文章编号:1000-0887(2011)09-1110-08

一类不连续时滞系统的一致最终有界性*

慕小武[1], 丁志帅[1], 程桂芳[1,2]

(1. 郑州大学 数学系,郑州 450001;
2. 郑州大学 物理工程学院,郑州 450001)

摘要: 主要讨论不连续的时滞自治系统,在 Filippov 解意义下的一致最终有界性问题. 基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函给出了全局强一致最终有界的 Lyapunov 定理,并将其应用到一类带有不连续摩擦项的时滞力学系统.

关 键 词: Filippov 解; 一致最终有界; 不连续系统; 时滞系统

中图分类号: O231.2 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.09.010

引 言

右端不连续的非线性系统近年来受到广泛关注与重视. 不连续系统出现在许多控制系统中,如切换系统、混杂系统、含有摩擦力的力学系统[1]等. 1964 年 Filippov[2]从几何直观、物理意义及与经典微分方程解的定义的协调性出发,定义了被普遍接受的 Filippov 解的概念,他把右端不连续的微分方程的解定义为一个满足微分集值映射的绝对连续函数,并研究了 Filippov 解的性质. 之后有许多学者在 Filippov 解的意义下来研究不连续系统,讨论不连续系统的稳定性、Lasalle 不变原理、镇定及 LaSalle 跟踪[3-8]等问题.

实际工程问题中,时滞现象的出现非常普遍,很多情况下时间的延迟效应会对系统的动力学性质产生明显的影响,所以研究时间滞后因素对系统的影响是重要课题. 在以不连续模型建模的系统中,很小的时滞也能引起系统的行为发生改变,影响有界性和稳定性,甚至会导致无界或失稳. 当要求动力系统的行为更加明确和精确时,时滞对系统有界性或稳定性的影响的研究是必要的,是不能被忽略的. Zhang 等[9-11]等首次利用泛函微分包含给出了时滞不连续系统的广义 Filippov 解和稳定性的定义,并讨论了一类时滞不连续系统反馈镇定和 L_2 增益问题并给出相关结果. 一致有界与一致最终有界是稳定性的一个重要考察方向[12]. 2000 年, Peuteman, Aeyels 和 Sepulchre[13]将非自治系统的一致有界与一致最终有界问题巧妙的转化为研究时不变冻结系统. 2004 年卜春霞和慕小武[14]推广了冻结系统的结果,给出非自治齐次系统一致有界与一致最终有界的 Lyapunov 定理. 2007 年程桂芳,慕小武和丁志帅[15]利用微分包含与 Filippov 解研究一类不连续非自治系统的一致最终有界问题. 基于以上分析,本文在广义 Filippov 解[9]的意义下,讨论不连续自治时滞系统的一致最终有界性,并在 Lyapunov-Krasovskii 泛

* 收稿日期: 2011-04-13; 修订日期: 2011-06-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60874006)
作者简介: 慕小武(1963—),男,河南温县人,教授,博士(E-mail: muxiaowu@zzu.edu.cn);
程桂芳(1979—),女,河南温县人,副教授,博士(联系人. E-mail: gfcheng@zzu.edu.cn).

函是 Lipschitz 连续且正则的条件下,给出全局强一致最终有界的 Lyapunov 定理.

不失一般性,设 R^n 为 n 维欧式空间, $\|\cdot\|$ 为向量的欧式模.给定常数 $r>0$, $C_r=C([0,r],R^n)$, C_r 中元素 $\boldsymbol{\phi}$ 的模记为 $\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathrm{c}}=\sup_{0\leqslant\tau\leqslant r}\|\boldsymbol{\phi}(\tau)\|$. $\boldsymbol{x}:[-r,+\infty)\to R^n$, $\boldsymbol{x}(t)$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 在 t 处的值, C_r 中元素 $\boldsymbol{x}_t$ 定义为 $\boldsymbol{x}_t(\tau)=\boldsymbol{x}(t-\tau)$, $\tau\in[0,r]$.连续函数 $\alpha(\cdot)$ 称为 $\mathcal{K}$ 函数,若是严格递增的,且满足 $\alpha(0)=0$.

本文结构如下:第 1 节是问题的陈述及基本概念,第 2 节在 Filippov 解意义下,给出不连续自治时滞系统的全局强一致最终有界性的 Lyapunov 定理.最后,把本文结果应用到一类带有摩擦项的时滞力学系统.

1　问题的陈述及基本概念

本文研究的系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t), \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}\in R^n$ 是状态向量, $t\in\mathbf{R}$ 为时间变量. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t): C_r\to R^n$ 是本性有界函数,且在平面 S_f 上不连续,其中

$$S_f=\{\boldsymbol{x}_t \mid S(\boldsymbol{x}_t(0))=0\}, \tag{2}$$

且 $S_f(\boldsymbol{x}_t(0))$ 为光滑函数.

首先给出右端不连续的时滞系统(1)的 Filippov 解的定义.

定义 1[9]　初始时刻为 t_0,绝对连续函数 $\boldsymbol{x}(\cdot):[-r+t_0,t_1]\to R^n$,称为是系统(1)的 Filippov 解,如果

$$\dot{\boldsymbol{x}}\in \boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}_t)\quad \text{a. e. } t\in[-r+t_0,t_1], \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}_t)=\overline{\mathrm{co}}\{\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t^i)\mid \boldsymbol{x}_t^i\to\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{x}_t^i\notin S_f\}, \tag{4}$$

这里, S_f 表示函数 $\boldsymbol{f}$ 不可微的点的集合,为零测集.

当 $\mathbf{0}\in\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\mathbf{0})$ 时,称 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 为系统(1)的平衡点.

注 1　由文献[9],设初值为 $\boldsymbol{x}_0(\tau)=\boldsymbol{\phi}(\tau)\in R^n$,其中 $\tau\in[0,r]$, $\boldsymbol{\phi}\in C_r$.系统(1)总存在以其为初值的 Filippov 解,且 Filippov 解一般是不唯一的.用 $\boldsymbol{x}_t$ 来表示以 $\boldsymbol{x}_0(\tau)=\boldsymbol{\phi}(\tau)$ 为初值的系统(1)的任意 Filippov 解,记为 $\boldsymbol{x}_t\in\Omega(\boldsymbol{\phi})$.事实上, $\boldsymbol{x}_t(0)=\boldsymbol{x}(t)$.

注 2　$\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}_t)$ 为集值泛函.

定义 2　设 $\mathbf{0}\in\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\mathbf{0})$,系统(1)在原点称为全局一致有界的,若对任意 $a>0$,存在 $b=b(a)>0$(与 t_0 无关),使得对任意初始条件 $\boldsymbol{\phi}$,当 $\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathrm{c}}\leqslant a$ 时,系统(1)的所有 Filippov 解 $\boldsymbol{x}_t\in\Omega(\boldsymbol{\phi})$ 都满足:

$$\|\boldsymbol{x}_t\|_{\mathrm{c}}\leqslant b,\qquad \forall t\geqslant t_0.$$

定义 3　设 $\mathbf{0}\in\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\mathbf{0})$,系统(1)在原点称为全局强一致最终有界的,若存在 $\lambda>0$,对任意 $\delta>0$,存在 $T=T(\lambda,\delta)>0$(与 t_0 无关),使得对任意初始条件 $\boldsymbol{\phi}$,当 $\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathrm{c}}\leqslant\delta$ 时,系统(1)的所有 Filippov 解 $\boldsymbol{x}_t\in\Omega(\boldsymbol{\phi})$ 都满足:

$$\|\boldsymbol{x}_t\|_{\mathrm{c}}\leqslant\lambda,\qquad \forall t\geqslant t_0+T(\lambda,\delta).$$

对于时滞系统的分析,Lyapunov-Krasovskii 泛函是一个重要的工具且通常情况下考虑具有如下形式:存在函数 $Q(s)$ 满足 $Q(s)>0$, $\forall s\neq 0$ 且 $Q(0)=0$,使得:

$$V(\boldsymbol{x}_t)=V_1(\boldsymbol{x}_t(0))+\int_{t-\tau}^{t}Q(\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s. \tag{5}$$

下面回顾关于非光滑情形下的 Clarke 广义导数概念，以及 Lipschitz 连续的正则函数(Filippov 意义下)沿着 Filippov 解轨道的链法则.

定义 4[12](Clarke 广义梯度) 对于局部 Lipschitz 连续泛函 $V_1:R^n\to\mathbf{R}$，在 $\boldsymbol{x}$ 处的广义梯度定义为

$$\partial V_1(\boldsymbol{x})=\overline{\mathrm{co}}\{\lim_{i\to+\infty}\nabla V_1(\boldsymbol{x}^i)\mid \boldsymbol{x}^i\to\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^i\notin\Omega_{V_1}\},\tag{6}$$

其中，Ω_{V_1} 为包含所有 V_1 不可导的点的零测集，梯度∇为相对于时间的导数($\partial/\partial t$).

定义 5[12] 对于方向 $\boldsymbol{v}\in R^n$，函数 $V_1(\boldsymbol{x})$ 的广义方向导数定义为

$$V_1^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=\lim_{t\to0^+}\sup_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}}\frac{V_1(\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{v})-V_1(\boldsymbol{y})}{t}.\tag{7}$$

定义 6[12] $V_1(\boldsymbol{x})$ 称为正则函数，如果满足：

(i) 对于任意方向 $\boldsymbol{v}\in R^n$，函数 $V_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 的单侧方向导数 $V_1'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 存在；

(ii) 对于任意方向 $\boldsymbol{v}\in R^n$，$V_1'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=V_1^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$.

注 3 显然，所有的光滑函数均为正则的[12].

引理 1[3,16](链法则) 设 $\boldsymbol{x}_t\in\Omega(\boldsymbol{\phi})$ 为系统(1)的任意 Filippov 解，$V:C_r\to\mathbf{R}$ 是如式(5)构造的全局 Lipschitz 连续泛函，V_1 为全局 Lipschitz 连续的正则函数. 则 $V(\boldsymbol{x}_t)$ 是绝对连续的，$\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}_t)/\mathrm{d}t$ 几乎处处存在，且满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x}_t)\in^{\mathrm{a.e.}}\dot{\tilde{V}}(\boldsymbol{x}_t),\tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}(\boldsymbol{x}_t)&:=\dot{\tilde{V}}_1(\boldsymbol{x})+Q(\boldsymbol{x}(t))-Q(\boldsymbol{x}(t-\tau))=\\&\bigcap_{\xi\in\partial V_1(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}_t)+Q(\boldsymbol{x}(t))-Q(\boldsymbol{x}(t-\tau)).\end{aligned}\tag{9}$$

2 主要结果

这节，在 Filippov 解的意义下，基于 Lipschitz 连续的 Lyapunov 泛函，给出不连续时滞系统全局强一致最终有界的 Lyapunov 定理.

定理 1 设 $\boldsymbol{0}\in\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{0})$. 设存在 $\lambda>0$，对任意 $\delta>0$，$V:C_r\to\mathbf{R}$ 是全局 Lipschitz 连续泛函，使得当初值 $\boldsymbol{x}_0(\tau)=\boldsymbol{\phi}(\tau)$ 满足 $\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathrm{c}}\leqslant\delta$ 时，系统(1)的所有 Filippov 解 $\boldsymbol{x}_t\in\Omega(\boldsymbol{\phi})$ 都满足：

(i) 存在 $\mathcal{K}_\infty$ 函数 α_1,α_2，使得：

$$\alpha_1(\|\boldsymbol{x}_t(0)\|)\leqslant V(\boldsymbol{x}_t)\leqslant\alpha_2(\|\boldsymbol{x}_t\|_{\mathrm{c}});\tag{10}$$

(ii) $\exists 0<\mu<\alpha_2^{-1}(\alpha_1(\lambda))$，当任意 $\|\boldsymbol{x}_t\|_{\mathrm{c}}\geqslant\mu$ 时，存在 $\mathcal{K}$ 函数 α_3，使得：

$$\dot{\tilde{V}}(\boldsymbol{x}_t)\mid_{(1)}\leqslant-\alpha_3(\|\boldsymbol{x}_t(0)\|),\tag{11}$$

则时滞不连续系统(1)在原点是全局强一致最终有界的.

证明 对于初值 $\boldsymbol{\phi}$，任意选取系统(1)的一个 Filippov 解 $\boldsymbol{x}_t\in\Omega(\boldsymbol{\phi})$，必满足下列两种情况之一：

(Ⅰ) $V(\boldsymbol{x}_0)\leqslant\alpha_2(\mu)$；(Ⅱ) $V(\boldsymbol{x}_0)>\alpha_2(\mu)$.

情形 1 当(Ⅰ)成立时，令

$$T=\sup\{t\mid V(\boldsymbol{x}_t)\leqslant\alpha_2(\mu),t_0\leqslant s\leqslant t\}.\tag{12}$$

则 $T=+\infty$. 反证：否则，必有 $T<+\infty$. 则当 $t<T$ 时，此 Filippov 解 $\boldsymbol{x}_t\in\Omega(\boldsymbol{\phi})$ 满足：

$$V(\boldsymbol{x}_t)\leqslant\alpha_2(\mu).\tag{13}$$

当 $t=T$ 时,Filippov 解 $\boldsymbol{x}_t$ 满足

$$V(\boldsymbol{x}_T)=\alpha_2(\mu).\tag{14}$$

从而

$$V(\boldsymbol{x}_T)=\alpha_2(\mu)\leqslant\alpha_2(\|\boldsymbol{x}_T\|_{\mathrm{c}})\Rightarrow\|\boldsymbol{x}_T\|_{\mathrm{c}}\geqslant\mu.\tag{15}$$

则存在 $\theta\in[T-r,T]$, 使得:

$$\|\boldsymbol{x}_T\|_{\mathrm{c}}=\|\boldsymbol{x}(\theta)\|\geqslant\mu.$$

由 $\|\boldsymbol{x}(s)\|$ 的连续性,存在区间$[d_1,d_2]\subset[T-r,T]$, 使得下式成立:

$$\|\boldsymbol{x}(s)\|\geqslant\frac{\mu}{2},\qquad\forall s\in[d_1,d_2].$$

另一方面, 由 $V(\boldsymbol{x}_t)$ 是 Lipschitz 连续的,必为绝对连续的.结合式(11),有

$$\begin{aligned}&V(\boldsymbol{x}_T)-V(\boldsymbol{x}_{T-r})=\\&\quad\int_{T-r}^{T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}V(\boldsymbol{x}_s)\mathrm{d}s\leqslant-\int_{T-r}^{T}\alpha_3(\|\boldsymbol{x}_s(0)\|)\mathrm{d}s=\\&\quad-\int_{T-r}^{T}\alpha_3(\|\boldsymbol{x}(s)\|)\mathrm{d}s\leqslant-\int_{d_1}^{d_2}\alpha_3(\|\boldsymbol{x}(s)\|)\mathrm{d}s\leqslant\\&\quad-\alpha_3\left(\frac{\mu}{2}\right)(d_2-d_1)<0,\end{aligned}$$

则 $\qquad V(\boldsymbol{x}_{T-r})>V(\boldsymbol{x}_T)=\alpha_2(\mu),$

与式(13)矛盾.从而 $T=+\infty$.

所以对 $\forall t\geqslant t_0$,系统(1) 的所有以 $\boldsymbol{\phi}$ 为初值的 Filippov 解 $\boldsymbol{x}_t\in\Omega(\boldsymbol{\phi})$ 都满足 $V(\boldsymbol{x}_t)\leqslant\alpha_2(\mu)$.由式(10), 知

$$\|\boldsymbol{x}_t(0)\|\leqslant\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2(\mu)<\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2(\alpha_2^{-1}\circ\alpha_1(\lambda))=\lambda.$$

即对任意 $t\geqslant t_0$, $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\lambda$, 有

$$\max_{\tau\in[0,r]}\|\boldsymbol{x}_t(\tau)\|\leqslant\lambda,\qquad\forall t\geqslant t_0+r.$$

因此 $\qquad\|\boldsymbol{x}_t\|_{\mathrm{c}}\leqslant\lambda,\qquad\forall t\geqslant t_0+r.$

情形 2　当(Ⅱ)成立时,设

$$\tilde{T}=\sup\{t\mid V(\boldsymbol{x}_t)>\alpha_2(\mu),\ t_0\leqslant s\leqslant t\},\tag{16}$$

则 $\tilde{T}<+\infty$.反证:否则,必有 $\tilde{T}=+\infty$.则此 Filippov 解 $\boldsymbol{x}_t\in\Omega(\boldsymbol{\phi})$ 满足:

$$V(\boldsymbol{x}_t)>\alpha_2(\mu),\qquad\forall t\geqslant t_0.$$

则 $\qquad\alpha_2(\mu)<V(\boldsymbol{x}_t)\leqslant\alpha_2(\|\boldsymbol{x}_t\|_{\mathrm{c}})\Rightarrow\|\boldsymbol{x}_t\|_{\mathrm{c}}>\mu,\qquad\forall t\geqslant t_0.$

将区间 $[t_0-r,t)$ 进行分割,不妨设 $t=t_0+Nr+\sigma$,其中 $0\leqslant\sigma<r$,N 为正整数,则分割区间为

$$\begin{aligned}&[t_0-r,t_0]\cup[t_0,t_0+r]\cup[t_0+r,t_0+2r]\cup\cdots\\&\quad\cup[t_0+(N-1)r,t_0+Nr]\cup[t_0+Nr,t).\end{aligned}$$

在各子区间上,存在 $\theta_k\in[t_0+(k-1)r,t_0+kr]$, $k=0,1,\cdots,N$, 使得:

$$\|\boldsymbol{x}_{t_0+kr}(\theta_k)\|=\|\boldsymbol{x}_{t_0+kr}\|_{\mathrm{c}}.$$

注意到 $\dot{\tilde{V}}\leqslant0$,则任意 Filippov 解 $\boldsymbol{x}_t$ 有界,故存在常数 $L>0$,使得 $\|\dot{\boldsymbol{x}}(s)\|\leqslant L$.

对于任意 $\boldsymbol{\upsilon}\in[t_0+(k-1)r,t_0+kr]$, 由

$$\boldsymbol{x}(\upsilon)=\boldsymbol{x}_{t_0+kr}(\theta_k)+\int_{\theta_k}^{\upsilon}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s.$$

从而 $\quad \|\boldsymbol{x}(v)\| \geqslant \|\boldsymbol{x}_{t_0+kr}(\theta_k)\| - L|v-\theta_k|$.

令 $\xi=\mu/(2L)$，取

$$I_k=[\theta_k-\xi,\theta_k+\xi]\cap[t_0+(k-1)r,t_0+kr],\qquad k=0,1,\cdots,N.$$

则在区间 $I_k(k=0,1,\cdots,N)$ 上成立：

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|>\frac{\mu}{2},\text{且 }|I_k|=\xi.$$

则在区间 (t_0,t) 内积分，有

$$V(\boldsymbol{x}_t)=V(\boldsymbol{x}_{t_0})-\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}V(\boldsymbol{x}_s)\mathrm{d}s\leqslant V(\boldsymbol{x}_{t_0})-\int_{t_0}^{t}\alpha_3(\|\boldsymbol{x}_s(0)\|)\mathrm{d}s=$$
$$V(\boldsymbol{x}_{t_0})-\int_{t_0}^{t}\alpha_3(\|\boldsymbol{x}(s)\|)\mathrm{d}s\leqslant V(\boldsymbol{x}_{t_0})-\sum_{k=0}^{N}\int_{I_k}\alpha_3(\|\boldsymbol{x}(s)\|)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$V(\boldsymbol{x}_{t_0})-\xi(N+1)\alpha_3\left(\frac{\mu}{2}\right).$$

当 $t\to+\infty$ 时，则 $N\to+\infty$ 且 $V(\boldsymbol{x}_t)\to-\infty$，与泛函 $V(\boldsymbol{x}_t)$ 的正定性矛盾. 则当 $t=\tilde{V}<+\infty$ 时，必成立：

$$V(\boldsymbol{x}_{\tilde{T}})=\alpha_2(\mu).$$

进一步地，我们可以对时间 $\tilde{T}$ 进行估计. 类似于上面的讨论，设 $\tilde{T}=t_0+N^*r+\boldsymbol{\sigma}^*$，其中 $0\leqslant\boldsymbol{\sigma}^*<r$，$N^*$ 为正整数. 在 $[t_0,\tilde{T}]$ 上积分，得

$$V(\boldsymbol{x}_{\tilde{T}})-V(\boldsymbol{x}_{t_0})\leqslant-\xi(N^*+1)\alpha_3\left(\frac{\mu}{2}\right).$$

则 $$N^*\leqslant\frac{V(\boldsymbol{x}_{t_0})-V(\boldsymbol{x}_{\tilde{T}})}{\xi\alpha_3(\mu/2)}-1\leqslant\frac{V(\boldsymbol{x}_{t_0})-V(\boldsymbol{x}_{\tilde{T}})}{\xi\alpha_3(\mu/2)}\leqslant\frac{\alpha_2(\delta)-\alpha_2(\mu)}{\xi\alpha_3(\mu/2)},$$

从而 $$\tilde{T}=t_0+N^*r+\boldsymbol{\sigma}^*\leqslant t_0+\frac{\alpha_2(\delta)-\alpha_2(\mu)}{\xi\alpha_3(\mu/2)}r+r=t_0+T(\lambda,\delta),$$

其中，$T(\lambda,\delta)$ 与 t_0 无关.

则对于任意 $t\geqslant t_0+T(\lambda,\delta)$，系统(1)的所有以 $\boldsymbol{\phi}$ 为初值的 Filippov 解 $\boldsymbol{x}_t\in\Omega(\boldsymbol{\phi})$ 都满足 $V(\boldsymbol{x}_t)\leqslant\alpha_2(\mu)$. 由式(10)，有

$$\|\boldsymbol{x}_t(0)\|\leqslant\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2(\mu)<\lambda,\qquad\forall t\geqslant t_0+T(\lambda,\delta).$$

综上，定理证毕.

注4 定理1是针对系统的绝对连续的 Filippov 解意义下给出的，但是我们知道，对于右端不连续力学系统来说，比如单侧约束系统，不连续解的存在不仅是可能的，也是容许的. 比如一个弹跳的球击打在地上时，会有一个速度的瞬时改变，这相应于描述球的速度演化的系统轨线的跳跃，即轨线存在有不连续性. 如何处理系统不连续轨线的稳定性相关的问题，是今后努力的方向.

3 算　　例

考虑带有摩擦项的时滞力学系统：

$$m\ddot{y}+c\,\mathrm{sgn}(\dot{y}(t-\tau))+e\dot{y}+ky+ka^2y^3=A\cos(wt),\tag{17}$$

其中，$y\in\mathbf{R}$ 为状态变量，m,c,e,k,a 和 A 均为正常数. 为了便于计算，不妨设 $m=c=e=k=a=1$，$A=Mm$，这里 $M\geqslant0$. 当 $M=0$ 时，有 $\mathbf{0}\in\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\mathbf{0})$. 给定常数 $r>0$，时滞参数 $\boldsymbol{\tau}$ 满足 $\boldsymbol{\tau}\in[0,r]$. 这时，令

$$x_1=y,\ x_2=\dot{y},$$

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，则系统(17)变为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix} x_2 \\ -(1+x_1^2)x_1-x_2-\operatorname{sgn}(x_2(t-\tau))+M\cos(wt) \end{pmatrix}:=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t).$$

显然 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t)$ 在 $S_f=\{\boldsymbol{x}_t \mid x_2(t-\tau)=0\}$ 上不连续. 选择 Lipschitz 连续的 Lyapunov-Krasovskii 泛函为

$$V(\boldsymbol{x}_t)=V_1(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t}\|\boldsymbol{x}(s)\|^2\mathrm{d}s=$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}x_1^4+\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t}\|\boldsymbol{x}(s)\|^2\mathrm{d}s, \tag{18}$$

其中
$$P=\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

为对称的正定矩阵. 显然

$$V(\boldsymbol{x}_t)\geqslant V_1(\boldsymbol{x})\geqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\geqslant \lambda_{\min}(P)\|\boldsymbol{x}\|^2,$$

$$V(\boldsymbol{x}_t)\leqslant V_1(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_t\|_{\mathrm{c}}^2\cdot\tau\leqslant \lambda_{\max}(P)\|\boldsymbol{x}\|^2+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^4+\frac{r}{2}\|\boldsymbol{x}_t\|_{\mathrm{c}}^2.$$

下面结合链法则(引理1)，得到

$$\dot{\tilde{V}}(\boldsymbol{x}_t)=\dot{\tilde{V}}_1(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2=$$

$$\bigcap_{\xi\in\partial V_1(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}_t)+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2=$$

$$(\nabla V_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}_t)+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2\subset$$

$$\begin{bmatrix} 3x_1+x_2+2x_1^3 \\ x_1+2x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\begin{bmatrix} x_2 \\ -(1+x_1^2)x_1-x_2-\operatorname{sgn}(x_2(t-\tau))+M\cos(wt) \end{bmatrix}+$$

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2=$$

$$\begin{bmatrix} 3x_1+x_2+2x_1^3 \\ x_1+2x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} x_2 \\ -(1+x_1^2)x_1-x_2-\boldsymbol{K}[\operatorname{sgn}(x_2(t-\tau))]+M\cos(wt) \end{bmatrix}+$$

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2=$$

$$3x_1x_2+x_2^2+2x_1^3x_2-x_1^2(1+x_1^2)-2x_1x_2(1+x_1^2)-x_1x_2-2x_2^2+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2-$$

$$(x_1+2x_2)\boldsymbol{K}[\operatorname{sgn}(x_2(t-\tau))]+(x_1+2x_2)M\cos(wt)-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2.$$

又
$$\boldsymbol{K}[\operatorname{sgn}(x_2(t-\tau))]=\begin{cases} -1, & x_2(t-\tau)<0, \\ [-1,1], & x_2(t-\tau)=0, \\ 1, & x_2(t-\tau)>0. \end{cases}$$

从而

$$\dot{\tilde{V}}(\boldsymbol{x}_t)=-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2-x_1^4-(x_1+2x_2)\boldsymbol{K}[\operatorname{sgn}(x_2(t-\tau))]+$$

$$(x_1+2x_2)M\cos(wt)-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2\leqslant$$

$$-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2-x_1^4+|x_1|+2|x_2|+M(|x_1|+2|x_2|)-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2\leqslant$$

$$-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2-x_1^4+(|x_1|+2|x_2|)(1+M).$$

注意到$|x_1|+2|x_2|\leqslant\sqrt{5}\|\boldsymbol{x}\|$，则上述不等式变为

$$\dot{\tilde{V}}(\boldsymbol{x}_t)\leqslant-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2-x_1^4+\sqrt{5}(1+M)\|\boldsymbol{x}\|.$$

选取$0<\theta<1/2$，则

$$\dot{\tilde{V}}(\boldsymbol{x}_t)\leqslant-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2-x_1^4+\sqrt{5}(1+M)\|\boldsymbol{x}\|=$$

$$-\theta\|\boldsymbol{x}\|^2-x_1^4-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\|\boldsymbol{x}\|^2+\sqrt{5}(1+M)\|\boldsymbol{x}\|.$$

当$\|\boldsymbol{x}\|$足够大，使得

$$(1/2-\theta)\|\boldsymbol{x}\|^2\geqslant\sqrt{5}(1+M)\|\boldsymbol{x}\|,$$

不妨设为

$$\|\boldsymbol{x}\|\geqslant\mu:=\mu(\theta,M)=2\sqrt{5}(1+M)/(1-2\theta),$$

这时下式成立：

$$\|\boldsymbol{x}_t\|_c\geqslant\mu=\mu(\theta,M)=2\sqrt{5}(1+M)/(1-2\theta),\qquad\forall t\geqslant t_0+r,$$

以及 $$\dot{\tilde{V}}(\boldsymbol{x}_t)\leqslant-\theta\|\boldsymbol{x}\|^2-x_1^4.$$

由定理1知，时滞不连续系统(17)是全局一致强最终有界的。

4 结　论

本文在广义Filippov解的意义下，讨论不连续自治时滞系统的一致最终有界性，并在Lyapunov-Krasovskii泛函是Lipschitz连续且正则的条件下，给出全局强一致最终有界的Lyapunov定理。这些结果，为进一步研究时滞系统不连续的稳定性相关的问题，提供了参考。

参考文献：

[1] Matrosov V M. On the stability of motion[J]. *J Appl Math Mech*, 1962, **26**(5): 1337-1353.

[2] Filippov A F. Differential equations with discontinuous right-hand side[J]. *Amer Math Soc Translations*, 1964, **42**(2): 199-231.

[3] Shevitz D, Paden B. Lyapunov stability theory of nonsmooth systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(9): 1910-1914.

[4] Ceragioli F. Discontinuous ordinary differential equations and stabilization[D]. Firenze: Dipartmento di Matematica, Universita Degli Studi, 1999.

[5] Bacciotti A, Ceragioli F. Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth Lyapunov functions[J]. *Esaim Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1999, **4**: 361-376.

[6] Loria A, Panteley E. Nijmeijer H. A remark on passivity-based and discontinuous control of uncertain nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2001, **37**(9): 1481-1487.

[7] 郭兴明，罗辉. 一类具有不连续非线性项的微分包含[J]. 上海大学学报(自然科学版), 2000, **6**(4): 291-297. (GUO Xing-ming, LUO Hui. Differential inclusions with discontinuous nonlin-

ear items[J]. *Journal of Shanghai University* (*Natural Science*), 2000, **6**(4): 291-297. (in Chinese))

[8] Nakakuki T, Shen T L, Tamura K. Robust tracking control for robot systems with discontinuous uncertainty: an approach based on Filippov's framework[J]. *Electrical Engineering in Japan*, 2008, **164**(4): 463-470.

[9] Zhang J Y, Shen T L, Jiao X H. Stability and feedback design of a class of time-delay systems with discontinuity: functional differential inclusion-based approach[J]. *IEE J Trans EIS*, 2009, **129**(6): 1108-1114.

[10] Zhang J Y, Shen T L, and Jiao X H. Functional differential inclusion-based approach to control of discontinuous nonlinear systems with time delay[C]//*Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, 2008: 5300-5305.

[11] Zhang J Y, Shen T L, Jiao X H. L_2-gain analysis and feedback design for discontinuous time-delay systems based on functional differential inclusion[C]//*Proceedings of Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, 2009: 5114-5119.

[12] Khalil H K. *Nonlinear Systems*[M]. 3rd Edition. New Jewsy: Prentice Hall, 2002.

[13] Peuteman J, Aeyels D, Sepulchre R. Boundedness properties for time-varying nonlinear systems[J]. *Siam Journal on Control and Optimization*, 2000, **39**(5): 3408-3422.

[14] 卜春霞, 慕小武. 一类时变非线性系统的一致有界性的注记[J]. 数学的实践与认识, 2004, **34**(6): 138-142. (BU Chun-xia, MU Xiao-wu. A note for uniform boundedness of a class of time-varying nonlinear systems[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2004, **34**(6): 138-142. (in Chinese))

[15] 程桂芳, 慕小武, 丁志帅. 一类不连续非自治系统的一致最终有界性[J]. 应用数学学报, 2007, **30**(4): 675-681. (CHENG Gui-fang, MU Xiao-wu, DING Zhi-shuai. Uniformly ultimate boundedness for a class of discontinuous nonautonomous systems[J]. *Acta Mathematica Applicatae Sinica*, 2007, **30**(4): 675-681. (in Chinese))

[16] Clarke F H, Ledyaev Y S, Stern R J, Wolenski P R. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*[M]. Graduate Texts in Mathematics, New York: Springer, 1998.

[17] Filippov A F. *Differential Equations With Discontinuous Right-Hand Sides*[M]. Netherlands: Dordrecht, Kluwer, 1988.

Uniformly Ultimate Boundedness for a Class of Discontinuous Systems With Time-Delays

MU Xiao-wu[1], DING Zhi-shuai[1], CHENG Gui-fang[1, 2]

(1. *Department of Mathematics*, *Zhengzhou University*, *Zhengzhou* 450001, *P. R. China*;
2. *Physical Engineering College*, *Zhengzhou University*, *Zhengzhou* 450001, *P. R. China*)

Abstract: Uniformly ultimate boundedness of discontinuous systems with time-delays in the sense of Filippov solutions were mainly discussed. Based on Lyapunov-Krasovskii functional, Lyapunov theorem for globally strongly uniformly ultimate boundedness of retarded discontinuous systems was shown. Furthermore, the result is applied to a class of mechanical systems with retarded discontinuous friction item.

Key words: Filippov solutions; uniformly ultimate boundedness; discontinuous systems; ratarded systems