124**(11):1185-1192.
- [9] Paola M Di, Zingales M. Digital simulation of multivariate earthquake ground motions[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2000, **17**(2):1011-1027.
- [10] Jankowski R, Wilde K. A simple method of conditional random field simulation of ground motions for long structures[J]. *Engineering Structures*, 2000, **22**(5):552-561.
- [11] Shama A A. Simplified procedure for simulating spatially correlated earthquake ground motions[J]. *Engineering Structures*, 2007, **29**(2):248-258.

- [12] 屈铁军,王前信. 空间相关的多点地震动合成(I)基本公式[J]. 地震工程与工程振动, 1998, **18**(1):8-15. (QU Tie-jun, WANG Qian-xin. Simulation of spatially correlative time histories of multi point ground motion part I: fundamental formulas[J]. *Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1998, **18**(1): 8-15. (in Chinese))
- [13] 屈铁军,王前信. 空间相关的多点地震动合成(II)合成实例[J]. 地震工程与工程振动, 1998, **18**(2):25-32. (QU Tie-jun, WANG Qian-xin. Simulation of spatially correlative time histories of multi point ground motion part II: application of fundamental formulas[J]. *Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1998, **18**(2): 25-32. (in Chinese))
- [14] 夏友柏,王年桥,张尚根. 一种合成多点地震动时程的方法[J]. 世界地震工程, 2002, **18**(1): 119-122. (XIA You-bo, WANG Nian-qiao, ZHANG Shang-gen. A simulation method for spatial correlative time histories of multi-point ground motion[J]. *World Information on Earthquake Engineering*, 2002, **18**(1): 119-122. (in Chinese))
- [15] 刘先明,叶继红,李爱群. 空间相关多点地震动合成的简化方法[J]. 工程抗震, 2003, (1):30-36. (LIU Xian-ming, YE Ji-hong, LI Ai-qun. A simplified method for the simulation of the time histories of spatial correlative multi-point ground motion[J]. *Earthquake Resistant Engineering*, 2003, (1): 30-36. (in Chinese))
- [16] 梁建文. 非平稳地震动过程模拟方法(I)[J]. 地震学报, 2005, **27**(2):213-228. (LIANG Jian-wen. Simulation of non-stationary ground motion processes(I)[J]. *Acta Seismologica Sinica*, 2005, **27**(2): 213-228. (in Chinese))
- [17] 梁建文. 非平稳地震动过程模拟方法(II)[J]. 地震学报, 2005, **27**(3): 346-351. (LIANG Jian-wen. Simulation of non-stationary ground motion processes(II)[J]. *Acta Seismologica Sinica*, 2005, **27**(3): 346-351. (in Chinese))
- [18] 胡亮,李黎,樊剑. 基于特征正交分解的空间变异地震动模拟[J]. 西南交通大学学报, 2006, **41**(6): 685-689. (HU Liang, LI Li, FAN Jian. Proper orthogonal decomposition-based simulation of spatially correlated seismic ground motions[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2006, **41**(6): 685-689. (in Chinese))
- [19] 董汝博,周晶,冯新. 一种考虑局部场地收敛性的多点地震动合成方法[J]. 振动与冲击, 2007, **26**(4):5-9. (DONG Ru-bo, ZHOU Jing, FENG Xin. Simulation of non-stationary spatially correlative time histories of multi-point ground motion [J]. *Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2007, **26**(4): 5-9. (in Chinese))
- [20] 董汝博,周晶,冯新. 非平稳空间相关多点地震动合成方法研究[J]. 地震工程与工程振动, 2007, **27**(3):10-14. (DONG Ru-bo, ZHOU Jing, FENG Xin. A local convergent method for simulation multi-point earthquake ground motion[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, **27**(3): 10-14. (in Chinese))
- [21] 全伟,李宏男. 基于小波变换的拟合规范反应谱多维地震动模拟[J]. 地震工程与工程振动, 2007, **27**(4):103-108. (QUAN Wei, LI Hong-nan. Generation of spectrum-compatible multi-dimensional ground motions via wavelet transform[J]. *Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2007, **27**(4): 103-108. (in Chinese))
- [22] Shinozuka M. Simulation of multivariate and multidimensional random processes[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1971, **49**(1):357-368.
- [23] Shinozuka M. Digital simulation of random processes and its applications[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1972, **25**(1):111-128.

- [24] Yang J N. Simulation of random envelope processes[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1972, **21**(1):73-85.
- [25] Vaicaitis R, Takeno M, Shinozuka M. Response analysis of tall buildings to wind loadings [J]. *Journal of Structure Engineering, ASCE*, 1975, **101**(3):585-600.
- [26] Shinozuka M, Ynu C B, Seya H. Stochastic methods in wind engineering[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1990, **36**(1/3):829-843.
- [27] Shinozuka M, Deodatis G. Simulation of stochastic processes by spectral representation[J]. *Applied Mechanics Review*, 1991, **44**(4):191-204.
- [28] Deodatis G. Simulation of ergodic multivariate stochastic processes[J]. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1996, **122**(8):778-787.
- [29] Der Kiureghian A, Keshishian P, Hakobian A. Multiple support response spectrum analysis of bridges including the site-response effect and the MSRS code [R]. Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, 1997.
- [30] Yang W W, Chang T Y P, Chang C C. An efficient wind field simulation technique for bridges [J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1997, **19**(67/68):697-708.
- [31] Yang W W, Chang T Y P, Chang C C. Numerical simulation of turbulent fluctuations along the axis of a bridge[J]. *Engineering Structures*, 1998, **20**(9):837-848.
- [32] Cao Y H, Xiang H F, Zhou Y. Simulation of stochastic wind velocity field on long-span bridges[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2000, **126**(1):1-6.
- [33] Li Y L, Liao H L, Qiang S Z. Simplifying the simulation of stochastic wind velocity field for long cable-stayed bridges[J]. *Computes and Structures*, 2004, **82**(20/21):1591-1598.
- [34] Loh C H, Lin S G. Directionality and simulation in spatial variation of seismic waves[J]. *Engineering Structures*, 1990, **12**(2):134-143.
- [35] Harichandran R S, Vanmarcke Erik H. Stochastic variation of earthquake ground motion in space and time[J]. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1986, **112**(2):154-174.
- [36] Feng Q M, Hu Y X. Spatial correlation of earthquake motion and its effect on structural response[C]//Proc of US-PRC, *Bilateral Workshop on Earthquake Engineering*. Vol **1**, A-5, Beijing: 1982.
- [37] Loh C H, Yeh Y T. Spatial variation and stochastic modeling of seismic differential ground movement[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1988, **16**(5):583-596.
- [38] Clough R W, Penzien J. *Dynamics of Structures*[M]. 2nd ed. Singapore: McGraw Hill, Inc, 1993.

# Simplified Method for the Simulation of Ergodic Spatially Correlated Seismic Ground Motions

GAO Yu-feng<sup>1,2</sup>, WU Yong-xin<sup>1,2</sup>, LI Bing<sup>3</sup>

- (1. *Key Laboratory of Ministry for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China;*
2. *Geotechnical Research Institute, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China;*
3. *College of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, P. R. China)*

**Abstract:** A simplified method for the simulation of ergodic spatially correlated seismic ground motions was proposed, based on the commonly used original spectral representation method. Firstly, the phase angles, to represent the correlation among ground motions, were given by explicit items with a clear physical. By using these explicit items, computational efficiency can be increased by changing the decomposition of complex cross-spectral matrix into the decomposition of real incoherence coefficient matrix. Double-indexing frequencies were introduced to simulate ergodic seismic ground motions, and the ergodic feature of the improved method was demonstrated theoretically. Subsequently, an explicit solution of the elements of the lower triangular matrix under Cholesky decomposition was given. By using this explicit solution, the improved method had been simplified, and the computational efficiency can be increased greatly, by avoiding repetitive Cholesky decomposition of cross-spectral matrix in every frequency step. At last, a numerical example was employed to illustrate the good character of the improved method.

**Key words:** seismic ground motions; original spectral representation; ergodic; double-indexing frequency; incoherency coefficient matrix; analytical solution