

# 切换系统的全局指数稳定性<sup>\*</sup>

V·菲利普维奇

(克拉古耶瓦茨大学 机械工程学院,德斯特杰瓦 19,克拉列沃 36000,塞尔维亚)

**摘要:** 提出了一种确定切换系统稳定性分析的方法,引入了两个相关的实例(非完整系统和约束摆)进行说明.用有限个模型的集合组成非线性模型,且切换序列可以是任意的.假定在切换瞬间状态不出现跳跃,并且不出现 Zeno 现象,即在每个有界时间段上,切换次数是有限的.在对所确定切换系统的分析中,应用了多次 Liapunov 函数,并证明了全局指数稳定性.系统的指数稳定性平衡关系到实际应用,因为这样的系统有着更强健的抗干扰能力.

**关键词:** 切换系统; 多次 Liapunov 函数; 全局指数稳定性

**中图分类号:** O317      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.09.011

## 引言

混合系统描述了系统与系统之间存在着相互作用,混合系统可以用有限个状态系统建模,例如有有限个状态的力学系统,用微分方程来表示它们的物理关系.在文献[1]中,概述了混合系统的双向模拟概念,给出了若干关键的检验和综合控制结果.从经典控制理论的角度来看,混合系统可以被看作模拟反馈循环间的切换控制<sup>[2-3]</sup>.例如,量化系统就是这样一个状态依赖于切换过程的切换系统实例.

研究这类系统的主要原因是,存在着一大类的非线性系统,通过切换控制配置,它们可能存在稳定性,而用任何连续静态反馈控制是不能达到稳定的<sup>[4]</sup>.文献[5]和[6]给出了稳定性场的最新进展,以及切换系统的可稳定性.

在文献[7]中,联合应用多次 Liapunov 函数和比较原理,为确定/随机的切换系统的稳定,建立起一个分析的框架.结果表明,非线性确定的切换系统是全局一致渐近稳定.文献[8]考虑了确定的线性切换系统的稳定性,问题得以解决的基础是,依靠二次 Liapunov 函数族,来确定最小的停留时间,该研究结果有一个重要的细节,包含了模型可能产生滑动的稳定性.文献[9]中,研究了具有静态线性反馈的、线性切换控制系统的可稳定性,被认为这是一种超强版的稳定性,即,当反馈持续增加时,稳定性依然能维持.在文献[10]中,就1个切换控制器和2个线性时间不变量(LTI)控制器间进行了比较,研究过一大类线性时间不变量(LTI)控制器设备,结果表明,切换控制器在体系结构上能胜过一阶的LTI控制器.这样一个结果,有着重要的

\* 收稿日期: 2011-02-09; 修订日期: 2011-05-01

基金项目: 塞尔维亚科学技术发展部资助项目(TR-3326)

作者简介: V. Filipovic, 教授(联系人. E-mail: v.filipovic@open.telekom.rs).

本文原文为英文,黄锋译,张禄坤校.

实际意义,即应用切换控制器的基本原理,在实际工程中可以设计出高阶模型的、结构固定的(P,PI和PID)控制器。

文献[11]研究了时间延迟系统的切换控制,系统的模拟部分,理解为带输入延迟的有限个连续时间模型的集合;而无法模型化动力学部分,以仿射矩阵族的形式表示。作为结果,给出了强健的LQ切换控制器。文献[12]介绍了出现在系统中执行机构切换控制器的应用,实际上,这也是最经常遇见的非线性。文献[13]描述了切换系统在空中交通管理系统中的应用。

本文中,应用多次Liapunov函数<sup>[14]</sup>,考虑所确定切换系统的稳定性。假定:

- a) 在切换瞬间,状态 $x$ 不出现跳跃;
- b) 不出现Zeno现象,即在每个有界的时间段上,切换的次数是有限的。

文献[15]和[16]考虑了系统状态出现跳跃的情况。

本文考虑切换系统的指数稳定性,非线性模型由有限个模型集合而成。指数稳定平衡关系到实际应用,即,指数稳定平衡系统有着更强健的抗干扰能力。

## 1 两个实例

在这一节中,介绍两个实例。第1个是非完整系统,依靠任何一个单独连续状态反馈控制器,是无法达到可稳定性。对于这些系统,用多次控制器切换,为解决该类问题提供了一个良好的概念性框架。第2个是约束摆,需用多模型系统(2个模型)来描述。

**实例1** 考虑系统<sup>[2]</sup>

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t)) u_i(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}. \quad (1)$$

系统(1)是非完整系统,意味着,系统受到状态 $\mathbf{x}(t)$ (位置)及其导数 $\dot{\mathbf{x}}(t)$ (速度)双重约束。文献[17]考虑过非线性约束下非完整系统的平衡稳定性。在文献[18]中,解决了平面上多个非完整因素构成的控制问题。

如果 $\text{rank} \mathbf{G}(0) = m$ ,且 $m < n$ ,系统(1)不满足Brockett条件<sup>[19]</sup>,则有以下结果:

**结果1** 连续反馈法则无法渐近地稳定于系统(1),且 $\text{rank} \mathbf{G}(0) = m < n$ 。

作为非完整系统的一个简单实例,考虑用轮子移动的机器人(单轮脚踏车),如图1所示<sup>[19]</sup>。

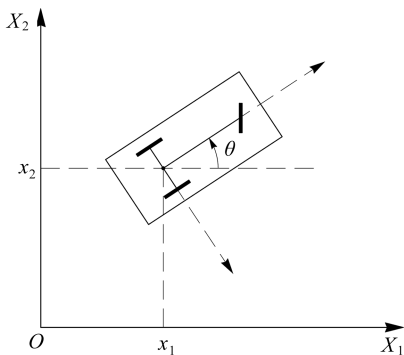


图1 单轮脚踏车

Fig. 1 The unicycle

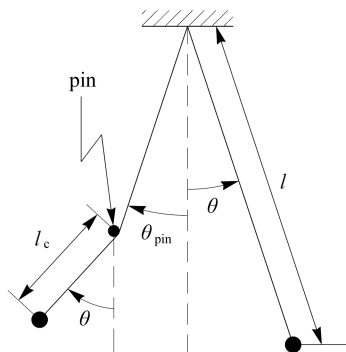


图2 约束摆

Fig. 2 Constrained pendulum

状态变量为  $x_1(t), x_2(t)$  和  $\theta(t)$ , 机器人运动如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \cos\theta(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_1(t) \sin\theta(t), \\ \dot{\theta}(t) = u_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  为输入控制, 分别表示前进速度和角速度. 系统渐近稳定, 意味着单轮脚踏车停在原点, 并与  $x_1$ -轴一致.

由方程(1), 且  $n = 3, m = 2$ , 则系统(2)取

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}, \mathbf{g}_1(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{g}_2(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

根据结果 1, 单轮脚踏车问题无法依靠连续反馈求解.

**实例 2** 考虑长度为  $l$  的数学摆, 打入 1 颗钉子, 使摆长约束为  $l_c$ , 如图 2 所示. 连续状态空间变量为  $\mathbf{x} = (\theta, \omega)$ , 其中  $\omega$  为摆端的角速度. 得到一个有 2 个位置的混合系统(无约束时和有约束时).

无约束时, 对  $\theta \leq \theta_{\text{pin}}$  有效, 摆的动力学可用式(4)和(5)描述<sup>[20]</sup>:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{l} \omega(t), \quad (4)$$

$$\dot{\omega}(t) = -g \sin\theta(t) - \alpha \omega(t), \quad (5)$$

其中,  $\alpha$  为摩擦因数,  $g$  为重力加速度. 有约束时, 对  $\theta > \theta_{\text{pin}}$  有效, 摆的动力学仍可以用式(4)和(5)描述, 但公式中的  $l$  要用  $l_c$  替代. 可以发现, 由于摆长由  $l$  变为  $l_c$ , 微分方程右边不再连续. 约束摆完整的动力学行为需要用 2 个模型来描述.

## 2 问题的公式化

假定  $E_1$  和  $E_2$  为 Euclidean 空间的子集. 令空间  $C[E_1, E_2]$  表示所有连续函数  $f: E_1 \rightarrow E_2$ , 空间  $C^1[E_1, E_2]$  表示所有一次连续可微函数  $f: E_1 \rightarrow E_2$ . 如果  $\alpha$  递增且  $\alpha(0) = 0$ , 则函数  $\alpha \in C[R_{\geq 0}, R_{\geq 0}]$  为  $K$  类函数, 详见文献[18].

自治切换非线性系统可以模型化为

$$\dot{x}(t) = f_p(x(t)), \quad t \in \mathbf{R}_+, \forall p \in P = \{1, 2, \dots, N\}, \quad (6)$$

其中

$$f_p = R^n \rightarrow R^n, \quad f(0) = 0, \quad \forall p \in P,$$

且状态  $x \in R^n, \mathbf{R}_+$  表示非负的实数. 有限集  $P$  为一个指数集, 代表离散模型的集合.

切换信号是一种逻辑控制, 配合子系统间的切换, 是分段常数类:

$$\sigma: [0, \infty] \rightarrow P. \quad (7)$$

这类函数在每个有界时间段上, 存在有限个不连续点, 并且在每 2 个连续切换时间的间隔上取常数值.

请求一个切换信号, 即分段常数值, 想让切换信号  $\sigma(t)$  在  $\mathbf{R}_+$  的任意有限的间隔上, 存在有限个不连续点. 相当于连续时间切换系统的无震颤请求.

逻辑控制产生的切换信号, 组成切换逻辑及其指数  $p = \sigma(t)$ , 就是瞬时  $t$  的活动模式. 时间  $t$  的活动模式可能依赖于瞬时  $t$ 、当前状态  $x(t)$  和先前的活动模式  $\sigma(\tau), \tau < t$ . 本文所考虑的

切换逻辑仅仅依赖于时间  $t$ .

$\sigma$  从右边处处连续,有

$$\sigma(t) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} \sigma(\tau), \quad \forall \tau \geq 0, \tag{8}$$

由  $\sigma$  产生的族(6)的切换系统是

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)). \tag{9}$$

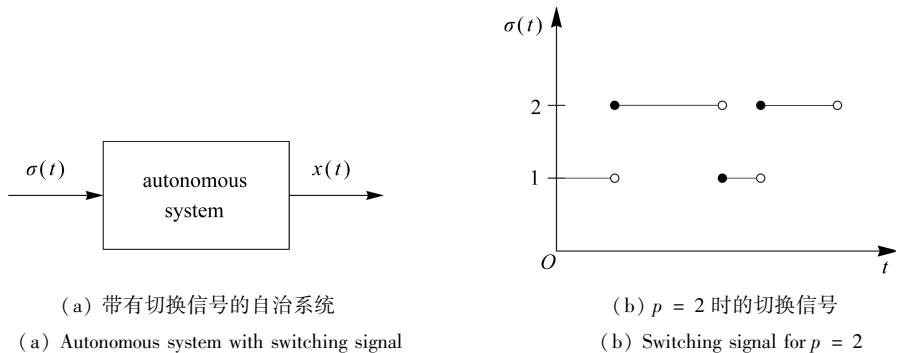


图3 切换控制系统

Fig. 3 Switching control systems

图3表示带有切换信号的自治系统. 尽管系统的连续部分是自治的, 本文的研究结果对稳定问题(控制器的设计)十分重要.

现在, 给出全局指数稳定性的概念.

**定义1** 系统(6)的平衡是全局指数稳定的, 如果存在常数  $(k_1, k_2) > 0$ , 对于  $\forall t, t_0 \geq 0$ ,  $\forall x(t_0) \in R^n$ , 使得

$$\|x(t)\| \leq k_1 \|x(t_0)\| \exp\{-k_2(t - t_0)\},$$

其中  $\|\cdot\|$  为 Euclidean 范数. ■

本文的主要结论需要用到下面的引理(引自文献[19]).

**引理1** 在族(6)中, 考虑系统有指数  $p$ . 假定存在常数  $(a, b, c, r) > 0, m \geq 1$  和  $C^1[R^n, R_{\geq 0}]$  函数  $V_p: R^n \rightarrow R^n$ , 使得

$$1) a \|x(t)\|^m \leq V_p(x(t)) \leq b \|x(t)\|^m, \quad \forall t > 0, \forall x(t) \in R^n;$$

$$2) \dot{V}_p(x(t)) \leq -c \|x(t)\|^m, \quad \forall t \geq 0, \forall x(t) \in R^n,$$

则系统(6)的平衡是全局指数稳定的. ■

显然, 指数稳定比一致渐近稳定, 性质更为强壮. 此外, 根据指数稳定可以得到渐近稳定. 无论如何, 系统的全局指数稳定平衡有着更强健的抗干扰能力.

### 3 切换系统的指数稳定性

下面将给出本文的主要结果.

**定理1** 考虑切换系统(9), 设以下假定成立:

1) 指数  $P$  有限, 即  $P = \{1, 2, \dots, N\}$ ;

2) 函数  $V_p(\cdot) \in C^1[R^n, R_{\geq 0}], \forall p \in P$ ;

3) 函数  $U(\cdot) \in K$ ;

4) 对于  $\forall x(t) \in R^n, m \geq 1, \forall p \in P$  和  $a, b > 0, a < b$ , 有  $a \|x(t)\|^m \leq V_p(x(t)) \leq b \|x(t)\|^m$ ;

5) 对于  $\forall x(t) \in R^n, m \geq 1, \forall p \in P$  和  $c > 0$ , 有  $\dot{V}_p(x(t)) \leq -c \|x(t)\|^m$ ;

6) 对于每个  $p \in P$  和每对切换瞬时, 有  $\sigma(t_i) = \sigma(t_j) = p, \forall (t_i, t_j), i < j$ , 和  $\sigma(t_k) \neq p, i < k < j$ , 则不等式  $V_p(x(t_j)) - V_p(x(t_i)) \leq -U(\|x(t_i)\|)$  成立, 其中,  $U(\|x(t_i)\|)$  属于  $K$  类函数.

则系统(9)为全局指数稳定. ■

**证明** 考虑固定值  $p$  的子系统(6), 由定理 1 的条件 4) 和 5), 有

$$\frac{dV_p(x(t))}{dt} \leq -c \|x(t)\|^m \leq -\frac{c}{b} V_p(x(t)). \quad (10)$$

在区间  $[t_0, t_1]$  上, 对不等式(10)进行积分, 得到

$$V_p(x(t)) \leq V_p(x(t_0)) \exp\left\{-\frac{c}{b}(t - t_0)\right\}. \quad (11)$$

应用定理 1 的条件 4), 有

$$V_p(x(t)) \leq b \|x(t_0)\|^m \exp\left\{-\frac{c}{b}(t - t_0)\right\}. \quad (12)$$

现在, 考虑区间  $[t_0, t_1]$ . 由关系式(12)和定理 1 的假定 4) 和 5), 有

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t_0)}(x(t_1)) &\leq V_{\sigma(t_0)}(x(t_0)) \exp\left\{-\frac{c}{b}(t_1 - t_0)\right\} \leq \\ &b \|x(t_0)\|^m \exp\left\{-\frac{c}{b}(t_1 - t_0)\right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

但是, 在相同的区间上, 有  $P \neq \sigma(T)$ , 应用定理 1 的假定 4), 下面评估

$$V_p(x(t_1)) \leq b \|x(t_1)\|^m = \frac{b}{a} (a \|x(t_1)\|^m) \leq \frac{b}{a} V_{\sigma(t_0)}(x(t_1)) \quad (14)$$

成立.

由式(13)和式(14)的后面两个关系式, 得到

$$V_p(x(t_1)) \leq \frac{b^2}{a} \|x(t_0)\|^m \exp\left\{-\frac{c}{b}(t_1 - t_0)\right\}. \quad (15)$$

现在, 考虑区间  $[t_1, t_2]$ . 由式(11)和(15), 有

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t_1)}(x(t_2)) &\leq V_{\sigma(t_1)}(x(t_1)) \exp\left\{-\frac{c}{b}(t_2 - t_1)\right\} \leq \\ &\frac{b^2}{a} \|x(t_0)\|^m \exp\left\{-\frac{c}{b}(t_2 - t_0)\right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

在相同的区间上, 有  $p \neq \sigma(t_1)$ , 得到

$$V_p(x(t_2)) \leq b \|x(t_2)\|^m = \frac{b}{a} (a \|x(t_2)\|^m) \leq \frac{b}{a} V_{\sigma(t_1)}(x(t_2)). \quad (17)$$

应用关系式(16)和式(17), 有

$$V_p(x(t_2)) \leq b \left(\frac{b}{a}\right)^2 \|x(t_0)\|^m \exp\left\{-\frac{c}{b}(t_2 - t_0)\right\}. \quad (18)$$

当切换信号  $\sigma$  从有限集  $P$  取得每个元素时, 函数  $V_\sigma$  的最大可能值出现. 假定  $t_j^*$  为第一个切换瞬时, 在所有后面子系统中, 在初值  $t_0$  之后, 至少可以得到一次.

由上述分析中, 可以得到

$$V_p(x(t_j^*)) \leq b \left(\frac{b}{a}\right)^{N-1} \|x(t_0)\|^m \exp\left\{-\frac{c}{b}(t_j^* - t_0)\right\}. \quad (19)$$

定义

$$\gamma = \max\left(b, b\left(\frac{b}{a}\right) \exp\left\{-\frac{c}{b}(t_1 - t_0)\right\}, \dots, b\left(\frac{b}{a}\right)^{N-1} \exp\left\{-\frac{c}{b}(t_j^* - t_0)\right\}\right). \quad (20)$$

由定理 1 的条件 6), 可以得到以下结论:

$$V_{\sigma(t)}(x(t)) \leq \gamma \|x(t_0)\|^m \exp\left\{-\frac{c}{b}(t - t_0)\right\}. \quad (21)$$

如果  $\sigma$  在一些指数  $p$  (在有限的时间内切换停止) 下变为常数, 根据定理 1 的条件 4) 和 5) 及引理 1, 切换系统是稳定的.

上述情况至少存在 1 个指数  $p \in P$ , 使得正子序列

$$V_{\sigma(t_i)}(x(t_i)), \quad i \geq 0, \sigma(t_i) = p \quad (22)$$

的长度是无限的, 且根据定理 1 的条件 6), 又是递减的.

根据式(21)和(22), 当  $\exists p \in P$ , 有

$$V_p(x(t)) \leq \gamma \|x(t_0)\|^m \exp\left\{-\frac{c}{b}(t - t_0)\right\}. \quad (23)$$

应用定理 1 的条件 4), 有

$$\|x(t)\|^m \leq \frac{\gamma}{a} \|x(t_0)\|^m \exp\left\{-\frac{c}{b}(t - t_0)\right\}. \quad (24)$$

由式(24), 得到

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{\gamma}{a}\right)^{1/m} \|x(t_0)\| \exp\left\{-\frac{c}{bm}(t - t_0)\right\}. \quad (25)$$

定理 1 得证. ■

## 4 应 用

在本节中, 将给出定理 1 的一些应用.

**实例 3** (带暂停时间的切换系统稳定性)

文献[21]介绍了带暂停时间的控制器. 该概念是基于这样的事实: 切换系统是稳定的, 如果所有的个别子系统是稳定的, 并且切换足够地慢, 以至于每次切换后的短暂影响可以忽略不计. 可以为慢切换指定一个数  $\tau_d > 0$ , 并限制许可的切换信号类, 于是, 切换时间  $t_1, t_2, \dots$  满足下面的不等式:

$$t_{i+1} - t_i \geq \tau_d, \quad \forall i. \quad (26)$$

数  $\tau_d$  看作暂停时间. 当族(6)中的非线性系统是指数稳定时, 切换系统指数稳定, 如果暂停时间  $\tau_d$  足够大. 在本实例中, 将应用定理 1 的结论, 确定  $\tau_d$  的下界.

考虑简单情况: 当  $P = \{1, 2\}$ , 同时, 在  $[t_0, t_1)$  上  $\sigma = 1$ , 在  $[t_1, t_2)$  上  $\sigma = 2$ , 其中

$$t_{i+1} - t_i \geq \tau_d, \quad i = 0, 1, \quad (27)$$

如图 4 所示.

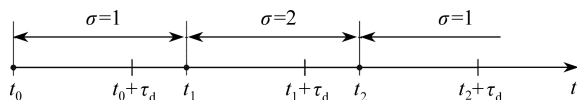


图 4 暂停时间的切换图示

Fig.4 A dwell time switching pattern

由关系式(18)和(27)及定理 1 的条件 1), 有

$$V_p(x(t_2)) \leq \left(\frac{b}{a}\right)^2 \exp\left\{-\frac{c}{b}(t_2 - t_0)\right\} V_p(x(t_0)) \leq \left(\frac{b}{a}\right)^2 \exp\left\{-\frac{2c}{b}\tau_d\right\} V_p(x(t_0)). \quad (28)$$

由定理 1 的条件 6), 有

$$V_p(x(t_2)) - V_p(x(t_0)) \leq -\gamma \|x(t_0)\|^2, \quad \exists \gamma > 0. \quad (29)$$

应用关系式(28)和(29), 得到

$$\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 \exp\left\{-\frac{2c}{b}\tau_d\right\} - 1\right] V_p(x(t_0)) \leq -\gamma \|x(t_0)\|^2. \quad (30)$$

由关系式(30)和定理 1 的条件 4), 给出

$$\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 \exp\left\{-\frac{2c}{b}\tau_d\right\} - 1\right] b \leq -\gamma. \quad (31)$$

如果  $\gamma$  可以是任意正数, 由关系式(31), 有

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 \exp\left\{-\frac{2c}{b}\tau_d\right\} \leq 1. \quad (32)$$

由式(32), 最终得到

$$\tau_d \geq \frac{b}{c} \ln \frac{b}{a}. \quad (33)$$

这就是期望得到的暂停时间下界.

#### 实例 4 (切换系统的稳定性)

切换系统的稳定问题包含了几个有趣的现象. 例如, 即使当所有的子系统是指数稳定, 对于某些切换信号, 切换系统可能是不稳定的<sup>[22]</sup>. 此外, 不稳定的子系统间可以谨慎地切换, 使之成为指数稳定的切换系统<sup>[23]</sup>.

给定切换信号(随机的、慢切换的, 等等)下的切换系统稳定性分析, 是一个十分重要的问题. 如果这样的话, 能够直接应用定理 1.

## 5 结 论

本文考虑了切换系统的指数稳定性分析. 多模型以自治非线性微分方程的形式给出. 分析基础为多次 Liapunov 函数, 并且证明了全局指数稳定性. 关系非模型化的动力学问题, 指数稳定系统有着强健的抗干扰能力.

给出了定理 1 的一些应用: 带暂停时间的切换系统, 给定切换信号的切换系统稳定性.

所得的结果, 可以推广到非自治连续系统(控制器的设计), 有意义地推广到切换系统的输入直到稳定状态的结果<sup>[18]</sup>.

#### 参考文献:

- [1] Tabuda P. *Verification and Control of Hybrid Systems, a Symbolic Approach*[M]. Berlin: Springer, 2009.
- [2] Liberzon D. *Switching in Systems and Control*[M]. Berlin: Springer, 2003.
- [3] Sun Z, Ge S. *Switched Linear Systems, Control and Design*[M]. Berlin: Springer, 2005.
- [4] Brockett R W. Asymptotic stability and feedback stabilization[C]//Brockett R W, Millman R S, Susmann H J. *Differential Geometric Control Theory*. Boston: Birkhauser, 1983: 181-191.
- [5] Cortes J. Discontinuous dynamical systems[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2008, 25



- (1): 36-73.
- [6] Lin H, Antsaklis P J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(2): 308-322.
- [7] Chatterjee D, Liberzon D. Stability analysis of deterministic and stochastic switched systems via a comparison principle and multiple Liapunov function[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2006, **45**(1): 174-206.
- [8] Geromel J C, Colaneri P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2006, **45**(5): 1915-1930.
- [9] Artstein Z, Romen J. On stabilization of switched linear systems[J]. *Systems and Control Letters*, 2008, **57**(11): 919-926.
- [10] Santarelli K R, Dahleh M A. Comparison between a switching controller and two LTI controllers for a class of LTI plants[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, **19**(2): 185-217.
- [11] Filipovic V Z. Hybrid control of systems with input delay[C]//Praha, Czech Republic, CD IFAC World Congress, 2005.
- [12] Filipovic V Z. Switching control in the presence of constraints and unmodeled dynamics[C]//Aschemann H. *New Approaches in Automation and Robotics*. I-Tech, Vienna, 2008: 227-238.
- [13] Filipovic V Z, Nedic N. Stability of switched stochastic nonlinear systems[C]//Mulder M. *Air Traffic Control*. SCYO, Vienna, 2010: 23-38.
- [14] Branicky M S. Multiple Liapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(4): 475-482.
- [15] Guan Z, Hill D, Shen X. On hybrid impulsive and switching systems and application to nonlinear control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(7): 1058-1062.
- [16] Li Z, Soh Y, Wen C. *Switched and Impulsive Systems*[M]. Berlin: Springer, 2005.
- [17] V·柯维克, M·维什柯维克, D·狄加瑞克, A·阿伯拉达维克. 非线性约束下非完整系统的平衡稳定性[J]. *应用数学和力学*, 2010, **31**(6): 722-730. (Čović V, Vesković M, Djurić D, Obradović A. On the stability of equilibria of nonholonomic systems with nonlinear constraints [J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2010, **31**(6): 751-760.)
- [18] 吴凡, 耿志勇. 非完整性多体编队运动的一种无源化控制方法[J]. *应用数学和力学*, 2010, **31**(1): 26-34. (WU Fan, GENG Zhi-yong. Formation control for nonholonomic agents using passivity techniques[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2010, **31**(1): 27-36.)
- [19] Sastry S. *Nonlinear Systems Analysis, Stability and Control*[M]. Berlin: Springer, 1999.
- [20] Van der Schaft A, Schumacher H. *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*[M]. Berlin: Springer, 2000.
- [21] Morse A S. Supervisory control of families of linear set-point controllers, part 1: exact matching[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(10): 1413-1431.
- [22] Decarlo R A, Branicky M S, Pettersson S, Lennartson B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2000, **88**(7): 1069-1082.
- [23] Isidori A. *Nonlinear Control Systems II*[M]. Berlin: Springer, 1999.
- [24] Vidyasagar M. *Nonlinear Systems Analysis*[M]. Philadelphia: SIAM, 2002.



# Global Exponential Stability of Switched Systems

V. Filipovic

(*Faculty of Mechanical Engineering, University of Kragujevac,  
Dositejeva 19, Kraljevo 36 000, Serbia*)

**Abstract**: A method for stability analysis of deterministic switched systems was proposed. Two motivational examples were introduced (nonholonomic system and constrained pendulum). The finite collection of models consists of nonlinear models and a switching sequence was arbitrary. It was supposed that there was no jump in the state at switching instants and there was no Zeno behavior, i. e. there was finite number of switches on every bounded interval. For analysis of deterministic switched systems, the multiple Liapunov functions were used and global exponential stability was proved. The exponentially stable equilibrium of systems is relevant for practice because such systems are robust to perturbations.

**Key words**: switching systems; multiple Liapunov functions; global exponential stability