文章编号:1000-0887(2011)10-1169-13

非线性对流-扩散方程的多区域拟谱方法*

纪园园[1], 吴 华[1], 马和平[1], 郭本瑜[2]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444;
2. 上海师范大学 数学系, 上海 200240)

(戴世强推荐)

摘要: 提出了非线性对流-扩散方程的多区域拟谱方法. 在每个子区间上,该格式整体上按 Legendre-Galerkin 方法形成,但对于非线性项采用在 Legendre/Chebyshev-Gauss-Lobatto 点上的配置法处理. 通过选取适当的基函数,使得系数矩阵稀疏,并且可以并行计算,提高运算效率. 给出了该方法的稳定性和收敛性分析,获得了按 L^2- 模的最佳误差估计. 最后给出单区域和多区域方法的数值算例,并加以比较.

关 键 词: 多区域; Legendre/Chebyshev 配置; 对流-扩散方程
中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.10.004

引 言

谱方法对于求解简单区域问题十分有效[1-2],但难以直接应用到复杂区域上,多区域方法能较好地解决这一困难[3]. 它将单个区域分解成若干个子区域(必要时将每个子区域映射到参考单元),在每个子区域上分别使用谱方法. 即使对于一维问题,应用多区域法也有优势. 首先,谱配置点可以比较自由地分配,以适当调节每个子区间上的分辨率;其次,由于使用较低次数的代数多项式,因此可以改善相应代数方程组的条件数; 最后,使算法便于并行计算.

Pavoni[4] 提出了 Korteweg-de Vries 方程的单区域和多区域 Chebyshev 拟谱方法,数值算例显示了多区域方法的优势. Quarteroni[5] 给出了一类线性双曲型方程组的多区域 Chebyshev 配置方法. Funaro[6] 证明了二阶线性方程的区域分裂拟谱逼近的收敛性. Heinrichs[7] 分析了四阶问题的区域分裂谱方法. Gervasio 和 Saleri[8] 给出了 Navier-Stokes 方程的谱元法逼近的线性化稳定性分析.

本文考虑如下对流-扩散方程:

$$\begin{cases}\partial_t U + \partial_x F(U) - \nu\partial_{xx} U = f(x,t), & x \in (0,1),\ t \in (0,T],\\ U(0,t) = 0,\ U(1,t) = 0, & t \in [0,T],\\ U(x,0) = U_0(x), & x \in [0,1],\end{cases} \tag{1}$$

* **收稿日期:** 2011-05-18; **修订日期:** 2011-07-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60874039);上海市教委重点学科建设资助项目(J50101)
作者简介: 纪园园(1984—),女,河北保定安国人,硕士(E-mail:jiyuanyuan100@163.com);
马和平,教授,博士,博士生导师(联系人. Tel:+86-21-66134331; E-mail :hpma@shu.edu.cn).

这里 $F(z) \in C^1(\mathbf{R})$ 且 $\nu > 0$. 我们给出问题(1)的多区域 Legendre 拟谱和 Legendre-Galerkin Chebyshev 配置格式. 在每个小区间上,该格式整体上按 Legendre-Galerkin 方法形成,而非线性项在 Legendre/Chebyshev-Gauss-Lobatto 点上插值. 引入适当的基函数[9-11],使得系数矩阵稀疏,并且可以并行计算. 特别是 Legendre-Galerkin Chebyshev 配置法,结合了 Legendre 方法具有良好稳定性和 Chebyshev 配置法可借助快速变换计算的优点,实际计算更加有效. 本文证明了该方法的稳定性,并且得到了具最优阶的误差估计. 最后给出了一些数值算例,通过单区域方法和多区域方法的比较,可看出多区域方法具有一定的优势.

本文安排如下: 第 1 节提出对流-扩散方程的多区域 Legendre 拟谱和 Legendre-Galerkin Chebyshev 配置方法,并简单描述了算法的实施. 第 2 节给出与多区域 Legendre/Chebyshev 投影算子相关的一些逼近结果. 第 3 节和第 4 节分析多区域 Legendre 拟谱和 Legendre-Galerkin Chebyshev 配置方法的稳定性和收敛性. 第 5 节列出一些数值结果. 最后给出结论.

1 记号与格式

本节先引进一些记号,然后给出多区域拟谱格式. 令 M 为正整数,将区间 $I=(0,1)$ 分解为 M 个子区间: $I_i=(a_{i-1},a_i)$, $i=1,2,\cdots,M$, 这里

$$0=a_0<a_1<\cdots<a_M=1.$$

记 $(\cdot,\cdot)_\Omega$ 和 $\|\cdot\|_\Omega$ 分别为空间 $L^2(\Omega)$ 的内积和范数. 设 σ 为非负整数,记 $H^\sigma(\Omega)$ 和 $H_0^\sigma(\Omega)$ 为通常的 Sobolev 空间,定义 $H^{-\sigma}(\Omega)=(H_0^\sigma(\Omega))'$ 为对偶空间,并配以范数 $\|\cdot\|_{\Omega,\sigma}$ 和半范数 $|\cdot|_{\Omega,\sigma}$(当 $\Omega=I$ 时,省去下标 Ω). 对任意正整数 N_i, $\mathbb{P}_{N_i}$ 表示次数不超过 N_i 的多项式组成的空间. $\hat{x}_j^i$ 和 $\hat{\omega}_j^i(0\leqslant j\leqslant N_i)$ 分别为参考区间 $\hat{I}=(-1,1)$ 上的 Legendre-Gauss-Lobatto 求积节点和相应的权. 令 $\boldsymbol{N}=(N_1,N_2,\cdots,N_M)$. 定义 $h_i=a_i-a_{i-1}$ 和

$$I_{\boldsymbol{N}}^i=\left\{x_j^i:\ x_j^i=\frac{h_i\hat{x}_j^i+a_{i-1}+a_i}{2},\ 0\leqslant j\leqslant N_i\right\}.$$

由文献[2],对次数不超过 $2N_i-1$ 的多项式 $v(x)$, 有

$$\int_{I_i}v(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{N_i}v(x_j^i)\omega_j^i,\qquad \forall v\in\mathbb{P}_{2N_i-1}, \tag{2}$$

其中 $\omega_j^i=h_i\hat{\omega}_j^i/2$. 同样,记 $\hat{x}_j^{i,\mathrm{C}},\hat{\omega}_j^{i,\mathrm{C}},x_j^{i,\mathrm{C}},\omega_j^{i,\mathrm{C}}$ 为 Chebyshev-Gauss-Lobatto 求积节点和相应的权. 记 $v^i\equiv v|_{I_i}$. 对任意的 $u,v\in C(\bar{I})$, 定义

$$(u,v)_{\boldsymbol{N},I_i}=\sum_{j=0}^{N_i}u^i(x_j^i)v^i(x_j^i)\omega_j^i,\ (u,v)_{\boldsymbol{N}}=\sum_{i=1}^{M}(u,v)_{\boldsymbol{N},I_i},\ \|v\|_{\boldsymbol{N}}=(v,v)_{\boldsymbol{N}}^{1/2}.$$

定义逼近空间为

$$V_{\boldsymbol{N}}=\{v\in H^1(I):\ v|_{I_i}\in\mathbb{P}_{N_i},\ 1\leqslant i\leqslant M\},\ V_{\boldsymbol{N}}^0=V_{\boldsymbol{N}}\cap H_0^1(I).$$

令 τ 为表示时间 t 方向步长, $S_\tau=\{k\tau:\ k=1,2,\cdots,n_t,\ t=n_t\tau\}$. 定义

$$v_{\hat{t}}(t)=\frac{v(t+\tau)-v(t-\tau)}{2\tau},\ \bar{v}(t)=\frac{1}{2}[v(t+\tau)+v(t-\tau)].$$

方程(1)的弱形式为: 寻找 $U(t)\in H_0^1(I)$, 使得

$$\begin{cases}(\partial_t U,V)+(\partial_x F(U),V)+\nu(\partial_x U,\partial_x V)=(f,V), & \forall V\in H_0^1(I),\ t>0,\\ U(0)=U_0.\end{cases} \tag{3}$$

方程(3)的全离散多区域拟谱逼近为：寻找 $u(t) \in V_N^0$，使得

$$\begin{cases}(u_{\hat{t}},v)+(\partial_x I_N F(u),v)+\nu(\partial_x\bar{u},\partial_x v)=(I_N\bar{f},v), & \forall v\in V_N^0,\ t\in S_{T-\tau},\\ u(\tau)=I_N(U_0+\tau\partial_t U(0)),\\ u(0)=I_N U_0,\end{cases}\tag{4}$$

其中谱逼近算子 I_N 为下面定义中的一个：

· $I_N^{\mathrm{L}}: C(\bar{I})\to V_N$ 为 Legendre-Gauss-Lobatto 插值算子，满足

$$I_N^{\mathrm{L}} v(x_j^i)=v(x_j^i),\qquad 0\leqslant j\leqslant N_i,\ 1\leqslant i\leqslant M,$$

· $I_N^{\mathrm{C}}: C(\bar{I})\to V_N$ 为 Chebyshev-Gauss-Lobatto 插值算子，满足

$$I_N^{\mathrm{C}} v(x_j^{i,\mathrm{C}})=v(x_j^{i,\mathrm{C}}),\qquad 0\leqslant j\leqslant N_i,\ 1\leqslant i\leqslant M.$$

接下来简单地描述格式(4)的实施过程. 每一时间层的方程可写为

$$A_N(u(t+\tau),v)=g_N(v),\qquad \forall v\in V_N^0,$$

这里

$$A_N(u,v):=(u,v)+\tau\nu(\partial_x u,\partial_x v),$$
$$g_N(v):=(u(t-\tau),v)-\tau\nu(\partial_x u(t-\tau),\partial_x v)-2\tau(\partial_x I_N F(u),v)+2\tau(I_N\bar{f}(t),v).$$

定义 L_l 为 l 次 Legendre 多项式. 基函数的选取类似于文献[9-11]，对于 $i=1,2,\cdots,M$ 和 $l=0,1,\cdots,N_i-2$，定义

$$\phi_l^{(i)}(x)=\begin{cases}L_l(\hat{x})-L_{l+2}(\hat{x}), & x=\dfrac{h_i\hat{x}+a_{i-1}+a_i}{2}\in[a_{i-1},a_i],\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$\{\phi_l^{(i)}(x)|_{I_i}\}_{l=0}^{N_i-2}$ 构成空间 $S_{0,N_i}^{(i)}:=\mathbb{P}_{N_i}\cap H_0^1(I_i)$ 的基函数. 对于 $i=1,2,\cdots,M-1$，令

$$\phi^{(i)}(x)=\begin{cases}(L_0(\hat{x})+L_1(\hat{x}))/2, & x=\dfrac{h_i\hat{x}+a_{i-1}+a_i}{2}\in[a_{i-1},a_i],\\ (L_0(\hat{x})-L_1(\hat{x}))/2, & x=\dfrac{h_{i+1}\hat{x}+a_i+a_{i+1}}{2}\in(a_i,a_{i+1}],\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

且 $\phi^{(0)}(x)=\phi^{(M)}(x)\equiv 0$. 未知函数 $w(x):=u(x,t+\tau)\in V_N^0$ 可表示为

$$w(x)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{l=0}^{N_i-2}c_l^{(i)}\phi_l^{(i)}(x)+\sum_{i=0}^{M}u_i\phi^{(i)}(x),\tag{5}$$

这里 $u_i=w(a_i)=u(a_i,t+\tau)$. 因此，$v^{(i)}(x):=\sum_{l=0}^{N_i-2}c_l^{(i)}\phi_l^{(i)}(x)$ 满足

$$A_N(v^{(i)},\phi_l^{(i)})=g_N(\phi_l^{(i)})-u_{i-1}A_N(\phi^{(i-1)},\phi_l^{(i)})-u_iA_N(\phi^{(i)},\phi_l^{(i)}),\qquad 0\leqslant l\leqslant N_i-2.\tag{6}$$

首先求 $v_m^{(i)}=\sum_{l=0}^{N_i-2}c_{ml}^{(i)}\phi_l^{(i)}(x)$ $(m=0,1,2)$ 使得

$$A_N(v_0^{(i)},\phi_l^{(i)})=g_N(\phi_l^{(i)}),\qquad 0\leqslant l\leqslant N_i-2,\tag{7}$$
$$A_N(v_1^{(i)},\phi_l^{(i)})=-A_N(\phi^{(i-1)},\phi_l^{(i)}),\qquad 0\leqslant l\leqslant N_i-2,\tag{8}$$
$$A_N(v_2^{(i)},\phi_l^{(i)})=-A_N(\phi^{(i)},\phi_l^{(i)}),\qquad 0\leqslant l\leqslant N_i-2.\tag{9}$$

因此式(6)的解可表示为

$$v^{(i)}=v_0^{(i)}+u_{i-1}v_1^{(i)}+u_iv_2^{(i)}.$$

显然,方程(7)、(8)和(9)可以在每个子区间 I_i 上分别求解,可以并行计算.方程组的系数矩阵可以奇偶分开成三对角阵[10].注意式(8)和(9)两个方程与时间无关,只需求解一次.由式(5)可得

$$w(x)=\sum_{i=1}^{M}(v_0^{(i)}(x)+u_{i-1}v_1^{(i)}(x)+u_iv_2^{(i)}(x))+\sum_{i=1}^{M-1}u_i\phi^{(i)}(x)=$$
$$\sum_{i=1}^{M}v_0^{(i)}(x)+\sum_{i=1}^{M-1}(v_1^{(i+1)}(x)+v_2^{(i)}(x)+\phi^{(i)}(x))u_i.$$

最后,可以通过下面方程求得 u_i:

$$\sum_{j=1}^{M-1}A_{\boldsymbol{N}}(v_1^{(j+1)}+v_2^{(j)}+\phi^{(j)},\phi^{(i)})u_j=g_{\boldsymbol{N}}(\phi^{(i)})-\sum_{j=1}^{M}A_{\boldsymbol{N}}(v_0^{(j)},\phi^{(i)}),\tag{10}$$

其中系数矩阵是三对角的,因为对于 $i=1,2,\cdots,M$, 有

$$\mathrm{supp}v_m^{(i)}\subset(a_{i-1},a_i),\ m=0,1,2,\text{并且 }\mathrm{supp}\phi^{(i)}\subset(a_{i-1},a_{i+1}).$$

2 预备知识

本节主要给出与多区域相关的谱逼近结果,以及在稳定性和收敛性分析中需要的一些引理.首先建立如下对应:

$$v(x)=\hat v(\hat x),\ x=\frac{1}{2}(h_i\hat x+a_{i-1}+a_i),\qquad a_{i-1}\leqslant x\leqslant a_i.\tag{11}$$

令 $\hat P_{N_i}:L^2(\hat I)\to\mathbb{P}_{N_i}$ 为 Legendre 投影算子,及

$$\hat P_{1,N_i}\hat v(\hat x)=\hat v(-1)+\int_{-1}^{\hat x}\hat P_{N_{i-1}}\partial_{\hat x}\hat v(y)\mathrm{d}y.$$

$P_{1,\boldsymbol{N}}$ 是由 $P_{1,N_i}^i:H^1(I_i)\to\mathbb{P}_{N_i}$ 产生的投影算子,满足

$$(P_{1,\boldsymbol{N}}u)|_{I_i}(x)\equiv P_{1,N_i}^iu^i(x)=\hat P_{1,N_i}\hat u^i(\hat x).\tag{12}$$

令 $\hat\Pi_{N_i}:C(\bar I)\to\mathbb{P}_{N_i}$为定义在点 $\hat x_j^i(0\leqslant j\leqslant N_i)$ 上的 Legendre 插值算子.显然

$$(\widehat{I_{\boldsymbol{N}}v})^i=\hat\Pi_{N_i}\hat u^i.\tag{13}$$

引入分段 Sobolev 空间

$$\tilde H^\sigma(I)=\{v:v^i\equiv v|_{I_i}\in H^\sigma(I_i),1\leqslant i\leqslant M\},$$

其上的半模定义为

$$|v|_{\tilde H^\sigma(I)}=\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant M}|v^i|_{\sigma,I_i}^2\right)^{1/2}.$$

定义

$$\hbar_i=\max_{1\leqslant i\leqslant M}h_iN_i^{-1}.$$

设 C 为与 h_i,N_i 及其他函数无关的正整数.下列引理可见文献[2,12-14].

引理 1 若 $v\in H^\sigma(\hat I)$, 则

$$\|\hat P_{N_i}v-v\|_{\hat I}\leqslant CN_i^{-\sigma}|v|_{\sigma,\hat I},\qquad\sigma\geqslant0,\tag{14}$$

$$|\hat P_{1,N_i}v-v|_{l,\hat I}\leqslant CN_i^{l-\sigma}|v|_{\sigma,\hat I},\qquad\sigma\geqslant1,\ 0\leqslant l\leqslant1,\tag{15}$$

$$|\hat{\Pi}_{N_i} v - v|_{l,\hat{I}} \leqslant C N_i^{l-\sigma} |v|_{\sigma,\hat{I}}, \qquad \sigma \geqslant 1,\ 0 \leqslant l \leqslant 1. \tag{16}$$

引理2 若 $v \in H^{\sigma}(I_i)$，则

$$|\hat{v}|_{\sigma,\hat{I}} \leqslant C h_i^{\sigma-1/2} |v|_{\sigma,I_i},\ |v|_{\sigma,I_i} \leqslant C h_i^{1/2-\sigma} |\hat{v}|_{\sigma,\hat{I}}. \tag{17}$$

引理3 若 $v \in \tilde{H}^{\sigma}(I)\ (\sigma \geqslant 1)$，则

$$|I_N v - v|_{\tilde{H}^l(I)} \leqslant C \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant M} \hbar_i^{2(\sigma-l)} |v^i|_{\sigma,I_i}^2 \right)^{1/2}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant 1, \tag{18}$$

$$|P_{1,N} v - v|_{\tilde{H}^l(I)} \leqslant C \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant M} \hbar_i^{2(\sigma-l)} |v^i|_{\sigma,I_i}^2 \right)^{1/2}, \qquad -1 \leqslant l \leqslant 1. \tag{19}$$

引理4 若 $v \in V_N$，则

$$\|v\| \leqslant \|v\|_N \leqslant \sqrt{3}\,\|v\|. \tag{20}$$

3 稳定性和收敛性

本节考虑多区域 Legendre 拟谱方法的稳定性和收敛性。首先考虑稳定性。假设 u 以及式(4)的右端项误差分别为 $\tilde{u} \in V_N^0$ 和 $\tilde{f}$。由式(4)，得

$$(\tilde{u}_{\hat{t}}, v) - (\tilde{F}, \partial_x v)_N + \nu(\partial_x \bar{\tilde{u}}, \partial_x v) = (I_N^{\mathrm{L}} \tilde{f}, v), \qquad \forall v \in V_N^0,\ t \in S_{T-\tau}, \tag{21}$$

其中 $\tilde{F} = F(u + \tilde{u}) - F(u)$。在式(21)中取 $v = \bar{\tilde{u}}$，再关于 $s \in S_{t-\tau}$ 求和，可得

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u}(t)\|^2 + \|\tilde{u}(t-\tau)\|^2 + 4\tau\nu \sum_{s \in S_{t-\tau}} |\bar{\tilde{u}}(s)|_1^2 \leqslant \\
&\quad \|\tilde{u}(0)\|^2 + \|\tilde{u}(\tau)\|^2 + \\
&\quad 4\tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} \{ (I_N^{\mathrm{L}} \tilde{f}(s), \bar{\tilde{u}}(s)) + (\tilde{F}(s), \partial_x \bar{\tilde{u}}(s))_N \}.
\end{aligned} \tag{22}$$

利用 Cauchy 不等式得

$$|4(I_N^{\mathrm{L}} \tilde{f}(s), \bar{\tilde{u}}(s))| \leqslant 3\|\tilde{f}(s)\|_N^2 + \frac{1}{2}\|\tilde{u}(s+\tau)\|^2 + \|\tilde{u}(s-\tau)\|^2.$$

为了估计非线性项，定义

$$u_{\mathrm{M}} = \max_{s \in S_{T-\tau}} \|u(s)\|_{L^\infty(I)},\ F_{\mathrm{M}}(z_1, z_2) = \max_{|z| \leqslant |z_1| + |z_2|} |\partial_z F(z)|. \tag{23}$$

令 C_0 为正常数，对任意给定的 $\tau < t \in S_T$，如果

$$\|\tilde{u}(s)\|_{L^\infty(I)} \leqslant C_0, \qquad \forall s \in s_{t-\tau},$$

那么由式(20)，对任意的 $s \in S_{t-\tau}$，可得

$$\begin{aligned}
&|4(\tilde{F}(s), \partial_x \bar{\tilde{u}}(s))_N| \leqslant 2|\bar{\tilde{u}}(s)|_1^2 + 2\|\tilde{F}(s)\|_N^2 \leqslant \\
&\quad 2|\bar{\tilde{u}}(s)|_1^2 + 2F_{\mathrm{M}}(u_{\mathrm{M}}, C_0)\|\tilde{u}(s)\|^2.
\end{aligned}$$

假设 $\tau \leqslant 1$，由上式可得

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u}(t)\|^2 + \tau\nu \sum_{s \in S_{t-\tau}} |\bar{\tilde{u}}(s)|_1^2 \leqslant \\
&\quad C\left(\|\tilde{u}(0)\|^2 + \|\tilde{u}(\tau)\|^2 + \tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} \|\tilde{f}(s)\|_N^2 + \tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} \|\tilde{u}(s)\|^2 \right).
\end{aligned}$$

令

$$\rho(t) = C(\|\tilde{u}(0)\|^2 + \|\tilde{u}(\tau)\|^2 + \tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} \|\tilde{f}(s)\|_N^2),$$

$$E(t) = \| \tilde{u}(t) \|^2 + \tau\nu \sum_{s \in S_{t-\tau}} | \bar{\tilde{u}}(s) |_1^2,$$

则

$$E(t) \leqslant \rho(t) + C\tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} E(s), \tag{24}$$

这里 C 为依赖于 $F_{\mathrm{M}}(u_{\mathrm{M}}, C_0)$ 的正常数. 对任意的 $v \in V_N$, 由逆不等式(见文献[1]中定理2.7)可得

$$\| v \|_{L^\infty(I)} \leqslant \sqrt{6}\bar{N} \| v \|, \quad \bar{N} = \max_{1 \leqslant i \leqslant M} \frac{N_i}{\sqrt{h_i}}. \tag{25}$$

现在给出下面的稳定性定理.

定理 1 令 τ 足够小(但与 N 无关),那么存在依赖于 $F_{\mathrm{M}}(u_{\mathrm{M}}, C_0)$ 的正常数 C,如果 $\rho(T) \leqslant C_0 \mathrm{e}^{-CT}/(6\bar{N}^2)$, 则

$$E(t) \leqslant \rho(t)\mathrm{e}^{Ct}, \qquad \forall t \in S_T.$$

证明 采用归纳法进行证明. 容易看出,

$$E(t) \leqslant \rho(t)\mathrm{e}^{Ct}, \qquad t = 0, \tau.$$

假设对 $t \in S_T$, 有

$$E(s) \leqslant \rho(s)\mathrm{e}^{Cs}, \qquad \forall s \in s_{t-\tau}.$$

那么由逆不等式的性质(25),可得

$$\| \tilde{u}(s) \|_{L^\infty(I)}^2 \leqslant 6\bar{N}^2 \| \tilde{u}(s) \|^2 \leqslant 6\bar{N}^2 \rho(s)\mathrm{e}^{Cs} \leqslant C_0, \qquad \forall s \in s_{t-\tau}.$$

因此,由式(24),得到

$$E(t) \leqslant \rho(t) + C\tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} E(s) \leqslant \rho(t) + C\tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} \rho(s)\mathrm{e}^{Cs} \leqslant$$
$$\rho(t)\left(1 + C\tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} \mathrm{e}^{Cs}\right) \leqslant \rho(t)\mathrm{e}^{Ct},$$

定理 1 得证.

接下来考虑格式(4)的收敛性.

定理 2 令 U 和 u 分别为式(3)和(4)的解. 假设 $\sigma \geqslant 1$, $U \in C(0,T;H_0^1(I) \cap H^\sigma(I)) \cap H^1(0,T;H_0^1(I) \cap H^{\sigma-1}(I)) \cap C^2(0,T;L^2(I)) \cap H^3(0,T;H^{-1}(I))$, $\partial_t U(0) \in H^1(I) \cap H^{\sigma/2}(I)$, $F(z) \in C^2(\mathbf{R}) \cap C^\sigma(\mathbf{R})$ 和 $f \in C(0,T;H^\sigma(I))$. 那么存在正常数 C 和 δ,使得如果 τ 适当小且 $\tau^2 + \hbar^\sigma \leqslant \delta\bar{N}^{-1}$, 则

$$\| u(t) - U(t) \| \leqslant C(\tau^2 + \hbar^\sigma), \qquad \forall t \in S_T. \tag{26}$$

证明 记 $u^* = P_{1,N}U$ 和 $\eta = u - u^*$. 从式(3)、(4)和(12),得到

$$\begin{cases} (\eta_{\hat{t}}, v) - (\tilde{G}, \partial_x v)_N + \nu(\partial_x \bar{\eta}, \partial_x v) = \tilde{g}(v), & \forall v \in V_N^0,\ t \in S_{T-\tau}, \\ \eta(\tau) = I_N^{\mathrm{L}}(U_0 + \tau\partial_t U(0)) - P_{1,N}U(\tau), \\ \eta(0) = I_N^{\mathrm{L}} U_0 - P_{1,N}U_0, \end{cases} \tag{27}$$

记

$$v(s)_{t\bar{t}} := \frac{1}{\tau^2}(v(s+\tau) - 2v(s) + v(s-\tau)),$$

$$\tilde{G} := F(\eta + u^*) - F(u^*),$$

$$\tilde{g}(v) := (\partial_t \bar{U} - u^*_{\hat{t}}, v) + \left(\partial_x \left[F(U) + \frac{\tau^2}{2} F(U)_{t\bar{t}} - I_N^{\mathrm{L}} F(u^*)\right], v\right) + (I_N^{\mathrm{L}} \bar{f} - \bar{f}, v) =:$$

$$\tilde{g}_1(v) + \tilde{g}_2(v) + \tilde{g}_3(v).$$

由式(19),可得

$$|\tilde{g}_1(v)| = |(\partial_t \bar{U} - U_{\hat{t}} + U_{\hat{t}} - P_{1,N} U_{\hat{t}}, v)| \leqslant$$

$$C(\|\partial_t \bar{U} - U_{\hat{t}}\|_{H^{-1}(I)} + \hbar^\sigma |U_{\hat{t}}|_{H^{\max\{1,\sigma-1\}}(I)})^2 + \frac{1}{3}|v|_1^2.$$

需要估计

$$\tau \sum_{s \in S_{T-\tau}} \|\partial_t \bar{U} - U_{\hat{t}}\|_{H^{-1}(I)}^2 \leqslant C\tau^4 \|\partial_t^3 U\|_{L^2(0,T;H^{-1}(I))}^2,$$

$$\tau \sum_{s \in S_{T-\tau}} |U_{\hat{t}}|_{H^{\max\{1,\sigma-1\}}(I)}^2 \leqslant C\|\partial_t U\|_{L^2(0,T;H^{\max\{1,\sigma-1\}}(I))}^2.$$

显然

$$|\tilde{g}_2(v)| \leqslant C(\|F(U) - I_N^{\mathrm{L}} F(u^*)\|^2 + \tau^4 \|F(U)_{t\bar{t}}\|^2) + \frac{1}{3}|v|_1^2.$$

引入类似于式(23)中的记号 $F_{\mathrm{M}}(z_1, z_2)$, 得到

$$\|F(U) - I_N^{\mathrm{L}} F(u^*)\| \leqslant \|F(U) - I_N^{\mathrm{L}} F(U)\| + \|F(U) - F(u^*)\|_N \leqslant$$

$$C\hbar^\sigma |F(U)|_{H^\sigma(I)} + CF_{\mathrm{M}}(\|U\|_{L^\infty(I)}, \|u^*\|_{L^\infty(I)})\hbar^\sigma |U|_{H^\sigma(I)}.$$

注意到 $\|u^*\|_{L^\infty(I)} \leqslant C\|u^*\|_1 \leqslant C\|U\|_1$. 又 $F(z) \in C^2(\mathbf{R})$, 因此

$$\tau \sum_{s \in S_{T-\tau}} \|F(U(t))_{t\bar{t}}\|^2 \leqslant C\tau \sum_{s \in S_{T-\tau}} \|U(t)_{t\bar{t}}\|^2 \leqslant C\|\partial_t^2 U\|_{L^2(0,T;L^2(I))}^2.$$

同理,对于 $\tilde{g}_3(v)$, 可得到如下估计式:

$$|\tilde{g}_3(v)| \leqslant C\|I_N^{\mathrm{L}} \bar{f} - \bar{f}\|^2 + \|v\|^2 \leqslant C\hbar^\sigma |\bar{f}|_{H^\sigma(I)}^2 + \|v\|^2.$$

对初始误差,由式(18)和(19)可得

$$\|\eta(0)\| \leqslant \|(I - P_{1,N})U_0\| + \|(I - I_N^{\mathrm{L}})U_0\| \leqslant C\hbar^\sigma |U_0|_{H^\sigma(I)},$$

由 Taylor 公式,得到

$$\|\eta(\tau)\| \leqslant \|(I - I_N^{\mathrm{L}})U_0\| + \tau\|(I - I_N^{\mathrm{L}})\partial_t U(0)\| +$$

$$\tau^2 \|\partial_t^2 U\|_{C(0,\tau;L^2(I))} + \|(I - P_{1,N})U(\tau)\| \leqslant$$

$$C(\tau^2 \|\partial_t^2 U\|_{C(0,\tau;L^2(I))} + \tau\hbar^{\sigma/2} \|\partial_t U(0)\|_{H^{\max\{1,\sigma/2\}}(I)} + \hbar^\sigma \|U\|_{C(0,\tau;H^\sigma(I))}).$$

类似定理 1 的证明,即得到收敛性定理.

4 多区域 Legendre-Galerkin Chebyshev 配置方法

本节对方程(3)的全离散多区域 Legendre-Galerkin Chebyshev 配置方法进行稳定性和收敛性分析. 该方法写为:寻找 $u(t) \in V_N^0$ 使得

$$\begin{cases} (u_{\hat{t}}, v) + (\partial_x I_N^{\mathrm{C}} F(u), v) + \nu(\partial_x \bar{u}, \partial_x v) = (I_N^{\mathrm{C}} \bar{f}, v), \quad \forall v \in V_N^0,\ t \in S_{T-\tau}, \\ u(\tau) = I_N^{\mathrm{C}}(U_0 + \tau \partial_t U(0)), \\ u(0) = I_N^{\mathrm{C}} U_0. \end{cases} \tag{28}$$

由方程(28),可得误差方程为

$$(\tilde{u}_{\hat{t}}, v) + (\partial_x I_N^{\mathrm{C}} \tilde{F}, v) + \nu(\partial_x \bar{\tilde{u}}, \partial_x v) = (I_N^{\mathrm{C}} \tilde{f}, v), \quad \forall v \in V_N^0,\ t \in S_{T-\tau}, \tag{29}$$

其中 $\tilde{F} = F(u + \tilde{u}) - F(u)$.

在方程(29)中取 $v = \bar{\tilde{u}}$,并关于 $s \in S_{t-\tau}$ 求和,得到

$$
\begin{aligned}
&\| \tilde{u}(t) \|^2 + \| \tilde{u}(t-\tau) \|^2 + 4\tau\nu \sum_{s \in S_{t-\tau}} | \bar{\tilde{u}}(s) |_1^2 \leqslant \\
&\quad \| \tilde{u}(0) \|^2 + \| \tilde{u}(\tau) \|^2 + \\
&\quad 4\tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} \{ (I_N^{\mathrm{C}} \tilde{f}(s), \bar{\tilde{u}}(s)) + (I_N^{\mathrm{C}} \tilde{F}(s), \partial_x \bar{\tilde{u}}(s)) \}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

利用 Cauchy 不等式得

$$
| 4(I_N^{\mathrm{C}} \tilde{f}(s), \bar{\tilde{u}}(s)) | \leqslant \frac{4}{\nu} \| I_N^{\mathrm{C}} \tilde{f}(s) \|_{-1}^2 + \nu | \bar{\tilde{u}}(s) |_1^2,
$$

$$
| 4(I_N^{\mathrm{C}} \tilde{F}(s), \partial_x \bar{\tilde{u}}(s)) | \leqslant \frac{4}{\nu} \| I_N^{\mathrm{C}} \tilde{F}(s) \|^2 + \nu | \bar{\tilde{u}}(s) |_1^2.
$$

与 Legendre 方法不同的是,在这里需要结合 H^1 的误差估计,以得到理想结果. 在方程(29)中取 $v = \tilde{u}_{\hat{t}}$,并关于 $s \in S_{t-\tau}$ 求和,可得

$$
\begin{aligned}
&\nu | \tilde{u}(t) |_1^2 + \nu | \tilde{u}(t-\tau) |_1^2 + 4\tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} \| \tilde{u}_{\hat{t}}(s) \|^2 \leqslant \\
&\quad \nu | \tilde{u}(0) |_1^2 + \nu | \tilde{u}(\tau) |_1^2 + \\
&\quad 4\tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} \{ (I_N^{\mathrm{C}} \tilde{f}(s), \tilde{u}_{\hat{t}}(s)) - (\partial_x I_N^{\mathrm{C}} \tilde{F}(s), \tilde{u}_{\hat{t}}(s)) \}.
\end{aligned} \tag{31}
$$

利用 Cauchy 不等式得

$$
| 4(I_N^{\mathrm{C}} \tilde{f}(s), \tilde{u}_{\hat{t}}(s)) | \leqslant 4 \| I_N^{\mathrm{C}} \tilde{f}(s) \|^2 + \| \tilde{u}_{\hat{t}}(s) \|^2,
$$

$$
| 4(\partial_x I_N^{\mathrm{C}} \tilde{F}(s), \tilde{u}_{\hat{t}}(s)) | \leqslant 4 | I_N^{\mathrm{C}} \tilde{F}(s) |_1^2 + \| \tilde{u}_{\hat{t}}(s) \|^2.
$$

将式(31)乘以因子 $\hbar^2$, 并与式(30)相加,得到

$$
\begin{aligned}
&\| \tilde{u}(t) \|^2 + \hbar^2 \nu | \tilde{u}(t) |_1^2 + \| \tilde{u}(t-\tau) \|^2 + \hbar^2 \nu | \tilde{u}(t-\tau) |_1^2 + \\
&\quad 2\tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} (\nu | \bar{\tilde{u}}(s) |_1^2 + \hbar^2 \| \tilde{u}_{\hat{t}}(s) \|^2) \leqslant \\
&\quad \| \tilde{u}(0) \|^2 + \hbar^2 \nu | \tilde{u}(0) |_1^2 + \| \tilde{u}(\tau) \|^2 + \hbar^2 \nu | \tilde{u}(\tau) |_1^2 + \\
&\quad C\tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} (\| I_N^{\mathrm{C}} \tilde{f}(s) \|_{-1}^2 + \hbar^2 \| I_N^{\mathrm{C}} \tilde{f}(s) \|^2) + \\
&\quad C\tau \sum_{s \in S_{t-\tau}} (\| I_N^{\mathrm{C}} \tilde{F}(s) \|^2 + \hbar^2 | I_N^{\mathrm{C}} \tilde{F}(s) |_1^2).
\end{aligned} \tag{32}
$$

引进记号

$$
\begin{cases}
u_{\mathrm{M}} = \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant T} \{ \| u(s) \|_{L^\infty(I)} + \| \partial_x u(s) \|_{L^\infty(I)} \}, \\
C_F(z_1, z_2) = \max\limits_{|z| \leqslant |z_1| + |z_2|} | \partial_z F(z) | + (| z_1 | + | z_2 |) \max\limits_{|z| \leqslant |z_1| + |z_2|} | \partial_z^2 F(z) |.
\end{cases} \tag{33}
$$

令 C_0 为正常数,如果

$$
\| \tilde{u}(s) \|_{L^\infty(I)} \leqslant C_0, \qquad \forall s \in s_{t-\tau}, \tag{34}
$$

那么对于非线性项,由式(18)可得

$$
\begin{aligned}
&\| I_N^{\mathrm{C}} \tilde{F} \| + \hbar | I_N^{\mathrm{C}} \tilde{F} |_1 \leqslant \| \tilde{F} \| + \| I_N^{\mathrm{C}} \tilde{F} - \tilde{F} \| + \hbar | I_N^{\mathrm{C}} \tilde{F} |_1 \leqslant \\
&\quad \| \tilde{F} \| + C\hbar | \tilde{F} |_1 = \left\| \int_0^1 F'(u + \theta \tilde{u}) \tilde{u} \, \mathrm{d}\theta \right\| +
\end{aligned}
$$

$$C\hbar\left\|\int_0^1(F''(u+\theta\tilde{u})(\partial_x u+\theta\partial_x\tilde{u})\tilde{u}+F'(u+\theta\tilde{u})\partial_x\tilde{u})\mathrm{d}\theta\right\|\leqslant$$
$$C_F(u_{\mathrm{M}},C_0)(\|\tilde{u}\|+\hbar|\tilde{u}|_1).\tag{35}$$

记

$$E(t,\tilde{u})=\|\tilde{u}(t)\|^2+\hbar^2\nu|\tilde{u}(t)|_1^2+2\tau\sum_{s\in S_{t-\tau}}(\nu|\bar{\tilde{u}}(s)|_1^2+\hbar^2\|\tilde{u}_{\hat{t}}(s)\|^2),$$

$$\rho(t,\tilde{u},\tilde{f})=\|\tilde{u}(0)\|^2+\hbar^2\nu|\tilde{u}(0)|_1^2+\|\tilde{u}(\tau)\|^2+\hbar^2\nu|\tilde{u}(\tau)|_1^2+$$
$$C\tau\sum_{s\in S_{t-\tau}}(\|I_N^{\mathrm{C}}\tilde{f}(s)\|_{-1}^2+\hbar^2\|I_N^{\mathrm{C}}\tilde{f}(s)\|^2).$$

这样,就证明了对任意 $t\in S_T$, 如果式(34)成立,则

$$E(t,\tilde{u})\leqslant\rho(t,\tilde{u},\tilde{f})+C\tau\sum_{s\in S_{t-\tau}}E(s,\tilde{u}),\tag{36}$$

这里 C 为依赖于 $C_F(u_{\mathrm{M}},C_0)$ 和 ν^{-1}的正常数.

类似定理 1 的证明,得到下面的稳定性定理.

定理 3 令 τ 足够小(但与 N 无关),若$\rho(T,\tilde{u},\tilde{f})\leqslant C_0\mathrm{e}^{-CT}/(6\bar{N}^2)$, 则

$$E(t,\tilde{u})\leqslant\rho(t,\tilde{u},\tilde{f})\mathrm{e}^{Ct},\qquad\forall t\in S_T.\tag{37}$$

接下考虑格式(28)的收敛性.

定理 4 令 U 和 u 分别为方程(3)和(28)的解. 假设$\sigma\geqslant 2$, $U\in C(0,T;H_0^1(I)\cap H^\sigma(I))\cap H^1(0,T;H_0^1(I)\cap H^{\sigma-1}(I))\cap H^2(0,T;H^1(I))\cap H^3(0,T;L^2(I))$, $\partial_t U(0)\in H^{\sigma/2}(I)$, $F(z)\in C^{\max\{3,\sigma\}}(\mathbf{R})$ 和 $f\in C(0,T;H^\sigma(I))$. 那么存在正常数 C 和 δ,使得如果 τ 适当小且 $\tau^2+\hbar^\sigma\leqslant\delta\bar{N}^{-1}$, 则

$$\|u(t)-U(t)\|\leqslant C(\tau^2+\hbar^\sigma),\qquad\forall t\in S_T.\tag{38}$$

证明 令 $u^*=P_{1,N}U$ 和 $\eta=u-u^*$. 由式(3)和(28)可得

$$\begin{cases}(\eta_{\hat{t}},v)+(\partial_x I_N^{\mathrm{C}}\tilde{G},v)+\nu(\partial_x\bar{\eta},\partial_x v)=(\tilde{g},v), & \forall v\in V_N^0,\ t\in S_{T-\tau},\\ \eta(\tau)=I_N^{\mathrm{C}}(U_0+\tau\partial_t U(0))-P_{1,N}U(\tau),\\ \eta(0)=I_N^{\mathrm{C}}U_0-P_{1,N}U_0.\end{cases}\tag{39}$$

引进记号

$$v(s)_{t\bar{t}}:=\frac{1}{\tau^2}(v(s+\tau)-2v(s)+v(s-\tau)),$$

$$\tilde{G}=F(u^*+\eta)-F(u^*),$$

$$\tilde{g}=\partial_t\bar{U}-u_{\hat{t}}^*+\partial_x\left[F(U)+\frac{\tau^2}{2}F(U)_{t\bar{t}}-I_N^{\mathrm{C}}F(u^*)\right]+I_N^{\mathrm{C}}\bar{f}-\bar{f}.$$

我们仅需估计$\rho(t,\eta,\tilde{g})$. 将 $\tilde{g}$ 分解为

$$\tilde{g}=(\partial_t\bar{U}-U_{\hat{t}})+(U_{\hat{t}}-u_{\hat{t}}^*)+\partial_x(F(U)-I_N^{\mathrm{C}}F(U))+$$
$$\partial_x I_N^{\mathrm{C}}(F(U)-F(u^*))+\frac{\tau^2}{2}\partial_x F(U)_{t\bar{t}}+(I_N^{\mathrm{C}}\bar{f}-\bar{f})=:\sum_{j=1}^{6}\tilde{g}_j.$$

经过简单计算,由式(18)得

$$\tau\sum_{s\in S_{T-\tau}}(\|\tilde{g}_1\|_{-1}^2+\hbar^2\|\tilde{g}_1\|^2)\leqslant$$

$$C\tau^4(\|\partial_t^3 U\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(I))}+\hbar^2\|\partial_t^3 U\|^2_{L^2(0,T;L^2(I))}),$$

$$\tau\sum_{s\in S_{T-\tau}}(\|\tilde g_2\|^2_{-1}+\hbar^2\|\tilde g_2\|^2)\leqslant$$

$$C\hbar^{2\sigma}\tau\sum_{s\in S_{T-\tau}}\|U_{\hat t}\|^2_{\sigma-1}\leqslant C\hbar^{2\sigma}\|\partial_t U\|^2_{L^2(0,T;H^{\sigma-1}(I))},$$

$$\|\tilde g_3\|_{-1}+\hbar\|\tilde g_3\|\leqslant$$

$$\|F(U)-I_N^{\mathrm C}F(U)\|+\hbar|F(U)-I_N^{\mathrm C}F(U)|_1\leqslant C\hbar^\sigma\|F(U)\|_\sigma,$$

$$\|\tilde g_4\|_{-1}+\hbar\|\tilde g_4\|\leqslant$$

$$\|F(U)-F(u^*)\|+\|(I_N^{\mathrm C}-I)(F(U)-F(u^*))\|+$$

$$\hbar|I_N^{\mathrm C}(F(U)-F(u^*))|_1\leqslant$$

$$\|F(U)-F(u^*)\|+C\hbar|F(U)-F(u^*)|_1\leqslant$$

$$CC_F(\|U\|_{L^\infty(I)},\|u^*\|_{L^\infty(I)})(1+\hbar(\|\partial_x U\|_{L^\infty(I)}+$$

$$\|\partial_x u^*\|_{L^\infty(I)}))\hbar^\sigma\|U\|_\sigma,$$

$$\tau\sum_{s\in S_{T-\tau}}(\|\tilde g_5\|^2_{-1}+\hbar^2\|\tilde g_5\|^2)\leqslant\tau^5\sum_{s\in S_{T-\tau}}(\|F(U)_{t\bar t}\|^2+\hbar^2|F(U)_{t\bar t}|^2_1)\leqslant$$

$$C\tau^4(\|\partial_t^2F(U)\|^2_{L^2(0,T;L^2(I))}+\hbar^2\|\partial_t^2F(U)\|^2_{L^2(0,T;H^1(I))})\leqslant$$

$$CC_F''\tau^4(\|U\|^2_{H^2(0,T;L^2(I))}+\hbar^2\|U\|^2_{H^2(0,T;H^1(I))}),$$

这里

$$C_F''=\max_{|z|\leqslant\|U\|_{C(\bar I\times[0,T])}}\{|\partial_z^l F(z)|^2:\ l=1,2,3\}.$$

同时

$$\|\tilde g_6\|_{-1}+\hbar\|\tilde g_6\|\leqslant C\|I_N^{\mathrm C}\bar f-\bar f\|\leqslant C\hbar^\sigma|\bar f|_{H^\sigma(I)}.$$

对初始误差,有下面估计式:

$$\|\eta(0)\|+\hbar|\eta(0)|_1=$$

$$\|(I_N^{\mathrm C}-P_{1,N})U_0\|+\hbar|(I_N^{\mathrm C}-P_{1,N})U_0|_1\leqslant C\hbar^\sigma\|U\|_\sigma,$$

由 Taylor 公式,得

$$\|\eta(\tau)\|+\hbar|\eta(\tau)|_1\leqslant\|(I_N^{\mathrm C}-I)U_0\|+\hbar|(I_N^{\mathrm C}-I)U_0|_1+$$

$$\tau(\|(I_N^{\mathrm C}-I)\partial_t U(0)\|+\hbar|(I_N^{\mathrm C}-I)\partial_t U(0)|_1)+$$

$$\tau^2(\|\partial_t^2 U\|_{C(0,\tau;L^2(I))}+\hbar\|\partial_t^2 U\|_{C(0,\tau;H^1(I))})+$$

$$\|(I-P_{1,N})U(\tau)\|+\hbar|(I-P_{1,N})U(\tau)|_1\leqslant$$

$$C\hbar^\sigma(\|U_0\|_\sigma+\|U(\tau)\|_\sigma)+C\tau\hbar^{\sigma/2}\|\partial_t U(0)\|_{\sigma/2}+C\tau^2\|\partial_t^2 U\|_{C(0,\tau;H^1(I))}.$$

类似定理 3,如果 $\rho(T,\eta,\tilde g)\leqslant C_0\mathrm e^{-CT}/(6\bar N^2)$, 则

$$E(t,\eta)\leqslant\rho(t,\eta,\tilde g)\mathrm e^{Ct},\qquad\forall t\in S_T.$$

再由式(19)以及三角不等式即可完成定理证明.

5 数 值 结 果

本节给出单区域和多区域 Legendre 拟谱和 Legendre-Galerkin Chebyshev 配置方法的数值算例,并加以比较.令时间步长适当小,以使误差主要由空间方向的离散产生.下面分别计算齐次方程的一个锯齿形解和非齐次方程的一个孤子状解,它们在边界上都不等于 0.

例 1 考虑齐次对流-扩散方程(1) ($f \equiv 0$), 取其真解为[15]

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 - \tanh\frac{2x - t}{8\nu}\right). \tag{40}$$

利用单区域和多区域的 Legendre 拟谱和 Legendre-Galerkin Chebyshev 配置方法,取 $\tau = 10^{-5}$,$\nu = 0.1$, 在区间 $[-10,10]$ 上计算. 当 $t = 1$ 时的最大模误差见表 1. 对多区域情形,区间分别被分成 2 区域 $[-10,0]\cup[0,10]$ 和 4 区域 $[-10,-2]\cup[-2,0]\cup[0,2]\cup[2,10]$.

例 2 考虑非齐次对流-扩散方程(1) ($f \neq 0$), 取真解为

$$u(x,t) = \operatorname{sech}^2(ax - bt - c), \tag{41}$$

代入方程组(1)中的方程, 得到右端函数 $f(x,t)$. 取 $\tau = 10^{-5}$, $a = b = 1$, $c = 0$, $\nu = 1$, 在区间 $[-20,20]$ 上计算. 当 $t = 1$ 时,单区域和多区域的方法的最大模误差见表 2. 对 2 区域和 4 区域情形,我们分别把区间分为 $[-20,0]\cup[0,20]$ 和 $[-20,-4]\cup[-4,0]\cup[0,4]\cup[4,20]$.

在上述算例中,由于解在原点附近变化比较剧烈,所以考虑区间分裂时,在该部分增加一些分点,从而合理地调节了配置点,使得具有更好的分辨率,仅用较少的点就可获得相同或更好的精度. 表 1 和表 2 的计算结果很好地证实了这点,在这种情况下,多区域的方法比相应的单区域方法给出更好的结果.

表 1 $t = 1$ 时单区域和多区域方法(40)的最大模误差 ($\tau = 10^{-5}$,$\nu = 0.1$, 区间为 $[-10,10]$)

Table 1 Maximum error at $t = 1$ by the single domain and the multidomain methods with $\tau = 10^{-5}$,$\nu = 0.1$ for the solution (40) in the interval $[-10,10]$

	N	single domain	(N_1,N_2)	two domains	(N_1,N_2,N_3,N_4)	four domains
Legendre pseudospectral method	80	3.83E−03	(40,40)	1.63E−05	(10,10,10,10)	7.67E−04
	120	3.88E−04	(60,60)	1.70E−07	(20,20,20,20)	7.61E−07
	160	3.86E−05	(80,80)	1.31E−09	(30,30,30,30)	2.36E−09
	200	2.57E−06	(100,100)	3.08E−11	(40,40,40,40)	3.35E−11
Legendre-Galerkin Chebyshev collocation method	80	3.89E−03	(40,40)	2.21E−05	(10,10,10,10)	9.44E−04
	120	4.03E−04	(60,60)	1.99E−07	(20,20,20,20)	1.18E−06
	160	3.98E−05	(80,80)	1.40E−09	(30,30,30,30)	2.93E−09
	200	2.61E−06	(100,100)	3.22E−11	(40,40,40,40)	3.45E−11

表 2 $t = 1$ 时单区域和多区域方法(41)的最大模误差 ($\tau = 10^{-5}$,$a = b = 1$,$c = 0$,$\nu = 1$, 区间为 $[-20,20]$)

Table 2 Maximum error at $t = 1$ by the single domain and the multidomain methods with $\tau = 10^{-5}$,$a = b = 1$,$c = 0$,$\nu = 1$ for the solution (41) in the interval $[-20,20]$

	N	single domain	(N_1,N_2)	two domains	(N_1,N_2,N_3,N_4)	four domains
Legendre pseudospectral method	80	1.84E−02	(40,40)	4.41E−05	(10,10,10,10)	1.43E−03
	120	8.03E−04	(60,60)	2.35E−07	(20,20,20,20)	1.26E−06
	160	7.30E−05	(80,80)	8.60E−10	(30,30,30,30)	1.41E−09
	200	3.39E−06	(100,100)	9.40E−11	(40,40,40,40)	9.19E−11
Legendre-Galerkin Chebyshev collocation method	80	1.89E−02	(40,40)	6.64E−05	(10,10,10,10)	2.34E−03
	120	8.39E−04	(60,60)	3.12E−07	(20,20,20,20)	1.55E−06
	160	7.57E−05	(80,80)	8.23E−10	(30,30,30,30)	1.72E−09
	200	3.52E−06	(100,100)	9.39E−11	(40,40,40,40)	9.29E−11

6 结 论

本文提出了多区域 Legendre 拟谱和 Legendre-Galerkin Chebyshev 配置方法. 注意到所有出

现在误差分析中的常量均与 M 无关，因此，当 $M \to \infty$ ($h_i \to 0$) 及 $N_i \to \infty$ 时，本文的结论仍然成立，可以看作为 h-p 型方法。此外，将该方法与 Laguerre 谱方法相结合可用于解决无界区域上的问题[15-16]。本文的方法也可推广到求解二维空间中的一些问题。

参考文献：

[1] Guo B Y. *Spectral Methods and Their Applications*[M]. Singapore: World Scientific, 1998.

[2] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, Zang T A. *Spectral Methods. Scientific Computation: Fundamentals in Single Domains*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[3] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, Zang T A. *Spectral Methods. Scientific Computation: Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*[M]. Berlin: Springer, 2007.

[4] Pavoni D. Single and multidomain Chebyshev collocation methods for the Korteweg-de Vries equation[J]. *Calcolo*, 1988, **25**(4): 311-346.

[5] Quarteroni A. Domain decomposition methods for systems of conservation laws: spectral collocation approximations[J]. *SIAM J Sci Statist Comput*, 1990, **11**(6): 1029-1052.

[6] Funaro D. Domain decomposition methods for pseudospectral approximations part Ⅰ: second order equations in one dimension[J]. *Numer Math*, 1988, **52**(3): 329-344.

[7] Heinrichs W. Domain decomposition for fourth-order problems[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1993, **30**(2): 435-453.

[8] Gervasio P, Saleri F. Stabilized spectral element approximation for the Navier-Stokes equations[J]. *Numer Mathods Partial Differential Eq*, 1998, **14**(1): 115-141.

[9] Szabo B, Babuska I. *Finite Element Analysis*[M]. New York: A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc, 1991.

[10] Shen J. Efficient spectral-Galerkin method Ⅰ: direct solvers for second- and fourth-order equations using Legendre polynomials[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1994, **15**(6): 1489-1505.

[11] Karniadakis G E, Sherwin S J. *Spectral hp Element Methods for CFD*[M]. Numerical Mathematics and Scientific Computation. New York: Oxford University Press, 1999.

[12] Bernardi C, Maday Y. Polynomial interpolation results in Sobolev spaces[J]. *J Comput Appl Math*, 1992, **43**(1/2): 53-80.

[13] Ciarlet P G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*[M]. Amsterdam: North Holland, 1978.

[14] Schwab C. *p- and hp-Finite Element Methods*[M]. Numerical Mathematics and Scientific Computation. New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1998.

[15] Ma H P, Guo B Y. Composite Legendre-Laguerre pseudospectral approximation in unbounded domains[J]. *IMA J Numer Anal*, 2001, **21**(2): 587-602.

[16] Guo B Y, Ma H P. Composite Legendre-Laguerre approximation in unbounded domains[J]. *J Comput Math*, 2001, **19**(1): 101-112.

Multidomain Pseudospectral Methods for Nonlinear Convection-Diffusion Equations

JI Yuan-yuan[1], WU Hua[1], MA He-ping[1], GUO Ben-yu[2]

(1. *Department of Mathematics*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200444, *P. R. China*;
2. *Department of Mathematics*, *Shanghai Normal University*,
Shanghai 200234, *P. R. China*)

Abstract: Multidomain pseudospectral approximations to nonlinear convection-diffusion equations were considered. The schemes were formulated in the Legendre-Galerkin method but the nonlinear term was collocated at the Legendre/Chebyshev-Gauss-Lobatto points inside each subinterval. Appropriate base functions were introduced so that the matrix of system was sparse and the method can be implemented efficiently and in parallel. The stability and the optimal rate of convergence of the methods were proved. Numerical results were given for both the single domain and the multidomain methods to make a comparison.

Key words: multidomain; Legendre/Chebyshev collocation; convection-diffusion equation