文章编号:1000-0887(2011)09-1127-12

异常情况时的 Liapunov-Kozlov 法*

V·乔维奇[1], D·久里奇[1], M·韦仕科尉克[2], A·奥布拉德维克[1]

(1. 贝尔格莱德大学 机械工程学院,贝尔格莱德 11000,塞尔维亚;
2. 克拉古耶瓦茨大学 机械工程学院,克拉列沃 36000,塞尔维亚)

摘要: Kozlov 将 Liapunov 第一方法推广到非线性力学系统,用来研究保守力和耗散力场中,运动力学系统平衡位置的不稳定性. 在平衡位置分析惯性张量的异常,或者 Rayleigh 耗散函数系数矩阵的异常. 在稳定性分析中,实际上不可能应用 Liapunov 逼近法,因为平衡位置的存在条件,和运动微分方程解的唯一性条件,均无法得到满足. Kozlov 的广义 Liapunov 第一方法,不仅适用上面提及的条件,此外,还知道同样的代数表达式得到满足. 给出了 3 个关于平衡位置的不稳定性定理. 用一个例子,举例说明了得到的结果.

关 键 词: 不稳定性; 异常情况; 渐近运动; 有势力; 耗散力

中图分类号: O317 **文献标志码:** A

DOI:10.3879/j.issn.1000-0887.2011.09.012

引 言

专著[1-2]完整地介绍了有关力学系统,在应用 Liapunov 第一和第二方法,研究运动稳定性方面的最新主要成果. 文献[3-10]也得到了,应用 Liapunov 第一和第二方法的重要结果,在文献[3-10]中,梅凤翔,朱海平,Shi,Fu 和其他合作者,研究了非线性非完整约束力学系统平衡状态流形的稳定性,以及 Birkhoff 系统和相对的 Birkhoff 系统平衡状态流形的稳定性. 在文献[11]中,Lou 等对非完整系统,在相对于移动的非惯性参考系中,研究平衡状态流形的稳定性.

如果一个力学系统的运动微分方程,在原点邻域(系统的平衡位置),解的存在性及其唯一性条件无法满足,则稳定性问题就不能应用 Liapunov[12] 方法求解. 对于这样一类具有非正常的非完整约束的力学系统,文献[13]应用 Kozlov 的、广义的 Liapunov 第一方法进行求解.

立即可以想到,当存在性和唯一性条件受到度规张量系数,或 Rayleigh 耗散函数中的形状系数受到摄动扰时,应用 Kozlov 的广义 Liapunov 第一方法,来求解完整力学系统平衡状态的稳定性.

在一个有势力和耗散力固定的力场中,考虑一个完整定常力学系统的运动. 系统的位形由 Lagrange 坐标系 $\boldsymbol{q}=(q^1,\cdots,q^n)$ 确定,相应的广义速度为 $\dot{\boldsymbol{q}}=(\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^n)$. 其动能、势能和 Ray-

* **收稿日期:** 2011-03-25; **修订日期:** 2011-06-15
基金项目: 塞尔维亚共和国科学和技术发展部基金资助项目(ON174004; ON174016;TR335006)
作者简介: Vukman Čović(联系人. E-mail:covicv@eunet.rs).
本文原文为英文,吴承平 译,张禄坤 校.

leigh 耗散函数分别为①

$$T=\frac{1}{2}a_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}^i\dot{q}^j, \tag{1}$$

$$\Pi=\Pi(\boldsymbol{q}), \tag{2}$$

$$\Phi=\frac{1}{2}d_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}^i\dot{q}^j. \tag{3}$$

所考虑系统的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q^\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}^\alpha}+\frac{\partial\Pi}{\partial q^\alpha}=0 \tag{4}$$

或直接写成

$$a_{ij}\ddot{q}^j+\Gamma_{jk,i}\dot{q}^j\dot{q}^k+d_{ij}\dot{q}^j+\partial\Pi/\partial q^i=0, \tag{5}$$

其中,$\Gamma_{jk,i}$ 是关于度规 $\mathrm{d}\sigma^2=a_{jk}\mathrm{d}q^j\mathrm{d}q^k/2$ 的第一类 Christoffel 符号.

设函数 $\Pi(\boldsymbol{q})$,$a_{ij}(\boldsymbol{q})$,$d_{ij}(\boldsymbol{q})$ 是无限可微的. 若条件$(\partial\Pi/\partial q^i)(\boldsymbol{q}_0)=0$ 成立,则 $q^i=q_0^i(t\geqslant t_0)$ 是微分方程(4) 的解. 在这种情况下,点 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0$ 为第二(Ⅱ)类平衡位置. 不失一般性,可取 $\boldsymbol{q}_0=\boldsymbol{0}$.

设

$$\Pi(\boldsymbol{q})=\Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q})+\Pi^{(r+2)}(\boldsymbol{q})+\cdots,\qquad r\geqslant 1 \tag{6}$$

为势能的 Maclaurin 级数. 又设

$$a_{ij}(\boldsymbol{q})=a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{q})+a_{ij}^{(l+1)}(\boldsymbol{q})+\cdots,\qquad l\geqslant 2, \tag{7}$$

$$d_{ij}(\boldsymbol{q})=d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{q})+d_{ij}^{(s+1)}(\boldsymbol{q})+\cdots,\qquad s\geqslant 1, \tag{8}$$

分别为度规张量坐标和耗散函数系数的 Maclaurin 级数. 上述表达式中给出的 $(\cdot)_{(p)}(\boldsymbol{q})$,$(\cdot)^{(p)}(\boldsymbol{q})$ 表示相应于 p 次的齐次式. 考虑到式(7),在一个包含点 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ 的场中,有 $\det[a_{ij}(\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0})]=0$,显然无法从微分方程(5) 解出 $\ddot{q}^\alpha$. 应该注意到动能的特性,l 是一个偶数.

依照文献[14-17]的主要成果,涉及到强非线性微分方程的广义的 Liapunov 第一方法,深一层的考虑是基于下面的陈述:若微分方程(5)允许有解 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t)$,并且当 $t\to-\infty$ 时,有性质 $\boldsymbol{q}(t)\to\boldsymbol{0}$,那么,所考虑力学系统的平衡状态 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$,$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

此外,所考虑的情况没有涉及到线性近似(见文献[12])的稳定性. 式(7)和(8)所考虑的情况,使 Kozlov 的广义 Liapunov 第一方法呈现出异常情况,并且直到本文发表为止,没有其他人所考虑过.

为前面提到的解 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t)$(当 $t\to-\infty$ 时,具有 $\boldsymbol{q}(t)\to\boldsymbol{0}$ 的性质),寻求以无穷级数形式(也可能发散)的解:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\boldsymbol{A}_\nu(\ln(-t))(-t)^{-\nu\mu}, \tag{9}$$

其中(参见文献[14]) $\boldsymbol{A}_1=\mathrm{const}$,然而 $\boldsymbol{A}_2$,$\boldsymbol{A}_3$,$\cdots$ 是关于 $\ln(-t)$ 的向量多项式,$\mu>0$. 常数 μ 依照截断方程的形式来确定,正如将要看到的,截断方程与方程(6) ~ (8) 中出现的次数 l,r,s 有关. 若上述级数存在且收敛,表示方程(5) 的解 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t)$ 有性质:当 $t\to-\infty$ 时,$\boldsymbol{q}(t)\to\boldsymbol{0}$. 若此级数存在但发散,则正如文献[18] 所显示的,方程(5) 的解 $\tilde{\boldsymbol{q}}=\tilde{\boldsymbol{q}}(t)$, 可以用级数(9) 渐近地表示. 由此可以推断: 级数(9) 存在必然使得, 由微分方程(5) 描述的运动系统的平衡位置

① 本文中的指标可取为 $i,j=1,\cdots,n$;同时 $\forall i=j$ 时,$\delta_i^j=1$; $\forall i\neq j$ 时,$\delta_i^j=0$.

$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{0}$ 的不稳定性.

1 关于截断方程

如果将式(6)~(8)中有关的次数 r,s,l 临时加入,因为截断方程参与“候选人”的加入,方程为

$$a_{ij}^{(l)}\ddot{q}^j+\Gamma_{jk,i}^{(l-1)}\dot{q}^j\dot{q}^k+d_{ij}^{(s)}\dot{q}^j+\partial\Pi^{(r+1)}/\partial q^i=0,\tag{10}$$

其中

$$\Gamma_{jk,i}^{(l-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ki}^{(l)}}{\partial q^j}+\frac{\partial a_{ij}^{(l)}}{\partial q^k}-\frac{\partial a_{jk}^{(l)}}{\partial q^i}\right).\tag{11}$$

将最终的方程称为广义的截断方程.截断方程的具体形式,由广义截断方程依照(6)~(8)中有关的次数 r,l,s 得到,后面将作进一步地分析.如果将级数(9)并入方程(5),根据文献[14],若取 $\boldsymbol{A}_1=\lambda\boldsymbol{e}$,其中 $\lambda>0$,$\boldsymbol{e}=(e^1,\cdots,e^n)$,可以得到(仅包括与确定向量 $\boldsymbol{A}_1$ 有关的项):

$$\begin{aligned}&\lambda^{l+1}\left\{a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{e})[\mu^2(l+1)+\mu]-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}^{(l)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e})\mu^2e^k\right\}e^j(-t)^{-(l\mu+\mu+2)}+\\&\quad\lambda^{s+1}d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{e})\mu e^j(-t)^{-(s\mu+\mu+1)}+\lambda^r\frac{\partial\Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e})(-t)^{-r\mu}+\cdots=0.\end{aligned}\tag{12}$$

情况 A 若截断方程中不出现由耗散产生的力,即方程呈

$$a_{ij}^{(l)}\ddot{q}^j+\Gamma_{jk,i}^{(l-1)}\dot{q}^j\dot{q}^k+\partial\Pi^{(r+1)}/\partial q^i=0,\tag{13}$$

下列条件必需满足(参见式(12)):

$$l\mu+\mu+2=r\mu,\ s\mu>l\mu+1,\tag{14}$$

于是得到(情况 A):

$$\mu=\frac{2}{r-l-1},\ s>\frac{l+r-1}{2}.\tag{15}$$

显然情况 A 必需满足条件:

$$r>l+1.\tag{16}$$

注 1 在没有耗散力时,截断方程也呈方程(13)的形式.

情况 B 截断方程呈如下形式:

$$a_{ij}^{(l)}\ddot{q}^j+\Gamma_{jk,i}^{(l-1)}\dot{q}^j\dot{q}^k+d_{ij}^{(s)}\dot{q}^j+\partial\Pi^{(r+1)}/\partial q^i=0,\tag{17}$$

这时必须满足条件(参见方程(12)):

$$l\mu+\mu+2=s\mu+\mu+1=r\mu,\tag{18}$$

于是得到

$$\mu=\frac{2}{r-l-1},\ s=\frac{l+r-1}{2},\tag{19}$$

这里,该条件必须满足方程(16),然而,r 必需是奇数.

情况 C 最后,若截断方程中不出现来自动能的项,即方程呈

$$d_{ij}^{(s)}\dot{q}^j+\partial\Pi^{(r+1)}/\partial q^i=0,\tag{20}$$

将有条件

$$s\mu+\mu+1=r\mu,\ l\mu+1>s\mu,\tag{21}$$

于是得到

$$\mu = \frac{1}{r-s-1},\ l > 2s - r + 1, \tag{22}$$

则下式使条件得以满足:

$$r > s + 1. \tag{23}$$

考虑到动能的性质,有

$$a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{q})q^i q^j \geqslant 0, \tag{24}$$

可是,万一基本的度规张量形式出现在截断方程,仍将假定呈(24)形式,是正定的.

正常情况下,Kozlov 的广义 Liapunov 第一方法,总是可以求解高阶导数(或称广义加速度和广义速度)的截断方程.可是,在异常情况下,这就无法实现.具体地说,在情况 A 时,无法求解广义加速度方程(10),因为 $\det[a_{ij}^{(l)}(\mathbf{0})] = 0$. 正如前面提到的理由,在正常情况下,级数(9)存在就足够了(参见文献[14,17]),代数方程有真实解 $\boldsymbol{e} = \hat{\boldsymbol{e}} = (\hat{e}^1, \cdots, \hat{e}^n)$, $\hat{\boldsymbol{e}} \neq \mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{\kappa} = \hat{\boldsymbol{\kappa}}$, $\hat{\boldsymbol{\kappa}} > 0$. 即,考虑到级数(9)存在,前面提到的解存在,具有所描述性质的第一项存在,经由链式常系数线性非齐次微分方程(立即得到它们的特殊积分),导致级数的其余项存在.这些方程的非齐次函数用变量 $\ln(-t)$ 的已知的多项式替换.在异常情况下,除了前面提到的解外,在对每种具体情况的进一步分析中,还应满足一定的条件.该条件用于寻找常系数线性非齐次微分方程的链式特殊积分.

2　有关情况 A 的不稳定性定理

截断方程(13)对应于如下的代数方程:

$$\lambda^{l+1}\left\{a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{e})[\mu^2(l+1)+\mu] - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}^{(l)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e})\mu^2 e^k\right\}e^j + \lambda^r \frac{\partial \Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e}) = 0, \tag{25}$$

也可改写为

$$\kappa_1\left\{a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{e})[\mu^2(l+1)+\mu] - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}^{(l)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e})\mu^2 e^k\right\}e^j + \frac{\partial \Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e}) = 0, \tag{26}$$

其中

$$\kappa_1 = \frac{1}{\lambda^{r-l-1}}. \tag{27}$$

有关完整定常力学系统,在保守力场中运动平衡的不稳定性定理,可参见文献[14]的公式化表示,这里,将把它进一步推广到异常情况 A.

定理 1　当不考虑耗散力时,设 $r > l + 1 \wedge s > (l + r - 1)/2$,或设 $r > l$. 进一步,设函数 $\Pi^{(r+1)} = \Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q})$ 在点 $\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$,没有最小值,同时设条件 $\det[a_{ij}^{(l)}(\tilde{\boldsymbol{e}})] \neq 0$ 成立,其中 $\boldsymbol{e} = \tilde{\boldsymbol{e}}$ 是下面向量场的一个真实的非平凡零:

$$\left[(\mu^2 l + \mu^2 + \mu)a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{e}) - \frac{\mu^2}{2}\frac{\partial a_{jk}^{(l)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e})e^k\right]e^j + \frac{\partial \Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e}).$$

在这些条件下,平衡状态 $\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$, $\dot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{0}$ 是不稳定的.

证明　式 $a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{q})q^i q^j$ 是正定的.因此,在闭平面

$$\frac{1}{2}a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{q})q^i q - C = 0,\qquad C > 0 \tag{28}$$

上存在点 M^*,在该定理的条件下,使函数 $\Pi^{(r+1)} = \Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q})$ 达到最小值(显然为负).该点由下式确定:

$$\frac{\partial}{\partial q^i}\left[\kappa\left(\frac{1}{2}a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{q})q^iq^j - C\right) + \Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q})\right] = 0,$$

其中,常数 κ 是 Lagrange 乘子. 将上述关系式改写为

$$\kappa\left(a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{q})q^j + \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}^{(l)}(\boldsymbol{q})}{\partial q^i}q^jq^k\right) + \frac{\partial \Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q})}{\partial q^i} = 0, \tag{29}$$

其结果表示为

$$\kappa\left(1 + \frac{l}{2}\right)a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{q})q^jq^j + (r+1)\Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q}) = 0. \tag{30}$$

由此, $\kappa > 0$ 时点 M^* 存在. 根据方程(29)构成方程组:

$$\kappa'\left[(\mu^2l + \mu^2 + \mu)a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{q})q^j + \left(\frac{\mu^2l + \mu^2 + \mu}{2} - \varepsilon\right)\frac{\partial a_{jk}^{(l)}(\boldsymbol{q})}{\partial q^i}q^jq^k\right] + \frac{\partial \Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q})}{\partial q^i} = 0, \tag{31}$$

当 $\varepsilon = 0$ 和 $\kappa = \kappa'(\mu^2l + \mu^2 + \mu)$ 时,方程(31) 与方程(29) 相一致,由于方程组中函数的连续性,对于一个充分小的正数 ε,该方程组连同方程(28) 有解 $\boldsymbol{q} = \tilde{\boldsymbol{q}}$, $\kappa' = \tilde{\kappa}'$,且将接近于方程(29) 和(28) 的解 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^*$, $\kappa = \kappa^*$. 由此得出结论,若 $\kappa' = \bar{\kappa}' > 0$,则解 $\boldsymbol{q} = \bar{\boldsymbol{q}}$ 是真实的. 此外,随着正数 ε 的增大,每个值 $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon})$ 成立,上面的推论推出解 $\boldsymbol{q} = \bar{\boldsymbol{q}}$ 和 $\kappa' = \bar{\kappa}'$. 边界值 $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ 用下述方法确定. 方程(31)的结果,有式

$$\kappa'\left[\mu^2l + \mu^2 + \mu + l\left(\frac{\mu^2l + \mu^2 + \mu}{2} - \varepsilon\right)\right]a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{q})q^jq^j + (r+1)\Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q}) = 0, \tag{32}$$

显然,必需满足:

$$\mu^2l + \mu^2 + \mu + l\left(\frac{\mu^2l + \mu^2 + \mu}{2} - \varepsilon\right) > 0. \tag{33}$$

于是,有

$$\bar{\varepsilon} = \mu^2l + 2\mu^2 + \mu + \frac{\mu^2 + \mu}{l}. \tag{34}$$

将方程(31)变成方程(26),需要(注意完成变量的替换: $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{e}$) 满足条件:

$$\frac{\mu^2l + \mu^2 + \mu}{2} - \varepsilon = -\frac{\mu^2}{2} \tag{35}$$

或

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{\mu^2l + 2\mu^2 + \mu}{2}, \tag{36}$$

由此得出结论 $\varepsilon_0 \in [0, \bar{\varepsilon})$, 作为结果,推出方程(26)和(28)的解

$$\boldsymbol{e} = \hat{\boldsymbol{e}} = (\hat{e}^1, \cdots, \hat{e}^n), \quad \kappa = \hat{\kappa} \tag{37}$$

是真实的,此外, $\hat{\kappa} > 0$ 成立,因而级数(9)存在条件的第一部分满足. 第二部分条件可以如下考虑.

进一步,作变换(参见文献[19])

$$\tilde{e}^i = \rho\hat{e}^i, \qquad \rho = \text{const}, \ \rho > 0, \tag{38}$$

则有

$$\hat{\kappa}\rho^{r-l-1}\left\{a_{ij}^{(l)}(\tilde{\boldsymbol{e}})[\mu^2(l+1) + \mu] - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}^{(l)}}{\partial q^i}(\tilde{\boldsymbol{e}})\mu^2\tilde{e}^k\right\}\tilde{e}^j + \frac{\partial \Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\tilde{\boldsymbol{e}}) = 0, \tag{39}$$

于是,如下选择正常数 ρ 后,

$$\rho = (1/\hat{\kappa})^{1/(r-l-1)}, \tag{40}$$

可得到

$$\left\{ a_{ij}^{(l)}(\tilde{\boldsymbol{e}})[\mu^2(l+1)+\mu] - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}^{(l)}}{\partial q^i}(\tilde{\boldsymbol{e}})\mu^2\tilde{e}^k \right\}\tilde{e}^j + \frac{\partial \Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\tilde{\boldsymbol{e}}) = 0. \tag{41}$$

于是可以推断:如果代数方程

$$\left\{ a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{e})[\mu^2(l+1)+\mu] - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}^{(l)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e})\mu^2 e^k \right\} e^j + \frac{\partial \Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e}) = 0, \tag{42}$$

有解 $\boldsymbol{e} = \tilde{\boldsymbol{e}} = (\tilde{e}^1, \cdots, \tilde{e}^n), \tilde{\boldsymbol{e}} \neq \boldsymbol{0}$, 那么代数方程(26)有解(37),这里

$$\hat{\kappa} = \left(\frac{2C}{a_{ij}^{(l)}(\tilde{\boldsymbol{e}})\tilde{e}^i\tilde{e}^j} \right)^{(r-l-1)/(l+2)}. \tag{43}$$

这样,文献[14,16,20-23]中提出的代数准则,可用不包含变量 κ_1 的准则替换. 因此,向量 $\boldsymbol{e}$ 存在,使得 $\boldsymbol{A}_1 = \lambda \boldsymbol{e}, \lambda > 0$, 得到证明. 由此得出结论,级数(9)存在,具有所描述性质的第一项存在,经由常系数线性非齐次微分方程链,导致级数其余的项存在,证明了它们可以解出高阶导数. 导致这些方程非齐次的函数,用变量 $\ln(t)$ 的已知多项式替换.

上面提到的线性微分方程有如下形式(仅写出有关的项):

$$\lambda^l a_{ij}^{(l)}(\hat{\boldsymbol{e}}) \frac{\mathrm{d}^2 A_\alpha^j(z)}{\mathrm{d}z^2} + \cdots = 0, \qquad z = \ln(-t);\ \alpha = 2, 3, \cdots, \infty, \tag{44}$$

其中 A_α^j 为向量 $\boldsymbol{A}_\alpha$ 的坐标. 显而易见, 仅当 $\det[a_{ij}^{(l)}(\hat{\boldsymbol{e}})] \neq 0$, 或者对应方程(38), 当 $\det[a_{ij}^{(l)}(\tilde{\boldsymbol{e}})] \neq 0$ 时,微分方程组(44)对 $\mathrm{d}^2 A_\alpha^j(z)/\mathrm{d}z^2$ 可解. 这确定了具有渐近性能解的存在,同时也确定了微分方程(5)描述的运动系统平衡状态 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}, \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$, 是不稳定的. 这样,定理1证毕.

3 有关情况B的不稳定性定理

情况B的截断方程(17)对应如下的代数方程:

$$\lambda^{l+1}\left\{ a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{e})[\mu^2(l+1)+\mu] - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}^{(l)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e})\mu^2 e^k \right\} e^j + \lambda^{s+1} d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{e})\mu e^j + \lambda^r \frac{\partial \Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e}) = 0, \tag{45}$$

也可以写成

$$\kappa_1^2\left\{ a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{e})[\mu^2(l+1)+\mu] - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}^{(l)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e})\mu^2 e^k \right\} e^j + \kappa_1 d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{e})\mu e^j + \frac{\partial \Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e}) = 0, \tag{46}$$

其中

$$\kappa_1 = \frac{1}{\lambda^{(r-l-1)/2}}. \tag{47}$$

显而易见,下列表达式是代数方程组(46)的结果,

$$\kappa_1^2 \left[\mu^2 \left(\frac{l}{2} + 1 \right) + \mu \right] a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{e}) e^i e^j + \kappa_1 \mu d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{e}) e^i e^j + (r+1)\Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{e}) = 0 \tag{48}$$

或

$$\kappa_1^2 a^{(l+2)}(\boldsymbol{e}) + \kappa_1 d^{(s+2)}(\boldsymbol{e}) + (r+1)\Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{e}) = 0, \tag{49}$$

其中

$$a^{(l+2)}(\boldsymbol{e}) = \left[\mu^2\left(\frac{l}{2}+1\right)+\mu\right]a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{e})e^i e^j,\ d^{(s+2)}(\boldsymbol{e}) = \mu d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{e})e^i e^j. \tag{50}$$

设方程(46)和(28)有真实解

$$e^i = e^{*i},\ \kappa_1 = \kappa_1^*,\ \kappa_1^* > 0, \tag{51}$$

则, $a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{e}^*)e^{*i}e^{*j} \neq 0$ 成立时,

$$(\kappa_1^*)_{1,2} = \frac{-d^{(s+2)}(\boldsymbol{e}^*) \pm \sqrt{[d^{(s+2)}(\boldsymbol{e}^*)]^2 - 4(r+1)a^{(l+2)}(\boldsymbol{e}^*)\Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{e}^*)}}{2a^{(l+2)}(\boldsymbol{e}^*)}, \tag{52}$$

又, $a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{e}^*)e^{*i}e^{*j} = 0 \wedge d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{e}^*)e^{*i}e^{*j} \neq 0$ 成立时,

$$\kappa_1^* = -\frac{(r+1)\Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{e}^*)}{\mu d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{e}^*)e^{*i}e^{*j}}. \tag{53}$$

可以推断:在式(52)和(53)情况下,考虑到 $T \geqslant 0, \Phi \geqslant 0$ 成立,为了使 $\kappa_1^* > 0$,必须满足条件 $\Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{e}^*) < 0$.

进一步,作变换(参见文献[19])

$$\tilde{e}^i = \rho e^{*i},\qquad \rho = \text{const},\ \rho > 0. \tag{54}$$

当式(51)是方程(46)的解时,显然

$$\begin{aligned}&\kappa_1^{*2}\rho^{r-l-1}\left\{a_{ij}^{(l)}(\tilde{\boldsymbol{e}})[\mu^2(l+1)+\mu] - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}^{(l)}}{\partial q^i}(\tilde{\boldsymbol{e}})\mu^2 e^k\right\}\tilde{e}^j + \\ &\quad \kappa_1^*\rho^{(r-l-1)/2}d_{ij}^{(s)}(\tilde{\boldsymbol{e}})\mu\tilde{e}^j + \frac{\partial\Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\tilde{\boldsymbol{e}}) = 0,\end{aligned} \tag{55}$$

于是,选择正常数 ρ 后,

$$\rho = (1/\kappa_1^*)^{2/(r-l-1)}, \tag{56}$$

得到

$$\begin{aligned}&\left\{a_{ij}^{(l)}(\tilde{\boldsymbol{e}})[\mu^2(l+1)+\mu] - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}^{(l)}}{\partial q^i}(\tilde{\boldsymbol{e}})\mu^2 e^k\right\}\tilde{e}^j + \\ &\quad d_{ij}^{(s)}(\tilde{\boldsymbol{e}})\mu\tilde{e}^j + \frac{\partial\Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\tilde{\boldsymbol{e}}) = 0.\end{aligned} \tag{57}$$

由此推断:如果代数方程

$$\begin{aligned}&\left\{a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{e})[\mu^2(l+1)+\mu] - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}^{(l)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e})\mu^2 e^k\right\}e^j + \\ &\quad d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{e})\mu e^j + \frac{\partial\Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e}) = 0\end{aligned} \tag{58}$$

有实数解 $\boldsymbol{e} = \tilde{\boldsymbol{e}} = (\tilde{e}^1, \cdots, \tilde{e}^n), \tilde{\boldsymbol{e}} \neq \boldsymbol{0}$, 则代数方程(46)有解(51).

将文献[14]导出的完整定常力学系统,运动平衡不稳定性定理的公式,进一步推广到在保守力和耗散力场作用下(情况 B)的不稳定性定理.

定理 2 设 $r > l+1 \wedge s = (l+r-1)/2$,并设条件 $\det[a_{ij}^{(l)}(\tilde{\boldsymbol{e}})] \neq 0$ 成立,其中 $\boldsymbol{e} = \tilde{\boldsymbol{e}}$ 为方程(58) 的一个真实的非平凡零. 在这些条件下,平衡状态 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}, \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

证明 定理 2 的证明可以仿照定理 1 的证明. 方程(58)的真实零 $\boldsymbol{e} = \tilde{\boldsymbol{e}}$ 存在,导致方程

(46)的解(51)存在,于是

$$\kappa_1^* = \left(\frac{2C}{a_{ij}^{(l)}(\tilde{\boldsymbol{e}})\tilde{e}^i\tilde{e}^j}\right)^{(r-l-1)/(2l+4)} \tag{59}$$

成立.规定了级数(9)的第1项存在.来自级数(9)的其余项的线性微分方程可以确定,即有(44)式的向量 $\boldsymbol{A}_\alpha(\alpha=2,3,\cdots)$(仅列出了相关的项),于是类似于定理1,由条件 $\det[a_{ij}^{(l)}(\tilde{\boldsymbol{e}})] \neq 0$,给出了求解这些方程导数 $\mathrm{d}^2A_\alpha^j(z)/\mathrm{d}z^2$ 的必要条件.定理2证毕.

注2 定理1中条件 $a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{q})q^iq^j$ 是正定的,可以不加考虑.在定理2情况下,$b_{ij}e^ie^j$ 可作为一个范数,其中常数 b_{ij} 为任意选取的二次正定型系数.定理的公式无须改变.

4 有关情况C的不稳定性定理

这时 $r > s+1 \wedge l > 2s-r+1$,截断方程式(20)相对应的代数判据为

$$\kappa_3 d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{e})e^j + \frac{\partial \Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e}) = 0, \tag{60}$$

其中

$$\kappa_3 = \frac{\mu}{\lambda^{r-s-1}}. \tag{61}$$

考虑到耗散函数的性质,有

$$d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{q})q^iq^j \geqslant 0. \tag{62}$$

更进一步,假设式(62)是正定的.

将文献[14]导出的完整定常力学系统,运动平衡不稳定性定理的公式,进一步推广到保守力和耗散力场作用(情况C)下的不稳定性定理.

定理3 设 $r > s+1 \wedge l > 2s-r+1$,设函数 $\Pi^{(r+1)} = \Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q})$ 在点 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ 没有最小值,又设条件 $\det[d_{ij}^{(s)}(\tilde{\boldsymbol{e}})] \neq 0$ 成立,其中 $\boldsymbol{e}=\tilde{\boldsymbol{e}}$ 是向量场 $d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{e})e^j + (\partial\Pi^{(r+1)}/\partial q^i)(\boldsymbol{e})$ 的一个真实的非平凡零.在这些条件下,平衡状态 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0},\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.

证明 式 $d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{q})q^iq^j$ 是正定的.因此,在闭平面

$$\frac{1}{2}d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{q})q^iq - C = 0, \qquad C > 0 \tag{63}$$

上存在点 M^*,在定理3的条件下,函数 $\Pi^{(r+1)} = \Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q})$ 达到最小值(显然为负).该点由如下条件决定

$$\frac{\partial}{\partial q^i}\left[\kappa\left(\frac{1}{2}d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{q})q^iq^j - C\right) + \Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q})\right] = 0, \tag{64}$$

其中常数 κ 为 Lagrange 乘子.以上述关系可以写出下式:

$$\kappa\left(d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{q})q^j + \frac{1}{2}\frac{\partial d_{jk}^{(s)}(\boldsymbol{q})}{\partial q^i}q^jq^k\right) + \frac{\partial \Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q})}{\partial q^i} = 0, \tag{65}$$

该结果就是表达式

$$\kappa\left(1+\frac{l}{2}\right)d_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{q})q^jq^j + (r+1)\Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q}) = 0. \tag{66}$$

于是,得出结论:在上面提及的点 M^* 上有 $\kappa > 0$.根据式(65),构成方程组如下:

$$\kappa\left[d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{q})q^j + \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\frac{\partial d_{jk}^{(s)}(\boldsymbol{q})}{\partial q^i}q^jq^k\right] + \frac{\partial \Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q})}{\partial q^i} = 0, \tag{67}$$

当 $\varepsilon=0$ 时,式(67)与式(29)一致,则由于方程组中函数的连续性,对于充分小的正数 ε,这些方程连同方程(28)有解 $\boldsymbol{q}=\tilde{\boldsymbol{q}}$,$\kappa'=\tilde{\kappa}'$,将接近于方程(63)和(65)的解 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*$,$\kappa=\kappa^*$. 由此得出结论:解 $\boldsymbol{q}=\bar{\boldsymbol{q}}$ 是真实的,且 $\kappa'=\bar{\kappa}'>0$. 当正数 ε 进一步增大时,对它的每一个 $\varepsilon\in[0,\bar{\varepsilon})$ 值,上述关于解 $\boldsymbol{q}=\bar{\boldsymbol{q}}$ 和 $\kappa'=\bar{\kappa}'$ 性质的推论依然成立. 边界值 $\varepsilon=\bar{\varepsilon}$ 可用下述方法确定. 方程(31)的结果,有式

$$\kappa\left[1+l\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\right]d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{q})q^jq^j+(r+1)\Pi^{(r+1)}(\boldsymbol{q})=0, \tag{68}$$

显然,下式必需成立:

$$1+l\left[\frac{1}{2}-\varepsilon\right)>0, \tag{69}$$

于是,有

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}+\frac{1}{l}. \tag{70}$$

由方程(67)得到式(60),下面的条件必须满足(注意,变量的替换 $\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{e}$):

$$\frac{1}{2}-\varepsilon=0 \tag{71}$$

或

$$\varepsilon=\varepsilon_0=\frac{1}{2}, \tag{72}$$

于是,$\varepsilon\in[0,\bar{\varepsilon})$,作为一个结果推出:方程(60)和(63)的解

$$\boldsymbol{e}=\hat{\boldsymbol{e}}=(\hat{e}^1,\cdots,\hat{e}^n),\ \kappa_3=\hat{\kappa}_3 \tag{73}$$

是真实的,此外,$\hat{\kappa}_3>0$ 成立. 因而,级数(9)存在条件的第一部分满足. 如下考虑第二部分.

进一步,作变换(38). 有(参见式(60))

$$\kappa_3\rho^{r-s-1}d_{ij}^{(s)}(\tilde{\boldsymbol{e}})\tilde{e}^j+\frac{\partial\Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\tilde{\boldsymbol{e}})=0, \tag{74}$$

于是,选择正常数 ρ:

$$\rho=(1/\hat{\kappa}_3)^{1/(r-s-1)} \tag{75}$$

后,得到

$$d_{ij}^{(s)}(\tilde{\boldsymbol{e}})\tilde{e}^j+\frac{\partial\Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\tilde{\boldsymbol{e}})=0. \tag{76}$$

由此得出结论:如果代数方程

$$d_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{e})e^j+\frac{\partial\Pi^{(r+1)}}{\partial q^i}(\boldsymbol{e})=0 \tag{77}$$

有解 $\boldsymbol{e}=\tilde{\boldsymbol{e}}=(\tilde{e}^1,\cdots,\tilde{e}^n)$,$\tilde{\boldsymbol{e}}\neq\boldsymbol{0}$,则代数方程(74)有解式(73),其中

$$\hat{\kappa}_3=\left(\frac{2C}{d_{ij}^{(s)}(\tilde{\boldsymbol{e}})\tilde{e}^i\tilde{e}^j}\right)^{(r-s-1)/(s+2)}. \tag{78}$$

向量 $\boldsymbol{A}_\alpha$ 确定了式(9)的形状,常系数线性微分方程有式(仅写入有关的项):

$$\lambda^sd_{ij}^{(s)}(\hat{\boldsymbol{e}})\frac{\mathrm{d}A_\alpha^j(z)}{\mathrm{d}z}+\cdots=0,\qquad z=\ln(-t),\ \alpha=2,3,\cdots,\infty, \tag{79}$$

其中,A_α^j 为向量 $\boldsymbol{A}_\alpha$ 的坐标. 仅当 $\det[d_{ij}^{(s)}(\hat{\boldsymbol{e}})]\neq0$,或根据式(38),当 $\det[d_{ij}^{(s)}(\tilde{\boldsymbol{e}})]\neq0$ 时,对 $\mathrm{d}A_\alpha^j(z)/\mathrm{d}z$ 的微分方程组可解. 从而确定了渐近性质解的存在,也确定立了平衡状态 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$,$\dot{\boldsymbol{q}}=$

0 的不稳定性.

5 例 子

图 1 是双发动机的机械装置外形示意图,活塞 A 和 B 分别有质量 m_1 和 m_2,连杆 1,2,3,4 的长度均为 l 而质量忽略不计,外形由广义坐标 $q^1=\varphi, q^2=\theta$ 确定. 活塞 A 和 B 沿水平轴 p 移动. 力

$$\boldsymbol{F}=-k(2-\cos\varphi-\cos\theta)^r\boldsymbol{p}$$

作用在活塞 B 上,其中,$k>0$,r 是一个正整数,$\boldsymbol{p}$ 为坐标轴 p 的单位向量. 由图可见,当 $r>3$ 时,所述机构的平衡位置 $\varphi=0,\theta=0$ 是不稳定的. 现指定

$$m_1=1\ \mathrm{kg},\ m_2=2\ \mathrm{kg},\ l=1\ \mathrm{m},\ k=2\ \mathrm{N}.$$

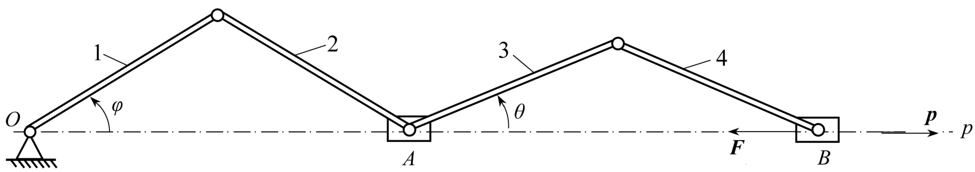

图 1 双发动机机构示意图

Fig. 1 The double engine mechanism

解 机构的动能为

$$T=2l^2[(m_1+m_2)\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2+m_2\sin\varphi\sin\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}+m_2\sin^2\theta\dot{\theta}^2], \tag{80}$$

广义力为

$$\begin{cases}Q_1=Q_\varphi=2lk\sin\varphi(2-\cos\varphi-\cos\theta)^r,\\ Q_2=Q_\theta=2lk\sin\theta(2-\cos\varphi-\cos\theta)^r.\end{cases} \tag{81}$$

由于 $\partial Q_\varphi/\partial\theta=\partial Q_\theta/\partial\varphi$,由此得出结论:力 $\boldsymbol{F}$ 是(显然,$\boldsymbol{F}$ 是中心力,其强度仅取决于距离)有势的,其势能为

$$\Pi=-\frac{2lk}{r+1}(2-\cos\varphi-\cos\theta)^{r+1}. \tag{82}$$

当度规张量系数展开为 Maclaurin 级数,立即可以得到表达式(见方程(7))

$$a_{11}=12\varphi^2+\cdots,\ a_{12}=a_{21}=4\varphi\theta+\cdots,\ a_{22}=8\theta^2, \tag{83}$$

由此知道 $l=2$(参见方程(7)).

势能的 Maclaurin 级数表示为

$$\Pi=-\frac{2}{r+1}(\varphi^2+\theta^2)^{r+1}+\cdots, \tag{84}$$

于是得到 $r=2n+1$(参见方程(6)).

相应的代数方程(26)有如下形式:

$$\begin{cases}\{2\boldsymbol{\kappa}(r-1)[3(e^1)^2+(e^2)^2]-(r-3)^2[(e^1)^2+(e^2)^2]^r\}e^1=0,\\ \{2\boldsymbol{\kappa}(r-1)[(e^1)^2+2(e^2)^2]-(r-3)^2[(e^1)^2+(e^2)^2]^r\}e^2=0.\end{cases} \tag{85}$$

在平衡位置 $\varphi=\theta=0$, 势能没有最小值,下式

$$a_{ij}^{(l)}(\boldsymbol{e})e^ie^j=12(e^1)^4+8(e^1)^2(e^2)^2+8(e^2)^4$$

是正定的. 由此可见,方程(85)连同下列条件:

$$12(e^1)^4+8(e^1)^2(e^2)^2+8(e^2)^4-2=0 \tag{86}$$

有一个真实解. 实际上,由方程(85),有 $(e^2)^2 = 2(e^1)^2$,由方程(86),有 $e^1 = \pm 1/\sqrt[4]{30}$. 最后得到 $e^2 = \pm 1/\sqrt[4]{7.5}$, $\kappa > 0$,由于 $\det[a_{ij}(e^1 = \pm 1/\sqrt[4]{30}, e^2 = \pm 1/\sqrt[4]{7.5})] \neq 0$,根据定理1,平衡位置 $\varphi = \theta = 0$ 不稳定.

参考文献:

[1] Karapetyan A V, Rumyantsev V V. Stability of conservative and dissipative systems[J]. *Itogi Nauki i Tekhniki*, *Obshchaya Mekh*, 1983, **6**: 128. (in Russian)

[2] Karapetyan A V. *Stability of Steady Motions*[M]. Moscow: Editorial URSS, 1998, 165. (in Russian)

[3] 梅凤翔,史荣昌,张永发,朱海平. 约束力学系统的运动稳定性[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1997.(MEI Feng-xiang, SHI Rong-chang, ZHANG Yong-fa, ZHU Hai-ping. *Stability of Motion of Constrained Mechanical Systems*[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1997. (in Chinese))

[4] 梅凤翔. 关于非线性非完整系统平衡状态的稳定性[J]. 科学通报, 1992, **37**(1):82-85.(MEI Feng-xiang. On stability of equilibrium states of nonlinear nonholonomic systems[J]. *Chinese Science Bulletin*, 1992, **37**(1): 82-85.(in Chinese))

[5] MEI Feng-xiang. On the stability of equilibria of nonlinear nonholonomic systems[J]. *Chinese Science Bulletin*, 1992, **37**(16): 1397-1401.

[6] 朱海平, 梅凤翔. 关于非完整力学系统系统相对部分变量的稳定性[J]. 应用数学和力学,1995, **16**(3):225-234.(ZHU Hai-ping,MEI Feng-xiang. On the stability of nonholonomic mechanical systems with respect to partial variables[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(*English Edition*), 1995, **16**(3): 237-245.)

[7] Shi R C, Mei F X, Zhu H P. On the stability of the motion of a Birkhoff system[J]. *Mechanics Research Communications*, 1994, **21**(3): 269-272.

[8] Fu J L, Chen L Q, Luo Y, Luo S K. Stability for the equilibrium state manifold of relativistic Birkhoffian systems[J]. *Chinese Physics*, 2003, **12**(4): 351-356.

[9] Fu J L, Chen L Q, Xue Y, Luo S K. Stability of the equilibrium state in relativistic Birkhoff systems[J]. *Wuli Xuebao/Acta Physica Sinica*, 2002, **51**(12): 2683-2689.

[10] Fu J L, Chen L Q, Xue Y. Stability for the equilibrium state of rotational relativistic Birkhoffian systems[J]. *Wuli Xuebao/Acta Physica Sinica*, 2003, **52** (2): 256-261.

[11] Luo S K, Chen X W, Fu J L. Stability theorems for the equilibrium state manifold of non-holonomic systems in a noninertial reference frame[J]. *Mechanics Research Communication*, 2001, **28**(4): 463-469.

[12] Lyapunov A M. *The General Problem of the Stability of Motion*[M]. Khar'kov: Mat Obshch, 1892: 450. (in Russian)

[13] Furta S D. On the instability of equilibrium position of constrained mechanical systems[J]. *Prikladnaya Mekhanika*, 1991, **27**(2): 102-106. (in Russian)

[14] Kozlov V V. On the asymptotic motions of systems with dissipation[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, **58**(5): 787-792.

[15] Kozlov V V, Furta S D. *Asymptotics of Solutions for Strongly Nonlinear Systems of Differential Equations*[M]. Institute of Computer Science, Regular and Chaotic Dynamics. Moscow: Izhevsk, 2009: 312. (in Russian)

[16] Kozlov V V, Furta S D. Lyapunov's first method for strongly non-linear systems[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, **60**(1): 7-18.

[17] Kozlov V V. On the stability of equilibria of non-Holonomic systems[J]. *Soviet Mathematics - Doklady*, 1986, **33**(3): 654-656. (in Russian)

[18] Kuznetsov A N. The existence of solutions of an autonomous system, recurring at a singular point, having a formal solution[J]. *Funktsional´nyi Analiz i yego Prilozheniya*, 1989, **23**(4): 63-74. (in Russian)

[19] Čović V, Vesković M, Obradović A. On the stability of steady motion[J]. *Meccanica*. doi: 10.1007/s11012-010-9348-2.

[20] Vesković M. On the equilibrium stability of mechanical systems with dissipation[J]. *Theoretical and Applied Mechanics*, 1998, **24**: 139-154.

[21] Čović V, Vesković M, Obradović A. On the instability of equilibrium of nonholonomic systems with nonhomogeneous constraints[J]. *Mathematical and Computer Modeling*, 2010, **51**(9/10): 1097-1106.

[22] V·科维克, M·维什科维克, D·狄加瑞克, A·阿伯拉达维克. 非线性约束下非完整系统的平衡稳定性[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(6):722-730. (Čović V, Vesković M, DJurić D. Obradović A. On the stability of equilibria of nonholonomic systems with nonlinear constraints[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(*English Edition*), 2010, **31**(6): 751-760.)

[23] M·韦仕科尉克, V·科尉克, A·奥布拉德尉克. 非完整系统有耗散和循环力时的平衡不稳定性[J]. 应用数学和力学, 2011, **32**(2): 202-212. (Vesković M, Čović V, Obradović A. Instability of equilibrium of nonholonomic systems with dissipation and circulatory forces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(*English Edition*), 2011, **32**(2): 212-222.)

[24] Vesković M, Čović V. Lyapunov first method for nonholonomic systems with circulatory forces[J]. *Mathematical and Computer Modeling*, 2007, **45**(9/10): 1145-1156.

Liapunov-Kozlov Method for Singular Cases

V. Čović[1], D. Djurić[1], M. Vesković[2], A. Obradović[1]

(1. *University of Belgrade*, *Faculty of Mechanical Engineering*, *Kraljice Marije* 16, 11000 *Belgrade*, *Serbia*;

2. *University of Kragujevac*, *Faculty of Mechanical Engineering*, *Dositejeva* 19, 36000 *Kraljevo*, *Serbia*)

Abstract: Liapunov's first method, extended by V. Kozlov to nonlinear mechanical systems, was applied to the study of the instability of the position of equilibrium of a mechanical system moving in the field of conservative and dissipative forces. The cases with the tensor of inertia or the matrix of coefficients of the Rayleigh dissipative function singular in the equilibrium position were analyzed. This fact renders impossible the application of Liapunov's approach in the analysis of stability because in the equilibrium position the conditions of existence and uniqueness of solutions of differential equations of motion were not fulfilled. It was shown that Kozlov's generalization of Liapunov's first method was also applied in mentioned cases on condition that besides known one algebraic expression more was fulfilled. Three theorems on the instability of the equilibrium position were formulated. The results were illustrated by an example.

Key words: instability; singular case; asymptotic motion; potential; dissipative force