

热传导对流问题的自适应最小二乘 Galerkin/Petrov 混合有限元法*

张运章^{1,2}, 侯延仁¹, 魏红波¹

(1. 西安交通大学 理学院, 西安 710049;
2. 河南科技大学 数学与统计学院, 河南 洛阳 471003)

摘要: 对热传导对流问题提出了自适应 Galerkin/Petrov 最小二乘混合有限元法. 该算法对任何速度和压力有限元空间的组合是相容和稳定的(不需要满足 Babuška-Brezzi 稳定性条件). 利用 Verfürth 的一般理论, 得到了热传导对流问题的残量型的后验误差估计. 最后通过几个数值算例验证了方法的有效性.

关键词: 热传导对流问题; 后验误差分析; 混合有限元; 自适应有限元; 最小二乘 Galerkin/Petrov 法

中图分类号: O175; O24 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.10.005

引 言

设 $\Omega \subset R^2$ 是有界连通多边形区域, 其边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的. 定常的热传导对流问题是由不可压粘性流和热传导方程耦合的, 是对定常 Navier-Stokes 方程的 Boussinesq 逼近.

求 $\mathbf{u} = (u_1, u_2), p, T$ 满足

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \lambda \mathbf{j} T, & x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & x \in \Omega, \\ -\Delta T + \lambda \mathbf{u} \cdot \nabla T = 0, & x \in \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, T = T_0, & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

其中, \mathbf{u} 是流体的速度向量, p 是压力, T 是温度, $\lambda > 0$ 是 Groshoff 数, $\mathbf{j} = (0, 1)$ 是二维向量, $\nu > 0$ 是运动粘性系数.

用混合有限元法求解热传导对流问题时, 一个重要的收敛稳定性条件就是压力和速度的有限元子空间之间的组合要满足 Babuška-Brezzi 不等式(离散 LBB 条件). 如果违反了离散 LBB 条件, 数值试验就会出现非物理的压力震荡. 然而一些不满足离散 LBB 条件的混合有限元序对, 在许多场合却是有吸引力的和有用的. 特别地, 由于低阶等阶混合有限元在并行处理

* 收稿日期: 2011-02-21; 修订日期: 2011-06-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871156; 11171269)

作者简介: 张运章(1974—), 男, 河南浚县人, 讲师, 博士(E-mail: yzzmath@gmail.com);
侯延仁(1969—), 男, 陕西延安人, 教授, 博士生导师(联系人, E-mail: yrhou@mail.xjtu.edu.cn).

和多层网格计算的方便性,低阶等阶混合有限元在实际科学计算中非常重要.因此,大量的工作来稳定化最低阶等阶有限元序对.例如最近提出了最小二乘 Galerkin/Petrov 有限元法^[1-3],其目的是为了解脱离散 LBB 条件的约束,该方法是从 SD(或 SUPG)方法派生出来的^[4-5],对速度和压力有限元空间的任意组合是一致的和稳定的(不需要满足 Babuška-Brezzi 稳定性条件).罗振东和卢秀敏等^[6-8]用最小二乘 Galerkin/Petrov 有限元方法研究了热传导对流问题,并得到最优阶的先验误差估计.许多科学工作者致力于热传导对流问题的高效数值格式的研究(如文献[9-15]).

对于解具有奇异性或在局部区域解剧烈变化的问题,自适应方法可以产生高效的离散网格.后验误差估计子是构造自适应算法的关键因素^[16-17].目前对线性和非线性变分问题以及标准 Galerkin 和混合有限元方法的后验误差估计子有大量的研究,例如文献[15,18-28].Verfürth^[23,25]提出了非线性问题后验误差估计的抽象框架.我们也可以在文献[15,22,26-27]发现这个一般理论的应用.

本文将利用 Verfürth^[23,25]的一般理论,对热传导对流问题的最小二乘 Galerkin/Petrov 有限元法进行后验误差估计.我们期望基于这个高效误差估计子的自适应算法能够使得数值模拟更加有效.事实上,本文的工作证实了这一点.我们得到了热传导对流问题最小二乘 Galerkin/Petrov 有限元法的残量型后验误差估计.最后通过 3 个数值算例展示了算法的有效性.前两个数值算例是有真解的例子,第 3 个数值算例是模型例子.由于用最小二乘 Galerkin/Petrov 混合有限元法求解热传导对流问题时,速度和压力有限元子空间之间不需要满足离散 LBB 条件,本文选取两类有限元序对来实现这些数值算例.一类是用有限元序对 $P_1-P_1-P_1$ 元来逼近 (\mathbf{u}, p, T) 空间,另一类是用有限元序对 $P_2-P_1-P_2$ 元来逼近 (\mathbf{u}, p, T) 空间.选用这两类有限元序对求解热传导对流问题时得到的数值结论与理论分析是一致的.数值计算结果表明用稳定化的自适应有限元方法求解热传导对流问题时,可以节省大量的计算量.

自适应有限元算法的详细描述,后验误差分析以及数值算例将在论文的后面各节一一给出.第 1 节,我们介绍了一些函数空间以及回顾了一些预备知识.同时,我们也给出了最小二乘 Galerkin/Petrov 混合有限元法求解热传导对流问题的数值计算格式和先验估计结论.第 2 节,利用 Verfürth^[23,25]的抽象理论,我们得到了热传导对流问题的后验误差估计.第 3 节,给出了一些数值算例验证了自适应算法的有效性.最后对本文的研究工作进行总结,并展望了下一步的研究计划.

1 函数空间和有限元逼近技巧

为了介绍热传导对流问题(1)的数学理论,我们引进下面的 Hilbert 空间:

速度空间

$$M = H^1(\Omega)^2 = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2; \mathbf{v} = \mathbf{0}, \text{在 } \Gamma \text{ 上}\};$$

压力空间

$$Q = L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega), (p, 1)_\Omega = 0\};$$

温度空间

$$W = H^1(\Omega), W_0 = H_0^1(\Omega).$$

函数空间 $L^2(\Omega)^d, d = 1, 2, 2 \times 2$, 配备通常的 L^2 -内积 (\cdot, \cdot) 和 L^2 -范数 $\|\cdot\|_{L^2}$ 或 $\|\cdot\|_0$. W_0 和 M 这两个函数空间配备通常的内积 $((u, v))$ 和等价范数 $\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2} = \|\nabla u\|_0$.

对于问题(1),首先回顾一些假设条件(见文献[12,29-32]).

(A₁) 存在仅与 Ω 有关的常数 C_0 , 使得

$$(i) \|u\|_0 \leq C_0 \|\nabla u\|_0, \|u\|_{0,4} \leq C_0 \|\nabla u\|_0, \forall u \in H_0^1(\Omega)^2 (\text{或 } H_0^1(\Omega));$$

$$(ii) \|u\|_{0,4} \leq C_0 \|u\|_1, \forall u \in H^1(\Omega)^2 (\text{或 } H_0^1(\Omega));$$

$$(iii) \|u\|_{0,4} \leq 2^{1/2} \|\nabla u\|_0^{1/2} \|u\|_0^{1/2}, \forall u \in H_0^1(\Omega)^2 (\text{或 } H_0^1(\Omega)).$$

(A₂) 设边界 $\partial\Omega \in C^{k,\alpha} (k \geq 0, \alpha > 0)$, 则对于 $\tilde{T}_0 \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$, 必定存在 $T_0 \in C_0^{k,\alpha}(R^2)$ 的拓广(为了简单起见, 仍然记作 T_0), 使得

$$\|T_0\|_{k,q} \leq \varepsilon, \quad k \geq 0, 1 \leq q \leq \infty,$$

这里常数 ε 是可以选择的任意小的正数.

(A₃) 对于任意的 $u \in M, v, w \in M$ (或 $T, \varphi \in H_0^1(\Omega)$), 都有

$$|b(u, v, w)| \leq N \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 \|\nabla w\|_0,$$

$$|\bar{b}(u, T, \varphi)| \leq \bar{N} \|\nabla u\|_0 \|\nabla T\|_0 \|\nabla \varphi\|_0,$$

其中

$$b(u, v, w) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^2 u_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} w_k dx - \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^2 u_i \frac{\partial w_k}{\partial x_i} v_k dx \right], \quad \forall u, v, w \in M,$$

$$\bar{b}(u, T, \varphi) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \varphi dx - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} T dx \right], \quad \forall u \in M, T, \varphi \in W_0,$$

$$N = \sup_{u,v,w \in M} |b(u, v, w)| / (\|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 \|\nabla w\|_0),$$

$$\bar{N} = \sup_{u \in M, (T, \varphi) \in W \times W} |\bar{b}(u, T, \varphi)| / (\|\nabla u\|_0 \|\nabla T\|_0 \|\nabla \varphi\|_0).$$

假设(A₁) ~ (A₃)成立, 罗振东等^[6,12]证明了问题(1)有唯一解 $(u, p, T) \in M \times Q \times W$, 并且满足

$$\|\nabla u\|_0 \leq A, \quad \|\nabla T\|_0 \leq B,$$

其中, $A = 2\nu^{-1}\lambda(3C_0 + 1)\|T_0\|_1, B = 2\|\nabla T_0\|_0 + C_0^{-2}(3C_0 + 1)\|T_0\|_1$.

设 Ω_h 是区域 Ω 的一致正规三角形剖分, 定义网格参数 $h = \max_{K \in \Omega_h} \{h_K; h_K = \text{diam}(K)\}$. 我们假设剖分 Ω_h 满足下面的条件(更详细的介绍, 见文献[32]):

(I) 剖分 Ω_h 的任何两个不同三角形单元的交集为空, 或交集是两个单元边界的光滑子流形;

(II) $h_K/\varrho_K < \varrho$ 的比存在一个与网格单元 $K \in \Omega_h$ 和 $h > 0$ 无关的上界 ϱ .

这里, ϱ_K 和 h_K 分别表示单元 K 内切球的直径和单元 K 的最大边长. 注意到条件(II)允许网格局部加密, 以及对任意的单元 $K \in \Omega_h$ 和单元 K 所有的边 E , 存在着与网格参数 h , 单元 K 和边 E 都无关的两个常数使得 h_K/ϱ_K 被其上下控制.

我们引进下列有限元子空间 $M_h \subset M, Q_h \subset Q, W_h \subset W, W_{0h} \subset W_0$:

$$M_h = \{v \in M \cap C^0(\Omega)^2; v|_K \in P_l(K)^2, \forall K \in \Omega_h\},$$

$$Q_h = \{q \in Q \cap C^0(\Omega); q|_K \in P_k(K); \forall K \in \Omega_h\},$$

$$W_h = \{t \in W \cap C^0(\Omega); t|_K \in P_m(K), \forall K \in \Omega_h\},$$

$$W_{0h} = W_h \cap H_0^1,$$

这里 $P_r(K)$ 表示单元 $K \in \Omega_h$ 上次数小于等于 r 的多项式空间.

则最小二乘 Galerkin/Petrov 混合有限元法求解热传导对流问题的离散格式如下:

求解 $(u_h, p_h, T_h) \in M_h \times Q_h \times W_h$ 使得 $T_h|_{\Gamma} = T_0$, 都有

$$\left\{ \begin{aligned} & \nu a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - (p_h, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (q, \operatorname{div} \mathbf{u}_h) + \\ & \sum_{K \in \Omega_h} \delta_K (-\nu \Delta \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \nabla p_h, -\nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla q)_K = \\ & \lambda (\mathbf{j}T_h, \mathbf{v}) + \lambda \sum_{K \in \Omega_h} \delta_K (\mathbf{j}T_h, -\nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla q)_K, \\ & \bar{a}(T_h, S) + \lambda \bar{b}(\mathbf{u}_h, T_h, S) = 0, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

对于 $\forall (\mathbf{v}, q, S) \in M_h \times Q_h \times W_{0h}$ 成立, 这里, $\delta_K = \alpha h_K^2, \alpha > 0, a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}), \bar{a}(T, S) = (\nabla T, \nabla S)$.

我们注意到, 如果选取参数 $\delta_K = \alpha h_K^2 = 0$, 则最小二乘 Galerkin/Petrov 混合有限元法离散格式(2)就退化为标准有限元(满足离散 LBB 条件)离散格式.

定理 1^[6,12] 假设 $(A_1) \sim (A_3)$ 成立. 如果 $AN + C_0^2 \lambda^2 (1 + 16B^2 \bar{N}^2) < 1$ 成立, 且问题(1)的真解 $(\mathbf{u}, p, T) \in (W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap H^{l+1}(\Omega))^2 \times H^{k+1}(\Omega) \times H^{m+1}(\Omega)$, 则对问题(2)的数值解 (\mathbf{u}_h, p_h, T_h) , 存在一个常数 $h^* > 0$, 使得对于任意的 $h \leq h^*$, 都有如下的先验误差估计:

$$\begin{aligned} & \|\delta^{1/2}(-\nu \Delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{u}_h \cdot \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \nabla(p - p_h))\|_{0,h} + \\ & [\nu \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1^2 + \|\nabla(T - T_h)\|_0^2]^{1/2} \leq \\ & C(h^m + h^l + h^{k+1}), \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\delta|_K = \delta_K, \forall K \in \Omega_h, C$ 是一个不依赖于 h 的常数, 离散范数

$$\|\cdot\|_{0,h} = \left(\sum_K \|\cdot\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}.$$

下面, 问题(1)和问题(2)将被表示成抽象形式.

定义

$$X = M \times Q \times W, Y = M \times Q \times W_0,$$

$$\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_Y = \{ \|\cdot\|_{1,2}^2 + \|\cdot\|_{0,2}^2 + \|\cdot\|_{1,2}^2 \}^{1/2}.$$

定义算子 $F: X \rightarrow L(Y, \mathbf{R})$ 如下:

$$\begin{aligned} \langle F(\mathbf{u}, p, T), (\mathbf{v}, q, S) \rangle = & \int_{\Omega} (\nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u} - \lambda \mathbf{j}T \cdot \mathbf{v}) dx + \\ & \int_{\Omega} (\nabla T \cdot \nabla S + \lambda \mathbf{u} \cdot \nabla T S) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

现在, 问题(1)的求解就转化为求抽象形式的

$$F(\mathbf{u}, p, T) = 0, \quad (5)$$

连同相应的边界条件的解.

根据有限元空间 (M_h, Q_h, W_h, W_{0h}) 的定义, 定义有限元乘积空间

$$X_h = M_h \times Q_h \times W_h, Y_h = M_h \times Q_h \times W_{0h}$$

和连续算子 F 的有限元离散形式如下:

$$\begin{aligned} \langle F_h(\mathbf{u}_h, p_h, T_h), (\mathbf{v}_h, q_h, S_h) \rangle = & \langle F(\mathbf{u}_h, p_h, T_h), (\mathbf{v}_h, q_h, S_h) \rangle + \\ & \sum_{K \in \Omega_h} \delta_K (-\nu \Delta \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \lambda \mathbf{j}T_h, -\nu \Delta \mathbf{v}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_K. \end{aligned} \quad (6)$$

因此, 离散问题(2)的求解就转化为求解

$$F_h(\mathbf{u}_h, p_h, T_h) = 0. \quad (7)$$

当网格尺寸越来越小时,虽然先验误差分析可以提供有限元方法的收敛性保证,要实现有限元逼近的自适应算法,就需要一个后验误差估计子.本文选用残量型的后验误差估计子,并且将在下一节进行理论推导.

2 后验误差估计

本节将得到问题(2)的残量型的后验误差估计子.首先介绍 Verfürth^[23,25]的后验误差估计抽象理论.

设 $\tilde{u}_* = (u_*, p_*, T_*)$ 是非线性算子方程 $F(\tilde{u}_*) = 0$ 的解.如果 F 在 \tilde{u}_* 的 Fréchet 导数 $DF(\tilde{u}_*)$ 是适定的,并且是线性同胚映射,则称 \tilde{u}_* 是 F 的正则解;也就是说,算子 $DF(\tilde{u}_*)$ 和它的逆算子是双射的,并且是连续线性算子.从文献[23,25]可知,有如下的抽象结论成立.

定理 2^[23,25] 设 $Y^* = L(Y, \mathcal{R})$ 和 $F \in C^1(X, Y^*)$. 设 \tilde{u}_* 是 $F(u_*) = 0$ 的正则解,并且记 $Z = \|DF(\tilde{u}_*)\|_{L(Y, Y^*)}$ 和 $\hat{Z} = \|DF(\tilde{u}_*)^{-1}\|_{L(Y^*, Y)}$. 另外假设 DF 在 \tilde{u}_* 关于常数 $\gamma > 0$ 是 Lipschitz 连续的,即存在一个常数 $R_0 > 0$ 使得

$$\gamma = \sup_{\|\tilde{u} - \tilde{u}_*\|_X < R_0} \frac{\|DF(\tilde{u}) - DF(\tilde{u}_*)\|_{L(Y, Y^*)}}{\|\tilde{u} - \tilde{u}_*\|_X} < \infty$$

成立,定义常数 R^* 如下:

$$R^* = \min \{ R_0, \gamma^{-1} \hat{Z}^{-1}, 2\gamma^{-1} Z \}.$$

因此,对于任意满足 $\|\tilde{u} - \tilde{u}_*\|_X < R^*$ 的 $\tilde{u} \in X$,有如下的结论成立:

$$\frac{1}{2Z} \|F(\tilde{u}) - F(\tilde{u}_*)\|_{Y^*} \leq \|\tilde{u} - \tilde{u}_*\|_X \leq 2\hat{Z} \|F(\tilde{u}) - F(\tilde{u}_*)\|_{Y^*}. \quad (8)$$

我们继续后验误差估计子的推导.记 I_{d_Y} 为空间 Y 到 Y 的恒等算子.因此,从文献[23,25]可以得到如下的结论:

定理 3^[23,25] 设 $\tilde{u}_h \in X_h$ 是方程 $F_h(\tilde{u}_h) = 0$ 的逼近(数值)解,并且假设 $\|F_h(\tilde{u}_h)\|_{Y_h^*}$ 足够小.假设存在一个限制算子 $\mathcal{R}_h \in L(Y, Y_h)$,有限维子空间 $\tilde{Y}_h = \text{span}\{\psi_i\} \subset Y$,其中,支集 $\text{support}(\psi_i) \subset \Lambda \subset \Omega$, $\tilde{F}_h: X_h \rightarrow \tilde{Y}_h^*$ 表示 F 在 \tilde{u}_h 的(逼近)近似.则有

$$\begin{aligned} \|F(\tilde{u}_h)\|_{Y^*} \leq & \| (I_{d_Y} - \mathcal{R}_h) \tilde{F}_h(\tilde{u}_h) \|_{Y^*} + \| (I_{d_Y} - \mathcal{R}_h) [F(\tilde{u}_h) - \tilde{F}_h(\tilde{u}_h)] \|_{Y^*} + \\ & \| \mathcal{R}_h \|_{L(Y, Y_h)} \| F(\tilde{u}_h) - F_h(\tilde{u}_h) \|_{Y_h^*} + \| \mathcal{R}_h \|_{L(Y, Y_h)} \| F_h(\tilde{u}_h) \|_{Y_h^*} \end{aligned} \quad (9)$$

和

$$\|\tilde{F}_h(\tilde{u}_h)\|_{\tilde{Y}_h^*} \leq \|F(\tilde{u}_h)\|_{Y^*} + \|F(\tilde{u}_h) - \tilde{F}_h(\tilde{u}_h)\|_{Y^*}. \quad (10)$$

注 1 从定理 2 和定理 3,我们得到了残量型后验误差估计的理论基础.空间 \tilde{Y}_h 可以由一系列泡函数张成的并使得式(10)成立的空间. $\tilde{F}_h(u_h)$ 可以定义为 $F(u_h)$ 在逐个剖分单元上的投影,算子 \mathcal{R}_h 可以选取为 Clément^[33]型插值算子.对于 Clément 型插值算子 \mathcal{R}_h ,有如下的性质^[33]成立:

$$\|\varphi - \mathcal{R}_h \varphi\|_K \leq Ch_K \|\nabla \varphi\|_{\tilde{\omega}_K}, \quad \|\varphi - \mathcal{R}_h \varphi\|_{L^2(E)} \leq Ch_E^{1/2} \|\nabla \varphi\|_{\tilde{\omega}_E}, \quad (11)$$

其中, $\tilde{\omega}_K$ 表示单元 K 以及和它相邻单元的并集, $\tilde{\omega}_E$ 表示所有包含 E 边的单元的并集.

注 2 如果要把上述的理论应用到我们的问题,需要解决的一个问题就是这些常数 γ , Z , \hat{Z} 和 R^* 是如何依赖于物理参数 ν 和 λ 的.一般说来,要得到精确的依赖信息是很困难的(相关的讨论请见文献[22,26-27]).实际上,我们可以得到一些粗略的估计.例如,常数 $Z = \|DF(\tilde{u}_*)\|_{L(Y, Y^*)}$ 可以被

$$\nu + 4N\nu^{-1}\lambda(3C_0 + 1) \|T_0\|_1 + 2\sqrt{2} + \lambda C_0^2 + 2\lambda\bar{N}\nu^{-1}\lambda(3C_0 + 1) \|T_0\|_1 + 2\lambda\bar{N} \|\nabla T_0\|_0 \bar{N}C_0^{-2}\lambda(3C_0 + 1) \|T_0\|_1$$

控制. 另外, 我们可以证明算子 F 的导数在 (\mathbf{u}_*, p_*, T_*) 的某个邻域内是 Lipschitz 连续的, 这里 (\mathbf{u}_*, p_*, T_*) 是方程 $F(y) = 0$ 的非奇异解. 类似地, 我们可以得到 Lipschitz 常数 γ . 由于常数 $\hat{Z} = \|DF(\tilde{u}_*)^{-1}\|_{L(Y^*, Y)}$ 只是式(8)右端项的公共乘子, 它的作用是判断是否满足最终停止条件, 而不是网格重新分配的依据. 因此, 对于给定的数值(逼近)解 $\tilde{u}_h = (\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$, 我们可以用 $\|DF(\tilde{u}_h)^{-1}\|_{L(Y_h^*, Y_h)}$ 来近似代替 $\|DF(\tilde{u}_*)^{-1}\|_{L(Y^*, Y)}$. 更详细的讨论, 请看文献[15].

现在我们继续后验误差估计子的推导. 记 $[f]_E$ 为 f 在边 E 两边的跳跃, 对任意的单元 $K \in \Omega_h$, 定义局部后验误差估计子 η_K 如下:

$$\eta_K = (h_K^2 \| -\nu \Delta \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \lambda \mathbf{j} T_h \|_{0,2;K}^2 + h_K^2 \| -\Delta T_h + \lambda \mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h \|_{0,2;K}^2 + \| \nabla \cdot \mathbf{u}_h \|_{0,2;K}^2 + h_E \| [\nu \partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}]_E \|_{2,E}^2 + h_E \| [\partial_n T_h]_E \|_{0,2,E}^2)^{1/2}. \quad (12)$$

定理 4 设 (\mathbf{u}_*, p_*, T_*) 是问题(1)在定理2意义下的正则解, 设 $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h) \in X_h$ 是问题(7)的数值解, 与真解 (\mathbf{u}_*, p_*, T_*) 具有定理2意义下的充分接近性, 并满足定理3的假设条件, 其中 F_h 由式(6)定义给出. 则存在两个常数 C_1 和 C_2 使得下面的后验误差估计结论成立:

$$\{ \|\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_h\|_{1,2}^2 + \|p_* - p_h\|_{0,2}^2 + \|T_* - T_h\|_{1,2}^2 \}^{1/2} \leq C_1 \|DF(\mathbf{u}_*, p_*, T_*)^{-1}\|_{L(Y^*, Y)} [1 + \alpha(1 + \nu + \|\mathbf{u}_h\|_{1,2})] \left\{ \sum_{K \in \Omega_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2} \quad (13)$$

和

$$\eta_K \leq C_2 \|DF(\mathbf{u}_*, p_*, T_*)\|_{L(Y, Y^*)} \times \{ \|\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_h\|_{1,2;\tilde{\omega}_K}^2 + \|p_* - p_h\|_{0,2;\tilde{\omega}_K}^2 + \|T_* - T_h\|_{1,2;\tilde{\omega}_K}^2 \}^{1/2}, \quad (14)$$

这里, η_K 是由式(12)定义给出, 常数 C_1, C_2 仅仅与有限元空间 M_h, Q_h, W_h 的自由度、区域 Ω 和 h_K/ϱ_K 有关.

证明 类似于式(4)中 F 的定义, 在网格单元上定义 \tilde{F}_h , 容易验证下式成立:

$$\langle \tilde{F}_h(\mathbf{u}_h, p_h, T_h), (\mathbf{v}, q, S) \rangle = \sum_K \left\{ \int_K \{ -\nu \Delta \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + p_h - \lambda \mathbf{j} T_h \} \mathbf{v} dx + \int_K q \nabla \cdot \mathbf{u}_h dx \right\} + \sum_K \left\{ \int_K \{ -\Delta T_h + \lambda \mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h \} S dx \right\} + \sum_E \int_E [\nu \partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}]_E \mathbf{v} d\delta + \sum_E \int_E [\partial_n T_h]_E S d\delta, \quad \forall (\mathbf{v}, q, S) \in Y. \quad (15)$$

设 $(\mathbf{v}, q, S) \in Y$ 且 $\|(\mathbf{v}, q, S)\|_Y = 1$, 利用不等式(11)可以得到

$$\| (I_{d_Y} - \mathcal{R}_h) \tilde{F}_h(\mathbf{u}_h, p_h, T_h) \|_{Y^*} = \sup_{\substack{(\mathbf{v}, q, S) \in Y \\ \|(\mathbf{v}, q, S)\|_Y = 1}} \left| \sum_{K \in \Omega_h} \int_K \{ (-\nu \Delta \mathbf{u}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + p_h - \lambda \mathbf{j} T_h) (\mathbf{v} - \mathcal{R}_h \mathbf{v}) + (-\Delta T_h + \lambda \mathbf{u}_h \cdot \nabla T_h) (S - \mathcal{R}_h S) + (q - \mathcal{R}_h q) \nabla \cdot \mathbf{u}_h \} dx + \sum_E \int_E \{ [\nu \partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}]_E (\mathbf{v} - \mathcal{R}_h \mathbf{v}) + [\partial_n T_h]_E (S - \mathcal{R}_h S) \} d\delta \right| \leq$$

$$c \left\{ \sum_K \eta_K^2 \right\}^{1/2}. \quad (16)$$

根据 \tilde{F}_h 和 F 的定义,容易验证下式成立:

$$\begin{cases} \|\tilde{F}_h(\mathbf{u}_h, p_h, T_h) - F(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)\|_{\tilde{Y}_h^*} = 0, \\ \|(I_{d_Y} - \mathcal{R}_h)[\tilde{F}_h(\mathbf{u}_h, p_h, T_h) - F(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)]\|_{\tilde{Y}_h^*} = 0, \\ \|(I_{d_Y} - \mathcal{R}_h)[F(\mathbf{u}_h, p_h, T_h) - \tilde{F}_h(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)]\|_{Y^*} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

现在,我们来计算一致性误差(consistency error). 设 $(v_h, q_h, S_h) \in Y_h$, 则有

$$\begin{aligned} \langle F_h(\mathbf{u}_h, p_h, T_h) - F(\mathbf{u}_h, p_h, T_h), (v_h, q_h, S_h) \rangle = \\ \sum_K \delta_K (-\nu \Delta \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \lambda \mathbf{j} T_h, -\nu \Delta \mathbf{v}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_K. \end{aligned}$$

根据算子范数的定义,有

$$\begin{aligned} \|F_h(\mathbf{u}_h, p_h, T_h) - F(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)\|_{Y_h^*} = \\ \sup_{\substack{(v_h, q_h, S_h) \in Y_h \\ \|(v_h, q_h, S_h)\|_Y = 1}} |\langle F_h(\mathbf{u}_h, p_h, T_h) - F(\mathbf{u}_h, p_h, T_h), (v_h, q_h, S_h) \rangle| = \\ \sup_{\substack{(v_h, q_h, S_h) \in Y_h \\ \|(v_h, q_h, S_h)\|_Y = 1}} \left| \sum_K \delta_K (-\nu \Delta \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \lambda \mathbf{j} T_h, -\nu \Delta \mathbf{v}_h + \right. \\ \left. \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_K \right| \leq \\ c\alpha(1 + \nu + \|\mathbf{u}_h\|_{1,2}) \left\{ \sum_K \eta_K^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

结合式(16)~(18)及式(8)和(9)可以证明式(13)成立.

对于不等式(14),由于后验误差分析过程和文献[15]的分析过程相似,并且证明方法是标准的,我们省略了证明过程. 详细的讨论请看参考文献[15,25-26].

注3 如果令式(2)中的参数 $\delta_K = \alpha h_K^2 = 0$, 则定理4就退化为文献[15]中定理4.1的结论. 也就是说, 本文把 Zhang 等的文献[15]标准有限元的后验误差估计延拓到稳定化有限元情形.

3 数值算例

本节主要通过数值算例验证了自适应最小二乘 Galerkin/Petrov 混合有限元法求解热传导对流问题的有效性,同时也验证了定理1的结论. 本节所有的数值算例,非线性项通过 Newton 迭代来求解,算法是通过开源的有限元软件包 Freefem++^[34]实现的. 我们给出了3个数值算例. 这些数值算例可以分为两大类,第一类是真解问题算例,第二类是模型算例^[8]. 正如在前面章节说到的那样,本节我们采用两类有限元空间来计算,一类是用不满足离散 inf-sup (LBB) 条件的有限元序对 P_1 - P_1 - P_1 元来逼近 (\mathbf{u}, p, T) 空间;另一类是用满足离散 LBB 条件的有限元序对 P_2 - P_1 - P_2 元来逼近 (\mathbf{u}, p, T) 空间. 为了简单,对模型算例我们仅选用有限元序对 P_1 - P_1 - P_1 元进行了数值模拟. 因为本节不研究物理参数 ν 和 λ 对数值计算结果的影响,因此我们选取 $\nu = 1.0$ 和 $\lambda = 1.0$. 本节所有的算例,选取 $\delta_K = 0.1h_K^2$. 在本节的后面部分,我们把最小二乘 Galerkin/Petrov 混合有限元法简称为稳定化方法,并把标准的 Galerkin 方法(满足离散 LBB 条件)简称为 Galerkin 方法.

一致等距加密网格是这样得到的,首先把单位正方形分解为 $n \times n$ 个全等正方形,然后把

每个小的正方形分成两个三角形. 例如, 图 2(a) 就是当 $n = 32$ 时一致等距三角形剖分的网格示意图.

为了表达便利, 下面引入一些记号.

· P_{DOF^j} := 剖分 $\Omega_{h,j}$ 所有的三角形单元总数;

· I_{eff} := η/E_1 有效指标, 即总体后验误差估计子和真实总体误差的比率. 其中, $\eta =$

$$\left\{ \sum_K (\eta_K)^2 \right\}^{1/2}, \text{ 整体能量范数}$$

$$E_1 = \{ E_1(\mathbf{u})^2 + E_0(p)^2 + E_1(T)^2 \}^{1/2},$$

$$E_1(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,2}, E_0(p) = \|p - p_h\|_{0,2}, E_1(T) = \|T - T_h\|_{1,2}.$$

记

$$E_{\delta,h} = \|\delta^{1/2}(-\nu \Delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + (\mathbf{u}_h \nabla)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \nabla(p - p_h))\|_{0,h}.$$

$$\cdot \text{rate} := \frac{2 \times \ln(\mathbf{E}^j/\mathbf{E}^{j-1})}{\ln(P_{\text{DOF}^j}/P_{\text{DOF}^{j-1}})},$$

其中, $\mathbf{E}^j, \mathbf{E}^{j-1}$ 分别表示第 j 步和第 $j-1$ 步的真实误差. 误差 \mathbf{E} 可以是 $E_1(\mathbf{u}), E_0(p), E_1(T), E_{\delta,h}$ 或 E_1 . 本文算例中的收敛率指的是平均收敛率.

为了论文的完备性和可读性, 下面我们来描述 Freefem++^[34] 自适应算法的主要思想. 首先对区域 Ω 做初始网格剖分, 记为 $\Omega_{h,0}$, 我们将通过下面的方法构造出一系列的三角形剖分 $\Omega_{h,j}$. 给定网格剖分 $\Omega_{h,j}$, 首先计算有限元离散问题(7), 得到数值解 $(\mathbf{u}_h^j, p_h^j, T_h^j)$; 然后计算误差估计子 η_K^j , 新的网格剖分尺寸由

$$h_{j+1} = \frac{h_j}{f_j(\eta_K^j)}$$

给出, 其中 h_j 表示前一次(第 j 次)的网格尺寸, 函数 f_j 通过下式定义给出:

$$f_j = \min(\max(\eta_K^j/(c\bar{\eta}^j), 1.00), 3.00).$$

这里, $\bar{\eta}^j$ 表示所有三角形单元误差估计子 η_K^j 的平均, c 是一个小于 1 且接近于 1 的常数, 常数 1.00 和 3.00 可以根据实际需要自行调整大小. 为了简便, 本文在实际计算中取 $c = 0.85$. 当然, 我们也可以考虑其它调整网格的策略, 例如文献[28]的策略, 但二者没有较大的差别.

自适应的策略主要分为两步.

首先, 给定允许误差 η^* , 在给定的网格 $\Omega_{h,0}$ 上计算总体后验误差估计子 η .

· 第 1 步: 如果 $\eta \leq \eta^*$, 则停止, 得到最终的有限元解; 否则, 转到第 2 步.

· 第 2 步: 计算局部后验误差估计子 η_K 和它的均值 $\bar{\eta}$, 通过上面的方法产生新的网格剖分, 然后在新的网格剖分上计算问题(7) 得到新的数值解, 并且计算新的总体误差估计子 η . 回到第 1 步.

算例 1 真解

与文献[15,26]一样, 选取 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, 并选取适当的右端函数项使得问题(1)的真解是

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 10x^2(x-1)^2y(y-1)(2y-1) \\ -10x(x-1)(2x-1)y^2(y-1)^2 \end{pmatrix}, \\ p = 10(2x-1)(2y-1), \\ T = u_1 + u_2. \end{cases}$$

我们用这个例子来比较热传导对流问题的稳定化方法和 Galerkin 方法在一致网格上的计

算效果.表 1 至表 4 是算例 1 的数值计算结果.表 1 和表 2 是用有限元序对 $P_1-P_1-P_1$ 元空间逼近 (\mathbf{u}, p, T) 的数值计算结果.从表 1 和表 2 可以发现,对于速度和温度这 2 个变量,这 2 个表格几乎有同样的精度和收敛率.而对于压力变量,正如表 1 所示,它的数值计算结果有很大的差别.Galerkin 方法的次优误差估计看起来很糟糕,得到这样的计算结果并不奇怪,这是因为 $P_1-P_1-P_1$ 有限元序对的这个方法不满足离散的 LBB 条件.由于压力的次优误差估计,导致总能量范数误差 E_1 坏的收敛率.我们从表 2 容易发现,用稳定化方法得到的误差估计比用 Galerkin 方法得到的更加稳定.压力变量还有超收敛的效果.然而从表 1 和表 2 发现,有效指标 I_{eff} 都趋于常数,是稳定的,这也就说明了有效指标 I_{eff} 能够反映真实误差 E_1 和总体后验误差估计子 η 的等价关系.表 3 和表 4 是用有限元序对 $P_2-P_1-P_2$ 元计算热传导对流问题的数值结果.从表 3 和表 4 容易看出,对于速度,压力和温度这 3 个变量,选用标准 Galerkin 方法和稳定化方法来计算热传导对流问题,他们的数值计算结果几乎没有什么差别.对于有限元序对 $P_2-P_1-P_2$ 元,标准 Galerkin 方法和稳定化方法有同样的收敛率.从表 3 和表 4,我们发现有效指标 I_{eff} 也趋于常数.

表 1 算例 1 选用一致网格数值计算结果: $P_1-P_1-P_1$ 元,标准 Galerkin 方法

Table 1 Results for example 1 using $P_1-P_1-P_1$ on uniform meshes (Galerkin method)

| n | P_{DOF} | $E_0(p)$ | $E_1(\mathbf{u})$ | $E_1(T)$ | E_1 | η | I_{eff} |
|-----|------------------|-----------|-------------------|-------------|-----------|----------|------------------|
| 8 | 128 | 1.056 840 | 0.122 803 0 | 0.075 975 2 | 1.066 660 | 5.231 56 | 4.904 60 |
| 12 | 288 | 0.784 037 | 0.081 429 8 | 0.051 073 2 | 0.789 907 | 3.888 14 | 4.922 28 |
| 16 | 512 | 0.652 836 | 0.060 828 1 | 0.038 421 4 | 0.656 788 | 3.235 07 | 4.925 59 |
| 24 | 1 152 | 0.531 967 | 0.040 367 7 | 0.025 671 0 | 0.534 113 | 2.628 27 | 4.920 81 |
| 32 | 2 048 | 0.479 153 | 0.030 202 7 | 0.019 268 4 | 0.480 490 | 2.361 70 | 4.915 18 |
| 48 | 4 608 | 0.434 822 | 0.020 085 2 | 0.012 852 8 | 0.435 475 | 2.137 37 | 4.908 14 |
| 64 | 8 192 | 0.416 935 | 0.015 044 8 | 0.009 641 5 | 0.417 317 | 2.046 81 | 4.904 68 |
| | rate | 0.386 869 | 1.009 560 | 0.993 111 | 0.441 779 | | |

表 2 算例 1 选用一致网格数值计算结果: $P_1-P_1-P_1$ 元,稳定化方法

Table 2 Results for example 1 using $P_1-P_1-P_1$ on uniform meshes (stabilized method)

| n | P_{DOF} | $E_{\delta,h}$ | $E_0(p)$ | $E_1(\mathbf{u})$ | $E_1(T)$ | E_1 | η | I_{eff} |
|-----|------------------|----------------|-------------|-------------------|-------------|-------------|-----------|------------------|
| 8 | 128 | 0.065 508 2 | 0.054 527 0 | 0.098 228 5 | 0.075 975 1 | 0.135 625 0 | 0.897 007 | 6.613 86 |
| 12 | 288 | 0.036 210 2 | 0.023 192 8 | 0.066 091 3 | 0.051 073 1 | 0.086 685 8 | 0.560 255 | 6.463 05 |
| 16 | 512 | 0.024 893 1 | 0.013 079 8 | 0.049 733 5 | 0.038 421 4 | 0.064 192 7 | 0.411 540 | 6.411 01 |
| 18 | 648 | 0.021 555 0 | 0.010 412 1 | 0.044 244 0 | 0.034 180 8 | 0.056 870 6 | 0.364 031 | 6.401 04 |
| 24 | 1 152 | 0.015 440 6 | 0.006 042 0 | 0.033 221 9 | 0.025 671 0 | 0.042 417 0 | 0.271 238 | 6.394 55 |
| 32 | 2 048 | 0.011 269 6 | 0.003 561 0 | 0.024 927 3 | 0.019 268 4 | 0.031 706 8 | 0.203 003 | 6.402 51 |
| 36 | 2 592 | 0.009 943 3 | 0.002 879 1 | 0.022 158 9 | 0.017 131 1 | 0.028 156 3 | 0.180 418 | 6.407 72 |
| | rate | 1.217 42 | 1.928 35 | 0.992 11 | 0.992 087 | 1.035 93 | | |

从表 2 和表 4 容易看出,采用稳定化方法计算热传导对流问题得到的数值结论和理论分析结论是一致的.也就是说,当分别选用 $P_1-P_1-P_1$ 有限元序对元和 $P_2-P_1-P_2$ 有限元序对元求解热传导对流问题时,离散范数 $\|\cdot\|_{0,h}$,速度和压力的能量范数的误差收敛率分别是 $O(h)$ 阶和 $O(h^2)$ 阶的.

我们可以从算例 1 得到下面的结论.对于满足离散 LBB 条件的有限元序对,例如 $P_2-P_1-P_2$ 元,用 Galerkin/Petrov 最小二乘稳定化方法和用标准 Galerkin 方法求解热传导对流问

题时得到的数值结果没有什么区别,都有较好的稳定性和收敛性效果.对于不满足离散 LBB 条件的有限元序对元,例如 P_1 - P_1 - P_1 元,用稳定化方法得到的数值结果(稳定性和收敛率)比用标准 Galerkin 方法得到的数值结果好得多.然而衡量真实误差和后验误差估计子等价性的有效指标 I_{eff} 对这两个方法都趋于常数.

表 3 算例 1 选用一致网格数值计算结果: P_2 - P_1 - P_2 元,标准 Galerkin 方法

Table 3 Results for example 1 using P_2 - P_1 - P_2 on uniform meshes (Galerkin method)

| n | P_{DOF} | $E_0(p)$ | $E_1(\mathbf{u})$ | $E_1(T)$ | E_1 | η | I_{eff} |
|-----|------------------|--------------|-------------------|--------------|--------------|--------------|------------------|
| 12 | 288 | 0.017 933 50 | 0.005 762 91 | 0.003 443 51 | 0.019 148 90 | 0.236 855 00 | 12.369 1 |
| 16 | 512 | 0.010 086 60 | 0.003 263 01 | 0.001 950 38 | 0.010 779 20 | 0.133 241 00 | 12.360 9 |
| 24 | 1 152 | 0.004 482 70 | 0.001 457 56 | 0.000 871 24 | 0.004 793 56 | 0.059 222 60 | 12.354 6 |
| 32 | 2 048 | 0.002 521 49 | 0.000 821 41 | 0.000 490 96 | 0.002 696 98 | 0.033 314 20 | 12.352 4 |
| 48 | 4 608 | 0.001 120 66 | 0.000 365 58 | 0.000 218 49 | 0.001 198 86 | 0.014 807 10 | 12.351 0 |
| 64 | 8 192 | 0.000 630 40 | 0.000 205 74 | 0.000 122 96 | 0.000 674 40 | 0.008 329 22 | 12.350 6 |
| | rate | 2.000 1 | 1.990 61 | 1.990 47 | 1.998 92 | | |

表 4 算例 1 选用一致网格数值计算结果: P_2 - P_1 - P_2 元,稳定化方法

Table 4 Results for example 1 using P_2 - P_1 - P_2 on uniform meshes (stabilized method)

| n | P_{DOF} | $E_{\delta,h}$ | $E_0(p)$ | $E_1(\mathbf{u})$ | $E_1(T)$ | E_1 | η | I_{eff} |
|-----|------------------|----------------|-------------|-------------------|-------------|-------------|-------------|------------------|
| 12 | 288 | 0.022 834 9 | 0.021 230 8 | 8.858 46E-3 | 3.443 52E-3 | 0.023 261 1 | 0.234 800 0 | 10.094 1 |
| 16 | 512 | 0.012 911 8 | 0.011 174 9 | 4.354 98E-3 | 1.950 38E-3 | 0.012 151 0 | 0.132 615 0 | 10.913 9 |
| 24 | 1 152 | 5.760 38E-3 | 4.704 48E-3 | 1.697 77E-3 | 8.712 38E-4 | 5.076 77E-3 | 0.059 105 6 | 11.642 4 |
| 32 | 2 048 | 3.244 6E-3 | 2.592 43E-3 | 9.013 45E-4 | 4.909 62E-4 | 2.788 22E-3 | 0.033 278 5 | 11.935 4 |
| 36 | 2 592 | 2.564 58E-3 | 2.036 71E-3 | 7.000 57E-4 | 3.881 13E-4 | 2.188 36E-3 | 0.026 300 7 | 12.018 5 |
| | rate | 1.991 17 | 2.121 10 | 2.284 53 | 1.988 26 | 2.137 39 | | |

算例 2 真解

与算例 1 一样,选取 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, 并选取适当的右端函数项使得问题(1)的真解是

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi(e^{r_1x} - 1)}{e^{r_1} - 1}\right)\right) \sin\left(\frac{2\pi(e^{r_2y} - 1)}{e^{r_2} - 1}\right) \frac{r_2}{2\pi} \frac{e^{r_2y}}{e^{r_2} - 1} \\ - \sin\left(\frac{2\pi(e^{r_1x} - 1)}{e^{r_1} - 1}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi(e^{r_2y} - 1)}{e^{r_2} - 1}\right)\right) \frac{r_1}{2\pi} \frac{e^{r_1x}}{e^{r_1} - 1} \end{pmatrix}, \\ p = r_1 r_2 \sin\left(\frac{2\pi(e^{r_1x} - 1)}{e^{r_1} - 1}\right) \sin\left(\frac{2\pi(e^{r_2y} - 1)}{e^{r_2} - 1}\right) \frac{e^{r_1x} e^{r_2y}}{(e^{r_1} - 1)(e^{r_2} - 1)}, \\ T = u_1 + u_2, \end{cases}$$

这里 r_1 和 r_2 是两个正实数.对这个真解 $(u_1(x,y), u_2(x,y), p(x,y))$ 详细的描述,请见文献 [15,24]. 本文我们选取参数 $r_1 = 3.1$ 和 $r_2 = 9.1$, 这时候在靠近右上边界的局部区域,真解有较大的变化.

表 5 至表 10 是算例 2 的数值计算结果.表 5 和表 6 分别是基于一致网格和自适应网格的稳定化 P_1 - P_1 - P_1 元数值计算的结果.表 7 和表 8 分别是基于一致网格和自适应网格的稳定化 P_2 - P_1 - P_2 元数值计算的结果.为了与文献[15]的结论作比较(文献[15]用的是标准 Galerkin 有限元序对 P_2 - P_1 - P_2 元),我们在表 9 和表 10 给出了标准 Galerkin 有限元序对 P_2 - P_1 - P_2 元的数值计算结果.

表 5 算例 2 选用一致网格数值计算结果: P_1 - P_1 - P_1 元, 稳定化方法Table 5 Results for example 2 using P_1 - P_1 - P_1 on uniform meshes (stabilized method)

| n | P_{Dof} | $E_{\delta,h}$ | $E_0(p)$ | $E_1(\mathbf{u})$ | $E_1(T)$ | E_1 | η | I_{eff} |
|------|------------------|----------------|-------------|-------------------|----------|-----------|----------|------------------|
| 48 | 4 608 | 1.462 130 | 0.407 743 0 | 3.338 61 | 3.257 23 | 4.682 11 | 24.092 0 | 5.145 55 |
| 64 | 8 192 | 1.155 830 | 0.264 830 0 | 2.520 85 | 2.460 19 | 3.532 33 | 19.371 7 | 5.484 13 |
| 72 | 10 368 | 1.041 990 | 0.218 512 0 | 2.246 13 | 2.192 34 | 3.146 30 | 17.561 7 | 5.581 70 |
| 90 | 16 200 | 0.849 652 | 0.149 792 0 | 1.803 45 | 1.760 60 | 2.524 80 | 14.445 4 | 5.721 41 |
| 100 | 20 000 | 0.769 636 | 0.124 857 0 | 1.625 26 | 1.586 76 | 2.274 83 | 13.129 1 | 5.771 46 |
| 120 | 28 800 | 0.646 790 | 0.090 839 8 | 1.356 81 | 1.324 82 | 1.898 51 | 11.087 3 | 5.839 99 |
| 140 | 39 200 | 0.557 229 | 0.069 326 4 | 1.164 27 | 1.136 92 | 1.628 77 | 9.583 6 | 5.883 93 |
| rate | | | | | | 0.987 299 | | |

表 6 算例 2 选用自适应网格数值计算结果: P_1 - P_1 - P_1 元, 稳定化方法Table 6 Results for example 2 using P_1 - P_1 - P_1 on adaptive meshes (stabilized method)

| P_{Dof} | $E_{\delta,h}$ | $E_0(p)$ | $E_1(\mathbf{u})$ | $E_1(T)$ | E_1 | η | I_{eff} |
|------------------|----------------|-----------|-------------------|----------|----------|-----------|------------------|
| 668 | 1.012 620 | 0.719 602 | 4.459 89 | 4.448 29 | 6.340 01 | 17.088 10 | 2.695 28 |
| 1 137 | 0.871 736 | 0.369 902 | 2.864 99 | 2.830 75 | 4.044 52 | 15.169 70 | 3.750 68 |
| 2 546 | 0.694 434 | 0.271 346 | 1.692 07 | 1.674 80 | 2.396 18 | 12.090 00 | 5.045 53 |
| 4 666 | 0.550 345 | 0.192 807 | 1.240 39 | 1.232 83 | 1.759 43 | 9.612 26 | 5.463 27 |
| 5 431 | 0.492 799 | 0.151 590 | 1.104 32 | 1.097 88 | 1.564 55 | 8.619 78 | 5.509 41 |
| rate | | | | | | 1.388 85 | |

表 7 算例 2 选用一致网格数值计算结果: P_2 - P_1 - P_2 元, 稳定化方法Table 7 Results for example 2 using P_2 - P_1 - P_2 on uniform meshes (stabilized method)

| n | P_{Dof} | $E_{\delta,h}$ | $E_0(p)$ | $E_1(\mathbf{u})$ | $E_1(T)$ | E_1 | η | I_{eff} |
|------|------------------|----------------|-------------|-------------------|-----------|-----------|-----------|------------------|
| 24 | 1 152 | 0.967 717 | 0.582 135 0 | 1.332 630 | 1.169 710 | 1.866 280 | 14.480 60 | 7.759 04 |
| 32 | 2 048 | 0.626 826 | 0.263 269 0 | 0.769 153 | 0.625 927 | 1.026 010 | 9.580 59 | 9.337 74 |
| 48 | 4 608 | 0.329 484 | 0.087 588 3 | 0.407 316 | 0.311 134 | 0.519 983 | 5.119 27 | 9.845 08 |
| 64 | 8 192 | 0.200 177 | 0.041 659 5 | 0.243 194 | 0.186 698 | 0.309 411 | 3.074 03 | 9.935 10 |
| 72 | 10 368 | 0.162 003 | 0.031 235 2 | 0.193 932 | 0.150 245 | 0.247 304 | 2.468 35 | 9.981 05 |
| 80 | 12 800 | 0.133 676 | 0.024 357 9 | 0.157 507 | 0.123 320 | 0.201 519 | 2.021 00 | 10.028 80 |
| rate | | | | | | 1.881 15 | | |

表 8 算例 2 选用自适应网格数值计算结果: P_2 - P_1 - P_2 元, 稳定化方法Table 8 Results for example 2 using P_2 - P_1 - P_2 on adaptive meshes (stabilized method)

| P_{Dof} | $E_{\delta,h}$ | $E_0(p)$ | $E_1(\mathbf{u})$ | $E_1(T)$ | E_1 | η | I_{eff} |
|------------------|----------------|-------------|-------------------|-------------|-------------|-----------|------------------|
| 305 | 0.510 280 0 | 0.973 397 0 | 2.041 850 0 | 2.074 690 0 | 3.069 360 0 | 7.858 860 | 2.560 42 |
| 662 | 0.290 769 0 | 0.387 398 0 | 0.844 137 0 | 0.834 036 0 | 1.248 300 0 | 4.550 930 | 3.645 70 |
| 1 167 | 0.180 058 0 | 0.142 722 0 | 0.402 751 0 | 0.388 600 0 | 0.577 571 0 | 2.779 360 | 4.812 15 |
| 2 551 | 0.087 435 2 | 0.042 636 8 | 0.147 321 0 | 0.133 658 0 | 0.203 435 0 | 1.347 650 | 6.624 48 |
| 4 258 | 0.049 286 1 | 0.019 420 3 | 0.073 047 9 | 0.065 652 9 | 0.100 117 0 | 0.752 094 | 7.512 14 |
| 5 740 | 0.039 890 9 | 0.015 338 8 | 0.056 037 5 | 0.049 578 8 | 0.076 377 6 | 0.605 495 | 7.927 65 |
| rate | | | | | | 2.457 94 | |

由于本算例所选用的这 3 组有限元序对元都是稳定的, 所以我们只计算了总能量范数 E_1 基于一致网格或自适应网格时的误差收敛率。容易发现, 选用自适应方法比选用一致网格方法

能得到较好的逼近解.对于稳定化的 $P_1-P_1-P_1$ 元,表 5 的误差收敛率是 0.987 299;而表 6 的误差收敛率是 1.388 85.也就是说,对于最低阶等阶有限元序对 $P_1-P_1-P_1$ 元,稳定化自适应有限元法可以得到较好的逼近解.对于稳定化的 $P_2-P_1-P_2$ 元,表 7 的误差收敛率是 1.881 15;而表 8 的误差收敛率是 2.457 94.对于标准 Galerkin 的有限元序对 $P_2-P_1-P_2$ 元,表 9 的误差收敛率是 1.875 06;而表 10 的误差收敛率是 2.459 71.也就是说,对于有限元序对 $P_2-P_1-P_2$ 元,选用自适应方法比选用一致网格方法得到较好的逼近解.对比表 7 和表 9,我们发现对于一致网格加密方法,用稳定化有限元序对 $P_2-P_1-P_2$ 元法和用标准 Galerkin 有限元序对 $P_2-P_1-P_2$ 元法求解热传导对流问题,这两个方法具有相同的计算精度和收敛率.同样地,对比表 8 和表 10 容易发现,对于自适应网格加密方法,用稳定化有限元序对 $P_2-P_1-P_2$ 元法和用标准 Galerkin 有限元序对 $P_2-P_1-P_2$ 元法来求解热传导对流问题时,也具有相同的计算精度和收敛率.然而从这些表格可以发现,有效指标 I_{eff} 能趋于常数.

对比表 7 和表 8 容易发现,选用自适应方法求解热传导对流问题得到的误差比选用一致网格方法得到的误差能够迅速减小.例如,当误差 E_1 大约等于 0.201 519 时,对于一致网格剖分情形就需要 12 800 个三角形单元才能达到这个精度;然而对于自适应情形仅仅需要 2 551 个三角形单元就可以达到这个计算精度.对比表 5 和表 6,表 9 和表 10 也可以得到同样的结论.这就意味着自适应方法可以节省大量的工作量.也就是说,对于 $P_2-P_1-P_2$ 有限元序对元,本文的结论和文献[15]的结论是一致的,然而本文可以选取更广泛的有限元序对而不必受离散 LBB 条件的限制.换句话说,本文把热传导对流问题的标准自适应有限元法^[15](满足 LBB 条件)延拓到稳定化自适应有限元法情形.

表 9 算例 2 选用一致网格数值计算结果: $P_2-P_1-P_2$ 元,标准 Galerkin 方法

Table 9 Results for example 2 using $P_2-P_1-P_2$ on uniform meshes(Galerkin method)

| n | P_{DOF} | $E_0(\rho)$ | $E_1(\mathbf{u})$ | $E_1(T)$ | E_1 | η | I_{eff} |
|------|------------------|-------------|-------------------|-----------|-----------|-----------|------------------|
| 24 | 1 152 | 0.485 835 0 | 1.206 790 | 1.170 210 | 1.749 790 | 14.656 00 | 8.375 85 |
| 32 | 2 048 | 0.205 568 0 | 0.663 624 | 0.625 900 | 0.935 097 | 9.659 53 | 10.330 00 |
| 36 | 2 592 | 0.146 068 0 | 0.539 556 | 0.507 308 | 0.754 863 | 8.129 72 | 10.769 80 |
| 48 | 4 608 | 0.068 582 3 | 0.330 268 | 0.311 117 | 0.458 884 | 5.115 99 | 11.148 80 |
| 64 | 8 192 | 0.035 364 5 | 0.197 466 | 0.186 695 | 0.274 040 | 3.055 87 | 11.151 20 |
| 72 | 10 368 | 0.027 392 1 | 0.158 732 | 0.150 243 | 0.220 271 | 2.450 42 | 11.124 60 |
| 77 | 11 858 | 0.023 739 4 | 0.139 930 | 0.132 519 | 0.194 179 | 2.156 83 | 11.107 40 |
| rate | | | | | 1.875 06 | | |

表 10 算例 2 选用自适应网格数值计算结果: $P_2-P_1-P_2$ 元,标准 Galerkin 方法

Table 10 Results for example 2 using $P_2-P_1-P_2$ on adaptive meshes(Galerkin method)

| P_{DOF} | $E_0(\rho)$ | $E_1(\mathbf{u})$ | $E_1(T)$ | E_1 | η | I_{eff} |
|------------------|--------------|-------------------|-------------|-------------|-----------|------------------|
| 293 | 0.990 514 00 | 1.957 800 0 | 2.077 120 0 | 3.021 340 0 | 8.420 570 | 2.787 03 |
| 1 161 | 0.131 057 00 | 0.384 260 0 | 0.387 478 0 | 0.561 223 0 | 2.780 310 | 4.954 01 |
| 2 484 | 0.031 325 30 | 0.134 726 0 | 0.133 908 0 | 0.192 519 0 | 1.309 390 | 6.801 34 |
| 4 238 | 0.013 610 40 | 0.067 054 6 | 0.066 109 0 | 0.095 141 8 | 0.759 467 | 7.982 47 |
| 5 726 | 0.009 656 57 | 0.050 115 0 | 0.049 494 8 | 0.071 095 0 | 0.585 295 | 8.232 58 |
| 7 664 | 0.006 683 70 | 0.034 987 1 | 0.034 570 2 | 0.049 637 3 | 0.438 697 | 8.838 05 |
| rate | | | | 2.459 71 | | |

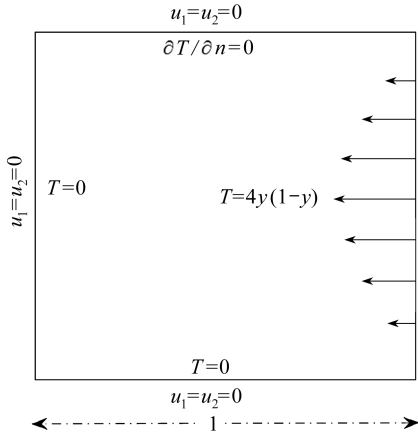


图 1(a) 方腔自然对流换热模型

Fig. 1(a) Physics model of the cavity flows

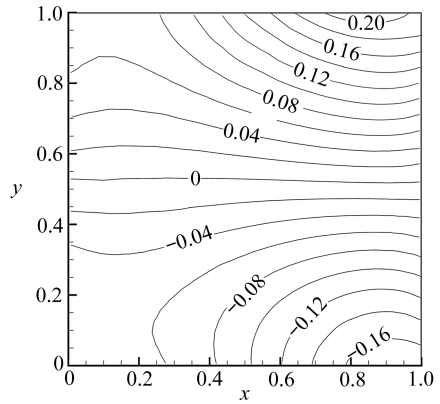


图 1(b) 基于自适应网格(图 2(b))得到的数值压力等压线图

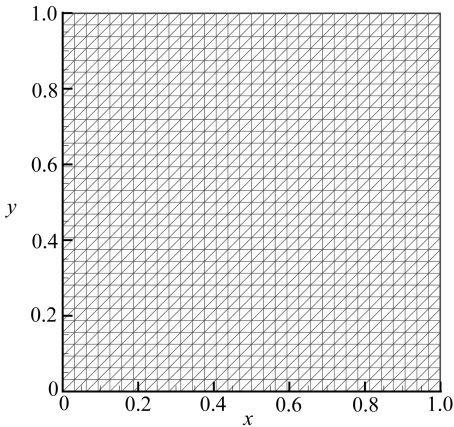
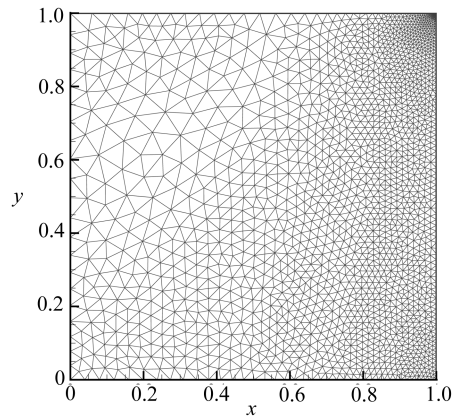
 $(\nu = 1, \lambda = 1 \text{ 和 } \delta_K = 0.1h_K^2)$
Fig. 1(b) The numerical isobar for $\nu = 1$, $\lambda = 1$ based on adaptive mesh
 $(\text{Fig. 2(b)}) \text{ with } \delta_K = 0.1h_K^2$
图 2(a) 初始网格 $h = \sqrt{2}/32$ Fig. 2(a) Initialization mesh with $h = \sqrt{2}/32$ 

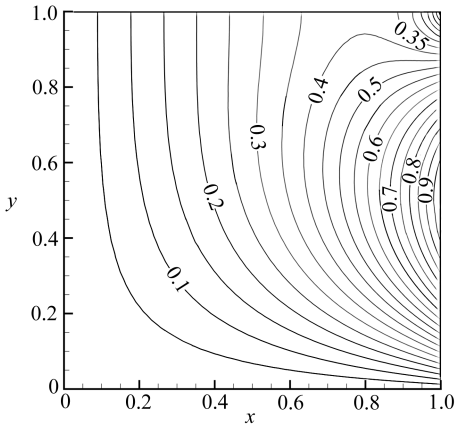
图 2(b) 三次自适应后的网格示意图

Fig. 2(b) The third adaptation mesh using the error indicator

算例 3 方腔自然对流换热模型

第 3 个数值算例是方腔自然对流换热模型^[8]. 模型具体的边长大小和相应的边界条件如图 1(a) 所示. 从图 1(a) 可知, 在模型的左边界和下边界, $T = 0$; 在模型的上边界, $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$; 在模型的右边界, $T = 4y(1 - y)$. 为了简单, 我们仅选用稳定化的 P_1 - P_1 - P_1 有限元序对来模拟这个算例.

图 2(a) 是 $h = \sqrt{2}/32$ 的初始网格. 然后基于后验误差估计子式(12) 得到自适应网格. 图 2(b) 是 3 次自适应后得到的网格示意图. 从图 2(b) 不难发现, 稳定化自适应方法能够自动识别出解奇异或解变化剧烈的区域. 最后基于自适应网格剖分图 2(b), 计算并得到问题(1) 的数值解 (\mathbf{u}_h, p_h, T_h) . 图 1(b) 是数值压力等压线图. 图 3(a) 和图 3(b) 分别是数值温度等温线



$$(\nu = 1, \lambda = 1, \delta_K = 0.1h_K^2)$$

图3(a) 基于自适应网格(图2(b))得到的数值温度等温线图

Fig. 3(a) The numerical isotherms of temperature solution based on adaptive mesh(Fig. 2(b))

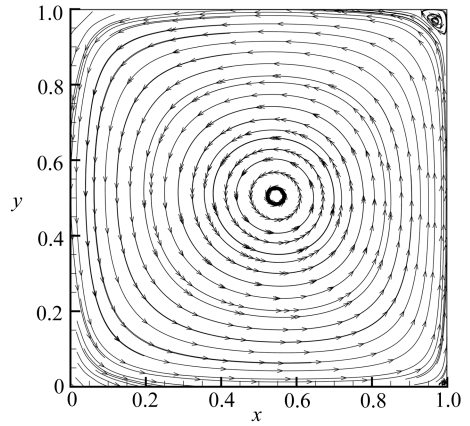


图3(b) 基于自适应网格(图2(b))得到的数值速度流线图

Fig. 3(b) The numerical streamline of velocity solution based on adaptive mesh(Fig. 2(b))

图和数值速度流线图。

4 结 论

利用 Verfürth^[23,25]的一般理论,本文得到了热传导对流问题最小二乘 Galerkin/Petrov 混合有限元法的残量型后验误差估计。在数值算例部分,我们选用了4组有限元空间方法,检验和证实了理论分析结论。这4组方法分别是:标准 Galerkin P_1 - P_1 - P_1 元方法,稳定化 P_1 - P_1 - P_1 元方法,标准 Galerkin P_2 - P_1 - P_2 元方法和稳定化 P_2 - P_1 - P_2 元方法。数值结论表明了残量型后验误差估计子是可以计算的和高效的。事实上,对于有限元序对 P_2 - P_1 - P_2 元(满足离散 LBB 条件),本文的结论(利用稳定化方法)和文献[15]的结论(利用标准 Galerkin 方法)是一致的。然而对于有限元序对 P_1 - P_1 - P_1 元(不满足离散 LBB 条件),我们通过稳定化方法也可以得到好的计算结果。也就是说,我们把热传导对流问题的标准自适应有限元方法^[15](满足 LBB 条件)延拓到稳定化自适应有限元情形。

为了计算方便,本文固定了物理参数 ν 和 λ 。我们下一步的工作是要分析后验误差估计与参数 ν 和 λ 精确的依赖关系。对于其它类型的误差估计子(比如投影误差估计子)以及非定常热传导对流问题的自适应算法研究,正在进行。

致谢 作者衷心感谢编辑和审稿专家的批评和宝贵的建议使得本文整体水平得以提高,以及西安交通大学交叉学科项目基金(2009xjtujc30)的资助。

参考文献:

- [1] Zhou T X, Feng M F. A least squares Galerkin/Petrov mixed finite element method for the stationary Navier-Stokes equations[J]. *Mathematics of Computation*, 1993, **60**(202): 531-543.
- [2] 罗振东,朱江,王会军. 定常的 Navier-Stokes 方程的非线性 Galerkin/Petrov 最小二乘混合元

- 法[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(7): 697-706. (LUO Zhen-dong, ZHU Jiang, WANG Hui-jun. A nonlinear Galerkin/Petrov-least squares mixed element method for the stationary Navier-Stokes equation [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2002, **23**(7): 783-793.)
- [3] 罗振东, 毛允魁, 朱江. 定常的磁流体动力学问题的 Galerkin-Petrov 最小二乘混合元方法[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(3): 359-368. (LUO Zhen-dong, MAO Yun-kui, ZHU Jiang. Galerkin-Petrov least squares mixed element method for the stationary incompressible magneto-hydrodynamics [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2007, **28**(3): 395-404.)
- [4] Hughes T J, Tezduyar T E. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1984, **45**(1/3): 217-284.
- [5] Johnson C, Saranen J. Streamline diffusion methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes equations [J]. *Mathematics of Computation*, 1986, **47**(175): 1-18.
- [6] 罗振东, 卢秀敏. 定常的热传导-对流问题的 Galerkin/Petrov 最小二乘混合元方法[J]. 计算数学, 2003, **25**(2): 231-244. (LUO Zhen-dong, LU Xiu-min. A least squares Galerkin/Petrov mixed finite element method for the stationary conduction convection problems [J]. *Mathematic Numerica Sinica*, 2003, **25**(2): 231-244. (in Chinese))
- [7] 孙萍, 罗振东, 陈静. 非定常的热传导-对流问题的 Petrov 最小二乘混合有限元法及其误差估计 [J]. 计算数学, 2009, **31**(1): 87-98. (SUN Ping, LUO Zhen-dong, CHEN Jing. A Petrov least squares mixed finite element method for the non-stationary conduction convection problems [J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2009, **31**(1): 87-98. (in Chinese))
- [8] Luo Z D, Chen J, Navon I M, Zhu J. An optimizing reduced PLSMFE formulation for non-stationary conduction-convection problems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2009, **60**(4): 409-436.
- [9] Mesquita M S, de Lemos M J S. Optimal multigrid solutions of two dimensional convection conduction problems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **152**(3): 725-742.
- [10] Wang Q W, Yang M, Tao W Q. Natural convection in a square enclosure with an internal isolated vertical plate [J]. *Warme-Stoffubertrag*, 1994, **29**(3): 161-169.
- [11] Yang M, Tao W Q, Wang Q W, Lue S S. On identical problems of natural convection in enclosure and applications of the identity character [J]. *Journal of Thermal Science*, 1993, **2**(2): 116-125.
- [12] 罗振东. 混合有限元法基础及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2006. (LUO Zhen-dong. *The Bases and Applications of Mixed Finite Element Methods* [M]. Beijing: Chinese Science Press, 2006. (in Chinese))
- [13] 罗振东, 朱江, 谢正辉, 张桂芳. 自然对流换热问题基于混合元法的差分格式及其数值模拟 [J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(9): 973-983. (LUO Zhen-dong, ZHU Jiang, XIE Zheng-hui, ZHANG Gui-fang. A difference scheme and numerical simulation based on mixed finite element method for natural convection problem [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2003, **24**(9): 973-983.)
- [14] Si Z Y, He Y N. A coupled Newton iterative mixed finite element method for stationary conduction convection problems [J]. *Computing*, 2010, **89**(1/2): 1-25.
- [15] Zhang Y Z, Hou Y R, Zou H L. A posteriori error estimation and adaptive computation of conduction convection problems [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, **35**(5): 2336-2347.

- [16] Babuska I, Strouboulis T. *The Finite Element Method and Its Reliability*[M]. London: Oxford University Press, 2001.
- [17] Chen Z X. *Finite Element Methods and Their Applications*[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
- [18] Zheng H B, Hou Y R, Shi F. Adaptive variational multiscale methods for incompressible flow based on two local Gauss integrations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, **229**(19): 7030-7041.
- [19] Zheng H B, Hou Y R, Shi F. A posteriori error estimates of stabilization of low-order mixed finite elements for incompressible flow[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2010, **32**(3): 1346-1361.
- [20] 罗振东, 朱江. 定常的 Navier-Stokes 方程的非线性 Galerkin 混合元法及其后验估计[J]. *应用数学和力学*, 2002, **23**(10): 1061-1072. (LUO Zhen-dong, ZHU Jiang. A Nonlinear Galerkin mixed element method and a posteriori error estimator for the stationary Navier-Stokes equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2002, **23**(10): 1194-1206.)
- [21] Zhang Y Z, Hou Y R. Posteriori analysis of unsteady Navier-Stokes equations with the coriolis force[J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B*, 2011, **18**(2): 229-244.
- [22] Ervin V J, Layton W J, Maubach J M. Adaptive defect correction method for viscous incompressible flow problems[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2000, **37**(4): 1165-1185.
- [23] Verfürth R. *A Review of a Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*[M]. New York: Wiley-Teubner, 1996.
- [24] Berrone S. Adaptive discretization of stationary and incompressible Navier-Stokes equations by stabilized finite element methods[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **190**(34): 4435-4455.
- [25] Verfürth R. A posteriori error estimates for nonlinear problems, finite element discretizations of elliptic equations[J]. *Mathematics of Computation*, 1994, **62**(206): 445-475.
- [26] Ervin V J, Louis N Ntasin. A posteriori error estimation and adaptive computation of viscoelastic fluid flows[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2005, **21**(2): 297-322.
- [27] Du Q, Zhang J. Adaptive finite element method for a phase field bending elasticity model of vesicle membrane deformations[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2008, **30**(3): 1634-1657.
- [28] Verfürth R. A posteriori error estimators for the Stokes equations[J]. *Numerische Mathematik*, 1989, **55**(3): 309-325.
- [29] Adams R. *Sobolev Space, Pure and Applied Mathematics*[M]. New York: Academic Press, 1975.
- [30] Hou Y R, Mei L Q. Full discrete two-level correction scheme for Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2008, **26**(2): 209-226.
- [31] He Y N, Li J. Convergence of three iterative methods based on the finite element discretization for the stationary Navier-Stokes equations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, **198**(15/16): 1351-1359.
- [32] Temam R. *Navier-Stokes Equation: Theory and Numerical Analysis*[M]. Amsterdam, Oxford, New York: North-Holland, 1984.

- [33] Clément P. Approximation by finite elements using local regularization [J]. *RAIRO Anal Numér*, 1975, **2**: 77-84.
- [34] Hecht F, Pironneau O, Le Hyaric A, Ohtsuka K. FreeFem++ (Version 2.17-1) [S]. <<http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>>, 2007.

Adaptive Mixed Least Squares Galerkin/Petrov Finite Element Method for the Stationary Conduction Convection Problems

ZHANG Yun-zhang^{1, 2}, HOU Yan-ren¹, WEI Hong-bo¹

(1. *School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China;*

2. *School of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang, He'nan 471003, P. R. China*)

Abstract: An adaptive mixed least squares Galerkin/Petrov finite element method was developed for the stationary conduction convection problems. The mixed least squares Galerkin/Petrov finite element method was consistent and stable for any combination of discrete velocity and pressure spaces (without requiring a Babuška-Brezzi stability condition). Using the general theory of Verfürth, the a posteriori error estimates of residual type are derived for the problems. Finally, some numerical tests are presented to illustrate the method's efficiency.

Key words: conduction convection problems; posteriori error analysis; mixed finite element; adaptive finite element; least squares Galerkin/Petrov method