

一类弹性储液箱同液体耦合 晃动问题的分岔行为分析*

钟 顺^{1,2,3}, 陈予恕^{1,2,3}

- (1. 天津大学 机械工程学院 航空航天研究院 非线性动力学研究中心,天津 300072;
2. 天津大学 内燃机燃烧学国家重点实验室,天津 300072;
3. 天津市非线性动力学与混沌控制重点实验室,天津 300072)

(我刊编委陈予恕来稿)

摘要: 建立了弹性圆柱型储液箱同液体耦合系统在外激励下的非线性振动方程组.采用多尺度法、奇异性理论研究此非线性振动系统共振解的分岔行为,通过对其分岔行为的分析和讨论,得到了这一系统的多种转迁集和分岔图,建立了系统参数与其拓扑分岔解的联系,并且分析了不同参数下系统的分岔特性,为实现储液器参数的优化控制提供了理论依据.

关键词: 弹性液固耦合系统; 分岔方程; 奇异性理论; 晃动控制

中图分类号: TB12;O322 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.09.008

引 言

储液箱体同液体耦合晃动动力学与控制是动力学与控制学科及其交叉学科的重要研究领域.其广泛应用于土木工程、汽车工程、船舶动力学以及航空航天工业中.液固耦合晃动及其最优控制始终是航空航天飞行器总体设计的核心问题之一^[1-3].迄今为止国内外航天力学工作者对充液系统的耦合晃动问题进行了广泛的研究^[4-5].由于液固耦合晃动问题可造成灾难性的破坏事故,使得液固耦合动力学的深入研究更加需要,同时,由于耦合问题存在大量的非线性因素,也使得此问题的理论研究更加复杂.

为建立有效的数学模型以研究充液耦合系统的动力学行为,尹立中、马兴瑞等^[6-7]将液体的速度势函数在自由液面处展开,利用 Lagrange 函数,导出了广义模态坐标下的非线性方程组,从而进行理论分析.本文在此模型的基础上,进一步引入了储液箱的弹性变形对耦合充液系统的影响,利用模态展开的方法,从而得到描述弹性储液箱同液体耦合晃动系统的常微分非线性方程组.并应用多尺度法和 C-L(Chen-Langford)方法对系统进行研究分析,得到了系统丰

* 收稿日期: 2010-10-11; 修订日期: 2011-04-14

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(10632040);天津市自然科学基金重点资助项目(09JCZDJC26800)

作者简介: 钟顺(1983—),男,河北易县人,博士(E-mail:ily_00000@163.com);

陈予恕(1931—),男,山东肥城人,教授,博士生导师,中国工程院院士(联系人.E-mail:yschen@tju.edu.cn).

富的动力学行为,为保证充液耦合系统在工程应用中的稳定性起到指导意义。

1 弹性充液耦合系统的非线性振动控制方程

系统模型如图 1 所示,设储液器半径为 a ,外高为 H ,内部水高为 d ,材料密度为 ρ_s ,弹性模量为 E ,液体的密度记为 ρ_l 。在柱坐标系中,原点 O 位于静液面的中心,取系统的对称轴为 z 轴,向上为正。记流体的自由面为 S_f ,系统静止时的自由面记为 S_f^0 ,自由面上一点到静止水面的高度差为 η ,即波高函数,在连接附件上作用简谐激励 $F\sin(\Omega t)$ 。

设流体为均匀、无粘、无旋、不可压缩的理想流体,且箱体的振动远远小于箱体的厚度 Δh 。定义水波的运动区域为: $0 < r < a$, $0 < \theta \leq 2\pi$, 且 $-d < z < \eta(r, \theta, t)$, 同时,定义 $\varphi(r, \theta, z, t)$ 为速度势函数,由 $\nabla^2 \varphi = 0$, 得到自由液面 $z = \eta(r, \theta, t)$ 上的运动学方程和动力学方程^[7] 分别为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (2)$$

同刚性储液箱的边界条件不同,弹性储液箱同液体耦合的边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, & z = -d, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \dot{w}(\theta, z, t), & r = a, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\dot{w}(\theta, z, t)$ 为储液箱弹性变形的径向速度。

根据分离变量法,可将速度势函数、波高函数以及径向速度展开^[7-8]:

$$\varphi(r, \theta, z, t) = \sum_{n=1}^N \frac{\cosh[k_n(z+h)]}{\cosh k_n h} \varphi_n(r, \theta) \phi_n(t), \quad (4)$$

$$\eta(r, \theta, t) = f(r) + \sum_{n=1}^N \xi_n(r, \theta) \eta_n(t), \quad (5)$$

$$\dot{w}(\theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{mn} \cos n\theta \cos\left(\frac{m\pi z}{d}\right) \phi_n(t), \quad (6)$$

其中, $\phi_n(t)$ 和 $\eta_n(t)$ 为速度势函数和波高函数的广义模态位移, $f(r)$ 为静液面曲线, $\varphi_n(r, \theta) = A_n J_n(k_n r) \cos(n\theta)$ 为速度势函数模态, $\xi_n(r, \theta) = B_n J_n(k_n r) \cos(n\theta)$ 为自由液面模态, A_n, B_n 和 f_{mn} 为模态标准正交化系数, J 为 Bessel 函数, k_n 为 $J'_n(k_n R) = 0$ 的解。

考虑弹性储液箱的弹性变形所引入的弹性储液箱的“呼吸”模态(见图 2)将会引起储液箱中液体燃料的轴对称模态(见图 3)。假设外激干扰均沿柱形储液箱的径向分布(即不考虑储液箱的水平运动,仅考虑储液箱的“呼吸”模态)。为了描述方便,取液体第一阶和第二阶轴对称模态,箱体的第一阶“呼吸”模态,高阶模态截断大约会引入 10% 左右的截断误差,这在定性分析中,一般是可以接受的。

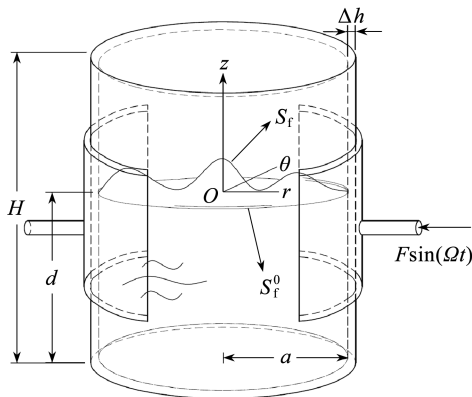


图 1 物理模型

Fig. 1 Physical model

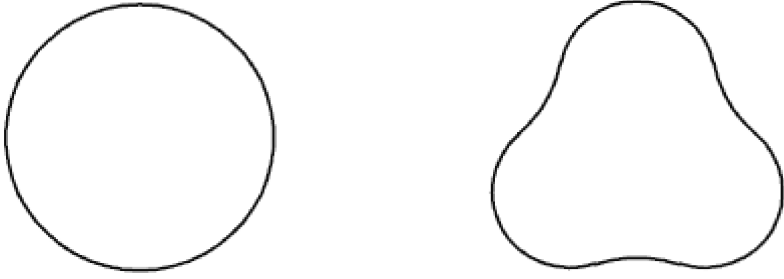


图2 箱体的“呼吸”模态

Fig.2 Respiratory modals of tank

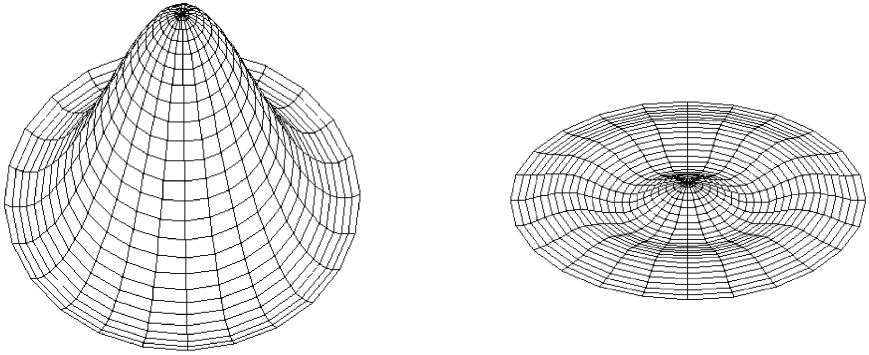


图3 液体的第一阶和第二阶轴对称模态

Fig.3 First and second order axisymmetric modals of liquid

将式(4)~(6)代入方程(1)和(2)进行 Galerkin 离散^[8]. 对于柱形容器,利用模态的正交性,并考虑液体对箱体的动态惯性力的作用,得到系统的非线性振动方程组:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -c_1 \dot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1^2 + a_2 \dot{x}_2^2 + a_3 x_1 x_3^2 + a_4 \dot{x}_3^2, \\ \ddot{x}_2 + \omega_1^2 x_2 = -c_2 \dot{x}_2 + a_5 \dot{x}_1^2 + a_6 \dot{x}_2^2 + a_7 x_2 x_3^2 + a_8 \dot{x}_3^2, \\ \ddot{x}_3 + \omega_2^2 x_3 = -c_3 \dot{x}_3 + a_9 (-a_{10} x_1 - a_{11} x_2 - a_{12} (a_{13} x_1 + a_{14} x_2)^2) x_3 + \\ \quad a_{15} F (1 + a_{16} (a_{10} x_1 + a_{11} x_2 + a_{12} (a_{13} x_1 + a_{14} x_2)^2)) \sin(\Omega t), \end{cases} \quad (7)$$

其中, x_1, x_2, x_3 分别为液体第一阶模态、第二阶模态、箱体第一阶模态的广义坐标; $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ 分别液体第一阶模态、第二阶模态、箱体第一阶模态对应的频率; c_1, c_2, c_3 分别液体第一阶模态、第二阶模态、箱体第一阶模态对应的阻尼; $a_1 \sim a_{16}$ 为整理系数.

2 组合共振情况下的分岔方程

利用多尺度法对系统进行求解,在组合共振时, $\Omega = \omega_0 + 2\omega_2 + \varepsilon\sigma$, 得到方程(7)相应的3个消除永年项的条件^[9]:

$$\begin{aligned} i\omega_0(2A_1' + c_1 A_1) - 2a_4 \bar{A}_3 \Lambda \omega_2 \Omega e^{i\sigma\tau_1} &= 0, \\ i\omega_1(2A_2' + c_2 A_2) &= 0, \\ i\omega_2(2A_3' + c_3 A_3 + 2a_9 a_{12} a_{13}^2 A_1 \bar{A}_1 A_3 + 2a_9 a_{12} a_{14}^2 A_2 \bar{A}_2 A_3) + \\ &\left(\frac{1}{2} i a_{10} a_{15} a_{16} \bar{A}_1 F + a_9 a_{10} \bar{A}_1 \Lambda\right) e^{i\sigma\tau_1} &= 0, \end{aligned}$$

其中, A_1, A_2, A_3 分别为液体第一阶模态、第二阶模态、箱体第一阶模态的广义坐标自由振动的振幅, $\Lambda = -(1/2)(a_{15}F/(\omega_2^2 - \Omega^2))$ 为由于干扰力引起的强迫振动的振幅.

令

$$A_n(\tau_1) = \frac{1}{2}\alpha_n(\tau_1)e^{i\theta_n(\tau_1)}, \quad n = 1, 2, 3,$$

则分离虚实部可以得到如下 6 个方程:

$$\begin{cases} \alpha_1' = (a_4 a_{15} \omega_2^2 \alpha_3 F \sin \gamma - 2c_1 \alpha_1 \omega_0^2 \omega_2 - c_1 \alpha_1 \omega_0^3 + \\ \quad a_4 a_{15} \omega_0 \omega_2 F \alpha_3 \sin \gamma) / (4\omega_0^2 \omega_2 + 2\omega_0^3), \\ \theta_1' = (a_4 a_{15} \omega_2^2 \alpha_3 F \cos \gamma + a_4 a_{15} \omega_0 \omega_2 \alpha_3 F \cos \gamma) / \alpha_1 (4\omega_0^2 \omega_2 + 2\omega_0^3), \\ \alpha_2' = -\frac{1}{2}c_2 \alpha_2, \quad \theta_2' = 0, \\ \alpha_3' = (-a_9 a_{10} a_{15} \alpha_1 F \sin \gamma - a_{10} a_{15} a_{16} \alpha_1 F \omega_0^2 \cos \gamma - 2a_{10} a_{15} a_{16} \alpha_1 F \omega_0 \omega_2 \cos \gamma - \\ \quad 4c_3 \alpha_3 \omega_0 \omega_2^2 - 2c_3 \alpha_3 \omega_0^2 \omega_2) / (8\omega_0 \omega_2^2 + 4\omega_0^2 \omega_2), \\ \theta_3' = (a_9 a_{12} a_{13}^2 \alpha_1^2 \alpha_3 \omega_0^2 + a_9 a_{12} a_{14}^2 \alpha_2^2 \alpha_3 \omega_0^2 - a_9 a_{10} a_{15} \alpha_1 F \cos \gamma + \\ \quad a_{10} a_{15} a_{16} \alpha_1 F \omega_0^2 \sin \gamma + 2a_{10} a_{15} a_{16} \alpha_1 F \omega_0 \omega_2 \sin \gamma + \\ \quad 2a_9 a_{12} a_{13}^2 \alpha_1^2 \alpha_3 \omega_0 \omega_2 + 2a_9 a_{12} a_{14}^2 \alpha_2^2 \alpha_3 \omega_0 \omega_2) / \alpha_3 (8\omega_0 \omega_2^2 + 4\omega_0^2 \omega_2), \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\gamma = \theta_1 + \theta_3 - \sigma \tau_1$, σ 为小参量, τ_1 为新的时间尺度.

由式(8), 令 $\alpha_2' = 0$, 可得 $\alpha_2 = 0$, 这说明在一阶近似解中, 高频波对整个液固耦合系统的影响都被略去了. 此时, 式(8)的稳态解为 $\alpha_1' = 0, \alpha_3' = 0, \gamma' = 0$. 消去 γ , 得到如下两个方程:

$$\begin{aligned} & \alpha_1^2 \omega_0^2 (\omega_0 + 2\omega_2)^2 (a_9 a_{12}^2 a_{13}^4 \alpha_1^4 \alpha_3^4 \omega_2^4 a_4^2 + 8\sigma a_4^2 \alpha_3^4 \omega_2^5 a_9 a_{12} a_{13}^2 \alpha_1^2 + \\ & 4c_1^2 \omega_0^2 a_4 \alpha_3^2 \omega_2^2 a_9 a_{10} \alpha_1^2 + 4c_1^2 a_4 \alpha_3^2 \omega_2^3 a_9 a_{10} \alpha_1^2 \omega_0 + c_1^2 a_9^2 a_{10}^2 \alpha_1^4 \omega_0^2 + \\ & c_1^2 a_{16}^2 a_{10}^2 \alpha_1^4 \omega_0^6 + 4c_1^2 a_{16}^2 a_{10}^2 \alpha_1^4 \omega_0^5 \omega_2 - 2c_1 a_{16} a_{10} \alpha_1^4 \omega_0^4 a_9 a_{12} a_{13}^2 a_4 \omega_2 - \\ & 8c_1 a_{16} a_{10} \alpha_1^4 \omega_0^4 \sigma a_4 \alpha_3^2 \omega_2^2 - 24c_1 a_{16} a_{10} \alpha_1^2 \omega_0^3 \sigma a_4 \alpha_3^2 \omega_2^3 + 4c_1^2 a_{16}^2 a_{10}^2 \alpha_1^4 \omega_0^4 \omega_2^2 - \\ & 6c_1 a_{16} a_{10} \alpha_1^4 \omega_0^3 \omega_2^2 a_9 a_{12} a_{13}^2 a_4 \alpha_3^2 - 16c_1 a_{16} a_{10} \alpha_1^2 \omega_0^2 \omega_2^2 \sigma a_4 \alpha_3^2 - \\ & 4c_1 a_{16} a_{10} \alpha_1^4 \omega_0^2 \omega_2^2 a_9 a_{12} a_{13}^2 a_4 \alpha_3^2 + a_9^2 a_{12}^2 a_{13}^2 \alpha_1^4 \alpha_3^4 \omega_0^2 a_4^2 \omega_2^2 + 16\sigma^2 a_4^2 \alpha_3^4 \omega_2^6 + \\ & 8a_9 a_{12} a_{13}^2 \alpha_1^2 \alpha_3^4 \omega_0^2 a_4^2 \omega_2^2 \sigma + 16a_9 a_{12} a_{13}^2 \alpha_1^2 \alpha_3^4 \omega_0 a_4^2 \omega_2^2 \sigma + 4c_1^2 a_4^2 \alpha_3^4 \omega_2^6 + \\ & 2a_9^2 a_{12}^2 a_{13}^4 \alpha_1^4 \alpha_3^4 \omega_0 a_4^2 \omega_2^2 + 4c_1^2 a_4^2 \alpha_3^4 \omega_0^2 \omega_2^4 + 8c_1^2 a_4^2 \alpha_3^4 \omega_0 \omega_2^5 + 16\omega_0^2 \sigma^2 a_4^2 \alpha_3^4 \omega_2^4 + \\ & 32\omega_0 \sigma^2 a_4^2 \alpha_3^4 \omega_2^5) / ((\omega_0 + \omega_2)^2 \omega_2^2 \alpha_3^2 a_4^2 a_{15}^2 F (2\omega_0 a_4 \alpha_3^2 \omega_2^2 + 2a_4 \alpha_3^2 \omega_2^2 + \\ & a_9 a_{10} \alpha_1^2 \omega_0)^2) = 1, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}((-2\omega_0^2 a_{16} a_{10} a_9 a_{12} a_{13}^2 \alpha_3^2 \omega_2^3 a_4 + c_1 \omega_0^2 a_9^2 a_{10}^2 + 4c_1 \omega_0^4 a_{16}^2 a_{10}^2 \omega_2^2 - \\ & 3\omega_0^3 a_{16} a_{10} a_9 a_{12} a_{13}^2 \alpha_3^2 a_4 \omega_2^2 + c_1 a_{16}^2 a_{10}^2 \omega_0^6 + 4c_1 a_{16}^2 a_{10}^2 \omega_2 \omega_0^5 - \\ & \omega_0^4 a_{16} a_{10} a_9 a_{12} a_{13}^2 \alpha_3^2 a_4 \omega_2) \alpha_1^4 + (2c_1 \omega_0 a_9 a_{10} a_4 \alpha_2^2 \omega_2^3 + \\ & 2c_3 \omega_0^2 \alpha_3^2 \omega_2^2 a_4 a_9 a_{10} - 12\omega_0^3 a_{16} a_{10} \sigma a_4 \alpha_3^2 \omega_2^2 + 2c_3 \omega_0^2 \alpha_3^2 \omega_2^2 a_4 a_9 a_{10} - \\ & 4\omega_0^4 a_{16} a_{10} \sigma a_4 \alpha_3^2 \omega_2^2 + 2c_1 \omega_0^2 \alpha_3^2 \omega_2^2 a_4 a_9 a_{10} - 8\omega_0^2 a_{16} a_{10} \sigma a_4 \alpha_3^2 \omega_2^4) \alpha_1^2 + \\ & 4c_3 \omega_0^4 \alpha_3^4 \omega_2^4 a_4^2 + 8c_3 \omega_0 \alpha_3^4 \omega_2^5 a_4^2 + 4c_3 \alpha_3^4 \omega_2^6 a_4^2) / (\alpha_3 \omega_2^2 (2\omega_0 a_4 \alpha_3^2 \omega_2^2 + \\ & 2a_4 \alpha_3^2 \omega_2^2 + a_9 a_{10} \alpha_1^2 \omega_0) (\omega_0 + \omega_2) a_4) = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

方程(9)和(10)是两变量多参数的分岔方程. 对液体模态的行为进行分析, 消去方程(9)和(10)中的箱体第一阶模态的广义振幅, 得到

$$a_1^4 + k_1 \lambda a_1^2 + k_2 \lambda^2 + k_3 \lambda + k_4 = 0, \quad (11)$$

其中, $\lambda = \sigma$ 为分岔参数, $k_1 \sim k_4$ 作为工程开折问题既是开折参数, 又代表系统的物理参数的组合.

3 奇异性分析

根据 C-L 方法^[10-12], 对方程(11)作奇异性分析, 得到转迁集:

分岔点集

$$B = \{k_4 k_1^2 + k_3^2 - 4k_4 k_2 = 0\};$$

滞后点集

$$H = \{k_4 = 0\};$$

双极限点集

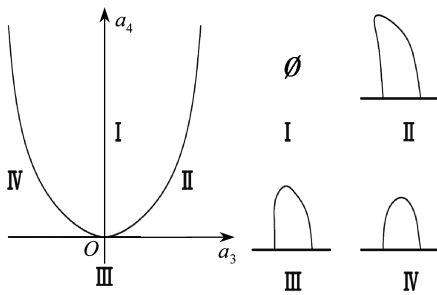
$$D = \emptyset;$$

开折参数的转迁集

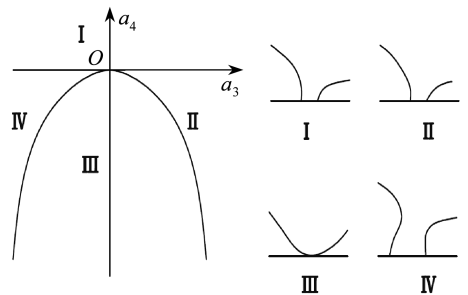
$$\Sigma = B \cup H \cup D.$$

由于参数空间是四维空间, 难于在其空间上直观地表示该转迁集, 所以下面主要讨论在该参数空间中在投影平面上的分岔行为. 因为开折参数都是小量, 将给出每个参数取不同值时的各种扰动情况. 在每一个投影平面上, 分岔集曲线和滞后点集曲线将平面分为不同的子区间. 在各子区间任取两点所对应的分岔图都是拓扑等价的, 即有持久性.

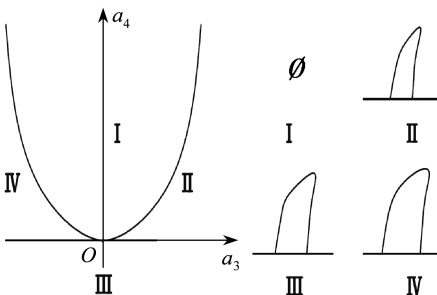
由数值分析, 得到反映系统分岔特性的转迁集和分岔曲线. 图 4 为在各参数投影平面内的转迁集和在各区域内的部分分岔曲线, 从而得到了系统在各个不同域中的多种保持性分岔图. 从图 4 中可以看到十分丰富的分岔行为, 如图 4(a) 中域 I 的分岔是极限点型, 域 II 和 III 是滞后型, 图 4(d) 中的分岔是双翼尖点型分岔.



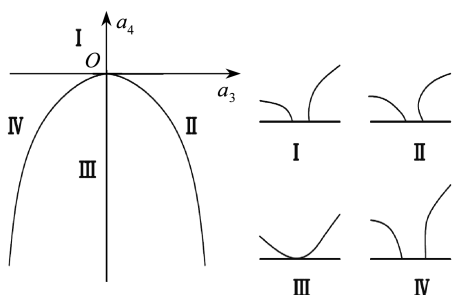
(a) $a_1 > 0, a_2 > 0$



(b) $a_1 > 0, a_2 < 0$



(c) $a_1 < 0, a_2 > 0$



(d) $a_1 < 0, a_2 < 0$

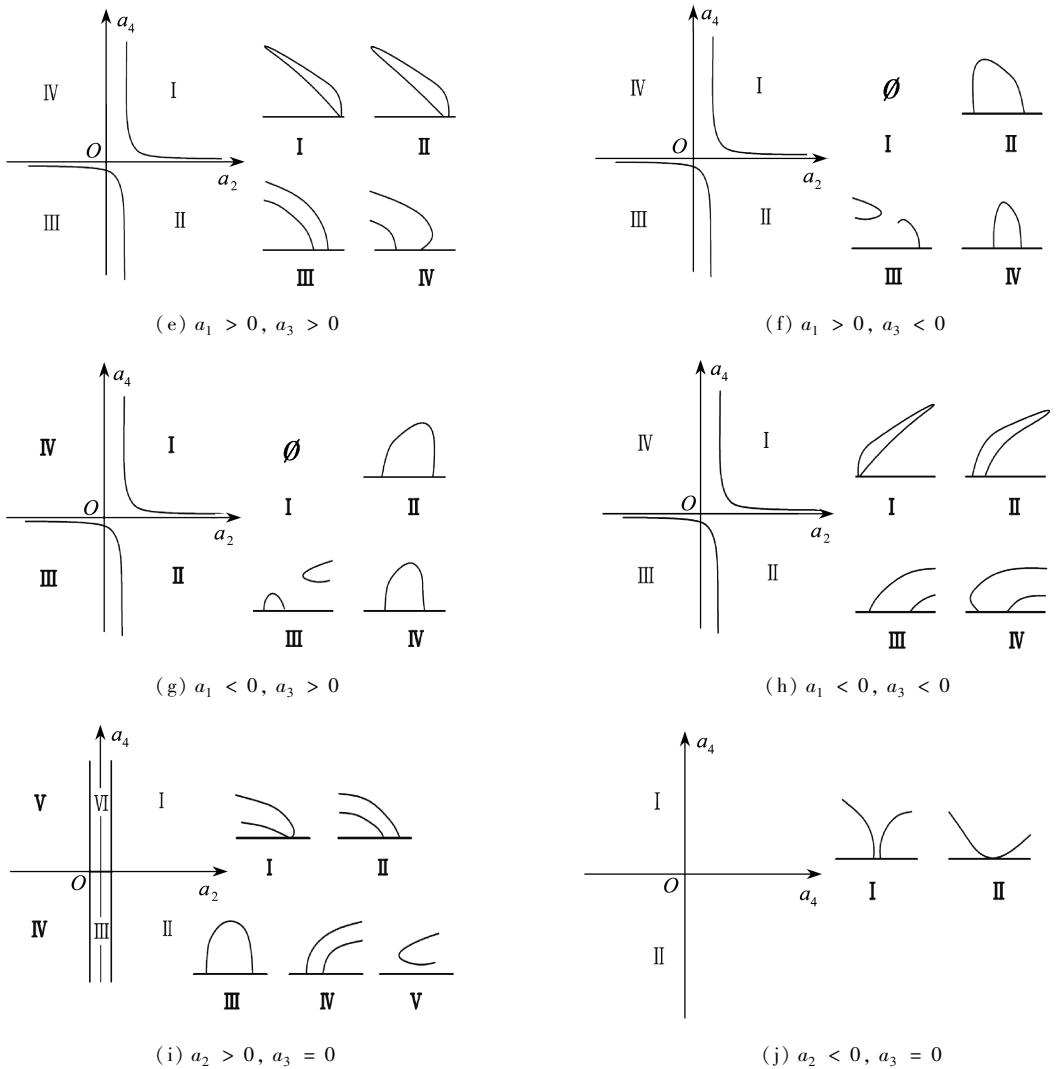


图4 不同投影空间的分岔曲线

Fig. 4 Bifurcation diagrams in different projection regions

1) 图4(i)中的域Ⅲ,开折参数取 $k_1 = 0, k_2 > 0, k_3 = 0, k_4 < 0$,此时系统幅频曲线没有发生跳跃现象;

2) 图4(a)中的域Ⅱ,开折参数取 $k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0, k_4 > 0$,此时系统的分岔曲线即幅频曲线表现为软特性;

3) 图4(c)中的域Ⅱ,开折参数取 $k_1 < 0, k_2 > 0, k_3 > 0, k_4 > 0$,其分岔曲线即幅频曲线表现为硬特性.

通过这3个分岔曲线,可以看到在开折参数 k_1 取值不同时,系统的幅频曲线表现出不同的特性.

观察开折参数

$$k_1 = 129\omega_0^{10}c_3\omega_2^3a_3a_4c_1^2a_{12}a_{14} + 16\omega_0^{11}c_3\omega_2^2a_4a_3c_1^2a_{12}a_{14} + 512\omega_0^2c_3\omega_2^5a_4a_3c_1^2a_{12}a_{14} + 384\omega_0^9c_3\omega_2^4a_4a_3c_1^2a_{12}a_{14} + 256\omega_0^7c_3\omega_2^6a_4a_3c_1^2a_{12}a_{14}$$

的表达式,其为复杂的多项式,无法得到物理参数同开折参数间的显示表达式.只能通过反算

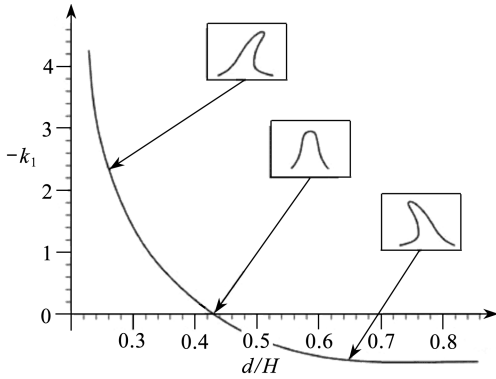


图5 开折参数 k_1 随充液比的变化曲线

Fig. 5 Relationship curve between the unfolding parameter k_1 and the liquid-filled ratio

法进行计算,由此,给定系统其它物理参数

$$a = 12.3 \text{ cm}, E = 10.2 \times 10^{11} \text{ g}/(\text{cm} \cdot \text{s}^2),$$

$$\rho_s = 2.777 \text{ g}/\text{cm}^3, \rho_l = 1.0 \text{ g}/\text{cm}^3,$$

$$\Delta h = 0.5 \text{ cm},$$

可得开折参数 k_1 随充液比 d/H 的变化曲线,如图5所示。当充液比较小时,系统表现出硬特性,当充液比较大时,系统表现出软特性。而在 k_1 为0时,反算出的充液比即为软硬特性转换点,在给定的参数条件下的充液比转换点为0.43。

同时不难发现在某些域中,分岔曲线为空集,适当地调整物理参数,使系统处在相应的保持域中,可以有效地控制液体的晃动,防止不必要的跳跃现象,保证充液耦合系统在工程应用中的稳定性

和可靠性。

4 结 论

用多尺度法、奇异性理论研究弹性充液系统在简谐激励下组合共振情形下的分岔行为,发现了非常复杂的局部分岔行为,统一而全面地得到了这一系统的分岔特性。建立了系统实际物理参数与该系统的拓扑分岔解之间的联系,并且分析了不同参数下系统的运动特性,为实现充液系统的参数的优化控制提供了理论依据。选择对应于分岔曲线为空集的系统参数,可以有效地控制储液器中的液体晃动。

参考文献:

- [1] Abramson H N. Dynamics of contained liquids: a personal odyssey[J]. *Applied Mechanics Review*, 2003, **56**(1): 1-7.
- [2] Ibrahim R A, Pilipchuk V N. Recent advances in liquid sloshing dynamics[J]. *Applied Mechanics Review*, 2001, **54**(2): 133-199.
- [3] 王照林, 刘延柱. 充液系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 83-98. (WANG Zhao-lin, LIU Yan-zhu. *Liquid-Filled System Dynamics*[M]. Beijing: Science Press, 2002: 83-98. (in Chinese))
- [4] ZHOU Liang-qiang, CHEN Yu-shu, CHEN Fang-qi. Stability and chaos of a damped satellite partially filled with liquid[J]. *Acta Astronautica*, 2009, **65**(11/12): 1628-1638.
- [5] Askari E, Daneshmand F. Coupled vibration of a partially fluid-filled cylindrical container with a cylindrical internal body[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2009, **25**(2): 389-405.
- [6] 尹立中, 马兴瑞, 王本利, 邹经湘. 圆柱贮箱类液固耦合系统转动响应分析[J]. 振动工程学报, 2001, **14**(1): 68-71. (YIN Li-zhong, MA Xing-rui, WANG Ben-li, ZOU Jing-xiang. Analysis on dynamic response of the liquid-solid coupling system with the liquid in a cylindrical container under pitching excitation[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2001, **14**(1): 68-71. (in Chinese))
- [7] 马兴瑞, 王本利, 苟兴宇. 航天器动力学——若干问题进展及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 329-335. (MA Xing-rui, WANG Ben-li, GOU Xing-yu. *Spacecraft Dynamics—Progress and Application Issues*[M]. Beijing: Science Press, 2001: 329-335. (in Chinese))

- [8] 刘习军, 张素侠, 刘国英, 贾启芬, 唐友刚. 矩形弹性壳液耦合系统中的重力波分析[J]. 力学学报, 2006, **38**(1):107-112. (LIU Xi-jun, ZHANG Su-xia, LIU Guo-ying, JIA Qi-fen, TANG You-gang. The analyses of gravity waves in a rectangular elastic fluid-shell coupled system [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, **38**(1):107-112. (in Chinese))
- [9] 陈予恕. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002:237-254. (CHEN Yu-shu. *Nonlinear Vibration*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002: 237-254. (in Chinese))
- [10] CHEN Yu-shu, Langford W F. The subharmonic bifurcation solution of nonlinear Mathieu's equation and Euler dynamically buckling problem[J]. *Acta Mech Sinica*, 1988, **4**(4):350-362.
- [11] CHEN Yu-shu, Andrew Y T Leung. *Bifurcation and Chaos in Engineering*[M]. London: Springer-Verlag, 1998: 66-76.
- [12] 陈予恕. 非线性振动系统的分岔和混沌理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993: 148-173. (CHEN Yu-shu. *Bifurcation and Chaos Theory of Nonlinear Vibration Systems*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1993: 148-173. (in Chinese))

Bifurcation of a Class of Elastic Tank-Liquid Coupled Sloshing System

ZHONG Shun^{1,2,3}, CHEN Yu-shu^{1,2,3}

- (1. *Research Center for Nonlinear Dynamics, School of Mechanical Engineering of Aviation and Astronautics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China;*
2. *State Key Laboratory of Engines, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China;*
3. *Tianjin Key Laboratory of Nonlinear Dynamics and Chaos Control, Tianjin 300072, P. R. China)*

Abstract: The nonlinear equations of an elastic tank-liquid coupling system which was subjected to external excitation were established. By means of multi-scale method and singularity theory, the bifurcation behaviors of the system were investigated and analyzed, so that abundant nonlinear dynamical behaviors of the coupling system were obtained, which could make a further explanation of the relationship between physical parameters and bifurcation solutions. In order to realize the parameters' optimal control, the results provide its theoretical basis.

Key words: elastic tank-liquid coupling system; bifurcation equation; singularity theory; sloshing control