

Hall 电流对表面热通量均匀的竖直可渗透 平板上 MHD 自然对流的影响*

L·K·萨哈¹, S·西提卡², M·A·侯赛因²

(1. 达卡大学 数学系,达卡 1000,孟加拉;

2. COMSATS 信息技术学院 数学系,伊斯兰堡 44000,巴基斯坦)

摘要: 在横向磁场作用下,研究 Hall 电流对竖直可渗透平板上 MHD 自然对流的影响,平板具有均匀的热通量.和外部磁场相比,假设感应磁场可以忽略不计.利用自由变量公式化(FVF)和流函数公式化(SFF),将边界层方程简化为适当的形式.对局部蒸发系数 ζ 的整个取值范围,由 FVF 得到的抛物型方程,用简明的有限差分法进行数值积分;另一方面,由 SFF 得到的非相似方程,采用局部非相似法求解.有些区域,如局部蒸发系数 ζ 值足够大或足够小时,用正规的摄动法求解.对低值 Prandtl 数 Pr ,例如 $Pr = 0.005, 0.01, 0.05$ 时,用图形表示磁场参数 M 和 Hall 参数 m ,对局部表面摩擦因数和局部 Nusselt 数的影响.最后对不同的局部蒸发系数 ζ 值,给出流体的速度和温度分布.

关键词: MHD 自然对流; Hall 电流; 可渗透平板; 热通量

中图分类号: O361;O241.4 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.09.005

符 号 说 明

B	磁感应	M	磁场参数
C_{fx}	局部表面摩擦	Nu_x	局部 Nusselt 数
e	电荷	p	压力
E	电场强度	Pr	Prandtl 数
g	重力加速度	T	流体温度
Gr_x	修正的 Grashof 数	T_∞	自由流温度
H	磁场强度	x, y, z	坐标方向
J	电流密度	u, v, w	速度在 x, y, z 方向上的分量
m	Hall 参数	V	蒸发速度
α	热扩散率	ρ	密度
β	热膨胀系数	ν	运动学粘度系数
μ	动力学粘性系数	ψ	流函数
ζ	局部蒸发参数	θ	无量纲温度函数
η	伪相似变量		

* 收稿日期: 2010-09-17;修订日期: 2011-05-30

作者简介: M. A. Hossain(联系人. E-mail: anwar@univdhaka.edu).

本文原文为英文,海治译,张禄坤校.

角标

w

壁面条件

 ∞

远离壁面条件

引 言

在 Hall 加速器和飞行器磁流体动力学中,对具有 Hall 电流的 MHD 粘性流动问题的研究十分重要.在对磁流体动力学应用的研究中,倾向于采用强磁场(这样电磁力的作用处于显要位置)和低密度气体(如像航天飞行器和核聚变).在这些条件下,Hall 电流和离子滑移等现象变得更为重要.出于上面的理解,Sato^[1],Yamanishi^[2],Sherman 和 Sutton^[3]等,在对粘性液体流过直通管道的水动力学研究中,考虑了 Hall 效应.关于外部水动力学流动,Katagiri^[4]讨论了 Hall 电流对半无限板上边界层流动的影响.以上学者的研究都作为一维流动问题.Pop 和 Watanabe^[5]在考虑 Hall 效应后,给出了横向磁场作用下导电流体的自由对流问题.在均匀磁场作用下,他们将模型方程简化为一组抛物型偏微分方程,假设 $\xi(=Mx^{1/2})$,其中 M 为磁场, x 为到前缘的轴距)为在 0 到 1 之间的局部变量.进一步地,Aboeldahab 和 Elbarbary^[6]就外部强磁场的作用下,研究 Hall 电流对垂直表面 MHD 自由对流的影响.

不同气体经由表面的吸入和喷出,对边界层厚度和传热率的控制很重要,因而激发了许多学者,研究这种现象对受迫对流和自由对流的影响.Eichhorn^[7]研究板温度和蒸发率按幂律变化时的相似解.进一步地,Vedhanayagam 等^[8]在有任意风力和壁面温度时,研究了垂直板上的自由对流.Lin 和 Yu^[9]研究了水平板上的自由对流,他们假设板温度和蒸发率都按幂律变化.此外,Hossain 等^[10]研究了可渗透垂直平板上的自然对流,平板表面温度是可变的,温度和蒸发率按幂律变化.

从航天飞行和核聚变的应用来看,研究 Hall 电流对可渗透表面 MHD 自然对流边界层流动的影响十分重要.最近,Saha 等^[11]在横向磁场作用下,就不可压缩粘性流体,流过半无限可渗透受热垂直平板时,研究了 Hall 电流对稳定层状 MHD 自然对流边界层的影响.对转换后的边界层方程,文献[11]用了两种截然不同的方法来积分:(i) 隐式的有限差分法和 Keller 工具箱格式;(ii) 当 Prandtl 数 $Pr(=0.1,0.01)$ 取较小值(表示液体金属)、局部蒸发系数 $\xi=(V_0x/\nu)/Gr_x^{1/4}$ 取所有值时,使用局部的非相似法.Saha 等还得到了小值局部蒸发系数 ξ ,和足够大局部蒸发系数 ξ 时的渐近解.此外,Hossain 和 Rashid^[12]当垂直多孔平板存在质量扩散时,分析了 Hall 电流对不稳定磁流体自由对流的影响.

鉴于航天飞行和核聚变中的重要应用,本文研究具有均匀质量流量的半无限垂直可渗透平板上,Hall 电流对 MHD 自然对流边界层流动的影响.在靠近和远离板的前缘处,用正规的摄动法,求解变换后的边界层方程.为了得到平板中间位置处的解,首先通过自由变量公式化(FVF)和流函数公式化(SFF),将边界层方程转换为适当的形式,借助于简明的有限差分法,对经由 FVF 变换得到的方程组进行数值积分,然而用局部非相似法,对由 SFF 得到的方程组求模拟解.对小值 Prandtl 数 $Pr(Pr=0.05,0.01,0.005)$,适当的液态金属,在核工程中常用作冷却液,例如,锂和汞的 Pr 值分别为 0.05 和 0.01),详细地讨论了相关参数,如 M 和 m ,对局部表面摩擦因数和局部 Nusselt 数的影响.最后,在不同蒸发系数 ζ 下,给出了流体的速度和温度分布结果.

1 问题公式化

假设粘性导电不可压缩的流体,作稳定自然对流的边界层流动,半无限可渗透垂直平板在横向磁场作用下,维持着一个均匀加热的表面热通量,考虑 Hall 电流的影响.令 x 轴沿板垂直

向上方向, y 轴与 x 轴正交, 可渗透表面的前缘与 z 轴一致, 假设周围的流体温度维持在恒温 T_∞ , 假设流动过程中从板表面到流体的传热率恒为 q_w'' , 可渗透竖板表面质量流量恒为 V_0 . 图 1

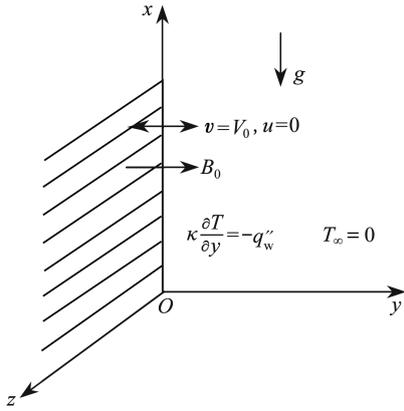


图 1 流动模型及其坐标系

Fig. 1 The flow configuration and the coordinate system

给出流动模型和相应的坐标系. 需说明的是, Hall 电流能在那个方向产生一种力, 从而成为三维流动问题. 为了简化问题, 假设在 z 轴方向上流动量的变化可以忽略不计. 因为板表面沿着 z 轴方向是无限延伸的, 作这样的简化是有效的. 在该假设下, 尽管该电流模式难于对 z 方向的电流给出解释, 但无碍于深入理解 Hall 电流对流动的作用.

假设流体是准中性的, 同时, 离子滑移和热电效应可以忽略不计, 则满足广义 Ohm 定律和 Maxwell 方程的、稳定不可压缩 MHD 流动的基本方程为(见文献[11])

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) -$$

$$\frac{\sigma B_0^2}{1 + m^2} (u + mw), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\sigma B_0^2}{1 + m^2} (mu - w), \quad (3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (4)$$

并满足以下的边界条件

$$\begin{cases} u(x, y) = 0, v(x, y) = -V_0, w(x, y) = 0, \kappa \frac{\partial T}{\partial y} = -q_w'', & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \\ u(x, y) = 0, w(x, y) = 0, T = T_\infty, & \text{当 } y = \infty \text{ 时,} \end{cases} \quad (5)$$

其中, u, v 和 w 分别为速度矢量 \mathbf{V} 在 x, y 和 z 方向上的分量, p 为压力, ρ 为流体密度, ν 为动粘度系数, g 为重力加速度, β 为热膨胀系数, κ 为导热率, T_∞ 为周围的流体温度. Hall 参数 $m = \omega^2 \tau^2$, 其中 ω 为电子的回旋加速频率, τ 为电子和离子的碰撞时间. 在上述方程的推导中我们作了如下假设: (i) 平板并不导电, 从而平板的电流密度分量 J_y 为 0, 因而处处为 0; (ii) 考虑短路的情况, 这时外加电场 $E = 0$; (iii) 磁 Reynolds 数小, 从而与外部磁场 B_0 相比, 感应磁场可以忽略不计; (iv) 流体是各向同性和均匀的, 流体粘性和导电率均为常数.

引入下列无量纲的因变量和自变量:

$$\begin{cases} u = \frac{\nu}{L} Gr_L^{1/5} \bar{u}, v = \frac{\nu}{L} Gr_L^{1/5} \bar{v}, w = \frac{\nu}{L} Gr_L^{1/5} \bar{w}, \\ \bar{y} = \frac{y}{L^{1/4}} Gr_L^{1/5}, \theta = \frac{\kappa}{Lq_w''} Gr_L^{2/5} (T - T_\infty), Gr_L = \frac{g\beta q_w'' L^4}{\kappa \nu^2}, \end{cases} \quad (6)$$

其中, Gr_L 为无量纲 Grashof 数, 近似等于作用在流体上的浮力与粘性力之比. 将式(6)代入方程(1)~(5), 为简洁起见, 略去顶标的横线:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \theta - \frac{M}{1 + m^2} (u + mw), \quad (8)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{M}{1+m^2} (mu - w), \quad (9)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (10)$$

边界条件为

$$\begin{cases} u(x, y) = 0, v(x, y) = -S, w(x, y) = 0, \frac{\partial T}{\partial \theta} = -1, & \text{当 } y = 0 \text{ 时,} \\ u(x, y) = 0, w(x, y) = 0, T = 0, & \text{当 } y = \infty \text{ 时.} \end{cases} \quad (11)$$

在方程(7) ~ (11)中, M 为磁场参数(或为修正后的 Hartman 数), 表示磁场强度对粘性力之比, Pr 给出动量扩散和热扩散之比, S 为蒸发参数, 衡量吸入流体或吹出流体的能力. 这些参数的定义如下:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, M = \frac{(\sigma B_0^2 / \rho \nu) L^2}{(V_0 L / \nu)^2}, S = \frac{V_0 L}{\nu} Gr_L^{-1/5}. \quad (12)$$

下面, 给出问题公式化为方程组(7) ~ (11)的求解方法.

2 求解方法

本节将给出方程组(7) ~ (11)所定义模型的解法. 首先, 采用两种公式化方式, 即自由变量公式化(FVF)和流函数公式化(SFF), 将边界层方程简化为方便的形式, FVF 公式化方程将用简明有限差分法进行积分, SFF 公式化方程将通过局部非相似法模拟, 其次, 利用正规摄动法, 得到接近和远离板表面处的解.

2.1 自由变量公式化(FVF)

在数值求解问题之前, 对方程组(7) ~ (11)作自由变量公式化(FVF), 为此引入连续变换

$$\begin{cases} u = x^{3/5} U(\zeta, Y), v = x^{-1/5} (V(\zeta, Y) - \zeta), w = x^{3/5} W(\zeta, Y), \\ \theta = x^{3/5} \theta(\zeta, Y), Y = x^{-1/5} y, \zeta = Sx^{-1/5}, \end{cases} \quad (13)$$

其中, Y 为自相似变量, ζ 为蒸发速度在流线方向上的分布. 应用上述变换后, 得到抛物型的偏微分方程组

$$\frac{3}{5} U + \left\{ (V - \zeta) - \frac{1}{5} Y \right\} \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{1}{5} \zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} U^2 + \left\{ (V - \zeta) - \frac{1}{5} YU \right\} \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{1}{5} \zeta U \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \\ \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \theta - \frac{M}{1+m^2} \zeta^2 (U + mW), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{3}{5} UW + \left\{ (V - \zeta) - \frac{1}{5} YU \right\} \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{1}{5} \zeta U \frac{\partial W}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{M}{1+m^2} \zeta^2 (mU - W), \quad (16)$$

$$\frac{1}{5} U\theta + \left\{ (V - \zeta) - \frac{1}{5} YU \right\} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{1}{5} \zeta U \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}, \quad (17)$$

边界条件为

$$\begin{cases} U(\zeta, Y) = V(\zeta, Y) = W(\zeta, Y) = 0, \partial \theta / \partial Y = -1, & \text{当 } Y = 0 \text{ 时,} \\ U(\zeta, Y) = 0, W(\zeta, Y) = 0, \theta = 0, & \text{当 } Y = \infty \text{ 时.} \end{cases} \quad (18)$$

在满足边界条件(18)时, 求解方程组(14) ~ (17), 用中心差分格式离散扩散项, 用后向差分格式离散对流项, 得到如下隐式的三对角代数方程:

x 向动量方程

$$A_1 U_{i-1,j} + B_1 U_{i,j} + C_1 U_{i+1,j} = D_1, \quad (19)$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = 1 + \left(V_{i,j} - \zeta_j - \frac{Y_i U_{i,j}}{5} \right) \frac{\Delta Y}{2}, \\ B_1 = -2 - (\Delta Y)^2 \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5} \frac{\zeta_j}{\Delta \zeta} \right) U_{i,j} - \Delta Y \frac{M}{1+m^2} \zeta^2, \\ C_1 = 1 - \left(V_{i,j} - \zeta_j - \frac{Y_i U_{i,j}}{5} \right) \frac{\Delta Y}{2}, \\ D_1 = - \left(\frac{1}{5} \zeta_j \frac{U_{i,j} U_{i,j-1}}{\Delta \zeta} + \theta_{i,j} - \frac{m M \zeta_j^2}{1+m^2} W_{i,j} \right) (\Delta Y)^2. \end{cases} \quad (20)$$

z 向动量方程

$$A_2 W_{i-1,j} + B_2 W_{i,j} + C_2 W_{i+1,j} = D_2, \quad (21)$$

其中

$$\begin{cases} A_2 = 1 + \left(V_{i,j} - \zeta_j - \frac{Y_i U_{i,j}}{5} \right) \frac{\Delta Y}{2}, \\ B_2 = -2 - (\Delta Y)^2 \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5} \frac{\zeta_j}{\Delta \zeta} \right) U_{i,j} - \Delta Y \frac{M}{1+m^2} \zeta^2, \\ C_2 = 1 - \left(V_{i,j} - \zeta_j - \frac{Y_i U_{i,j}}{5} \right) \frac{\Delta Y}{2}, \\ D_2 = - \left(\frac{1}{5} \zeta_j \frac{U_{i,j} W_{i,j-1}}{\Delta \zeta} - \frac{m M \zeta_j^2}{1+m^2} U_{i,j} \right) (\Delta Y)^2. \end{cases} \quad (22)$$

能量方程

$$A_3 \theta_{i-1,j} + B_3 \theta_{i,j} + C_3 \theta_{i+1,j} = D_3, \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases} A_3 = \frac{1}{Pr} + \left(V_{i,j} - \zeta_j - \frac{Y_i U_{i,j}}{5} \right) \frac{\Delta Y}{2}, \\ B_3 = -\frac{2}{Pr} - \frac{1}{5} (\Delta Y)^2 \left(1 + \frac{\zeta_j}{\Delta \zeta} \right) U_{i,j}, \\ C_3 = \frac{1}{Pr} + \left(V_{i,j} - \zeta_j - \frac{Y_i U_{i,j}}{5} \right) \frac{\Delta Y}{2}, \\ D_3 = -\frac{1}{5} (\Delta Y)^2 \zeta_j \frac{U_{i,j} \theta_{i,j-1}}{\Delta \zeta}. \end{cases} \quad (24)$$

对未知的自变量 U, W 和 θ , 应用 Gauss 消去法, 求解隐式三对角代数方程(19) ~ (23). 通过计算, 由连续方程直接得到如下垂直速度 V 的表达式:

$$\begin{aligned} V_{i,j} = & V_{i-1,j} - \left\{ (V_{i,j} - \zeta_j) - \frac{1}{5} Y_i \right\} (U_{i,j} - U_{i-1,j}) - \\ & \frac{3}{5} \frac{\Delta Y}{2} (U_{i,j} + U_{i-1,j}) - \frac{\zeta_j \Delta Y}{5 \Delta \zeta} (U_{i,j} - U_{i,j-1}). \end{aligned} \quad (25)$$

计算从 $\zeta = 0$ 开始, 直到 $\zeta = 100$ 结束, 对每个 ζ 值, 迭代计算直到连续 2 次迭代结果相差小于或等于 10^{-5} . Y 和 ζ 的网格分别设为 0.01 和 0.025, 且 Y 最大值设为 40. 本文是在多次收敛性测试后, 选择上述这些数值的. 最近, Siddiq 等^[13]用这种方法, 对流经内部释热的倾斜平板和可变粘性的自然对流, 成功地研究了高 Prandtl 数的影响. 一旦每步 ζ 迭代后, 得到量 U, θ 及其导

数值,就可以计算出局部表面摩擦因数 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$ 和局部 Nusselt 数 $Nu_x Gr_x^{-1/5}$, 从工程角度上看这些量很重要,它们的计算公式如下:

$$C_{fx} Gr_x^{3/5} = \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=0}, \quad Nu_x Gr_x^{-1/5} = \left(\frac{1}{\theta} \right)_{Y=0}. \quad (26)$$

更进一步地,下面介绍流函数公式化(SFF),也是用来求解中间区域的边界层问题。

2.2 流函数公式化

直接应用式(30)给出的流函数项变换,代入方程组(7)~(11),得到如下的非相似偏微分方程组

$$f''' + \frac{4}{5} f f'' - \frac{3}{5} f'^2 + \zeta f'' + \theta - \frac{M}{1+m^2} \zeta^2 (f' + mg) = \frac{1}{5} \zeta \left[f' \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - f'' \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right], \quad (27)$$

$$g'' + \frac{4}{5} f g' - \frac{3}{5} f' g + \zeta g' - \frac{M}{1+m^2} \zeta^2 (g - mf') = \frac{1}{5} \zeta \left[f' \frac{\partial g}{\partial \zeta} - g' \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right], \quad (28)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + \frac{4}{5} f \theta' - \frac{1}{5} f' \theta + \zeta \theta' = \frac{1}{5} \zeta \left[f' \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right], \quad (29)$$

其中,函数 f, g 和 θ 定义为

$$\begin{cases} \psi(x, y) = x^{4/5} (f(\zeta, \eta) + \zeta), & w(x, y) = x^{3/5} g(\zeta, \eta), & \theta = \theta(\zeta, \eta), \\ \zeta = Sx^{-1/5}, & \eta = x^{-1/5}y. \end{cases} \quad (30)$$

ψ 为自动满足连续方程(7)的流函数,定义如下:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (31)$$

方程(27)~(29)中的撇号,表示函数对伪相似变量 η 的导数.另外, ζ 既是局部可变的蒸发系数,又可解释为测量流线方向的变量(a scaled stream-wise variable).方程组(27)~(29)相应的边界条件为

$$\begin{cases} f(\zeta, 0) = f'(\zeta, 0) = g(\zeta, 0) = 0, & \theta'(\zeta, 0) = -1, \\ f'(\zeta, \infty) = g(\zeta, \infty) = \theta'(\zeta, \infty) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

现在,可以对满足边界条件(32)的方程组(27)~(29)使用局部的非相似法.局部的非相似法有2个基本特征:第一,可以找到任意指定流线方向位置处的非相似解(即每个解是局部自治的);第二,将找到的局部解微分方程数值求解,结合良好制定的计算技术,如像前向积分法(例如 Runge-Kutta 法),配合打靶程序,确定壁面处的未知边界条件.局部的非相似法,还能对数值解的精度进行一定程度的自我检查.在局部非相似法中,变换后守恒方程中的所有项目得以保留,对 ζ 的导数将被区分为新函数 $f_1 = \partial f / \partial \zeta$, $g_1 = \partial g / \partial \zeta$ 和 $\theta_1 = \partial \theta / \partial \zeta$ 而引入.这表明3个新增的未知函数 f_1, g_1 和 θ_1 , 需要进一步推出3个方程来确定.由构建与变换后的(关系 ζ 的)守恒方程和边界条件(即 f, g, θ 方程组)相区别的辅助方程组来完成.在关系 f_1, g_1 和 θ_1 的辅助方程中,包含了 $\partial f_1 / \partial \zeta$, $\partial g_1 / \partial \zeta$, $\partial \theta_1 / \partial \zeta$ 项,以及它们对 η 的导数.如果这些项可以忽略不计,对 f, g, θ, f_1, g_1 和 θ_1 的方程组,简化为常微分方程组,它们规定了流线上局部的自治解.这种格式被称为二阶截断的局部非相似法,因为近似是由于略去二阶方程(f, g, θ 方程为一阶方程)引起的.在上述局部非相似法公式化过程中,需要联立求解一个大的常微分方程组,例如二阶截断,会产生包括 f, g, θ, f_1, g_1 和 θ_1 的6个方程.可以预料,局部非相似解的精度依赖于截断阶. Minkowycz 和 Sparrow^[14] 最早提出了局部的非相似法,随后许多研究者应用了这个方法,例如 Hossain 等^[10] 和 Chen 等^[15], 用来求解各种非相似边界层问题.下面仅给出直到二阶截断有效的方程:

一阶截断

$$f''' + \frac{4}{5} f f'' - \frac{3}{5} f'^2 + \zeta f'' + \theta - \frac{M}{1+m^2} \zeta^2 (f' + mg) = \frac{1}{5} \zeta [f_1' f' - f'' f_1], \quad (33)$$

$$g'' + \frac{4}{5} f g' - \frac{3}{5} f' g + \zeta g' - \frac{M}{1+m^2} \zeta^2 (g - mf') = \frac{1}{5} \zeta [f' g_1 - g' f_1], \quad (34)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + \frac{4}{5} f \theta' - \frac{1}{5} f' \theta + \zeta \theta' = \frac{1}{5} \zeta [f' \theta_1 - \theta' f_1], \quad (35)$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} f(\zeta, 0) = f'(\zeta, 0) = g(\zeta, 0) = 0, \theta'(\zeta, 0) = -1, \\ f'(\zeta, \infty) = g(\zeta, \infty) = \theta'(\zeta, \infty) = 0. \end{cases} \quad (36)$$

二阶截断

$$\begin{aligned} f_1''' + \frac{4}{5} f f_1'' - \frac{7}{5} f' f_1' + f_1 f'' + f'' + \zeta f_1'' + \theta_1 - \frac{2M \zeta}{1+m^2} (f' + mg) - \\ \frac{M \zeta^2}{1+m^2} (f_1' + mg_1) = \frac{1}{5} \zeta [f_1'^2 - f_1'' f_1], \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} g_1'' + \frac{4}{5} f g_1' - \frac{4}{5} f' g_1 + f_1 g' - \frac{3}{5} f_1' g + g' + \zeta g_1' - \frac{2M}{1+m^2} \zeta (g - mf') - \\ \frac{M}{1+m^2} \zeta^2 (g_1 - mf_1') = \frac{1}{5} \zeta [f_1' g_1 - g_1' f_1], \end{aligned} \quad (38)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta_1'' + \frac{4}{5} f \theta_1' - \frac{1}{5} f_1' \theta - \frac{2}{5} f' \theta_1 + f_1 \theta' + \theta' + \zeta \theta_1' = \frac{1}{5} \zeta [f' \theta_1 - \theta_1' f_1], \quad (39)$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} f_1(\zeta, 0) = f_1'(\zeta, 0) = g_1(\zeta, 0) = 0, \theta_1'(\zeta, 0) = -1, \\ f_1'(\zeta, \infty) = g_1(\zeta, \infty) = \theta_1'(\zeta, \infty) = 0. \end{cases} \quad (40)$$

可以看到,方程组(33)~(36)和方程组(37)~(40),是以 ζ 为系数相耦合的非线性常微分方程组.应用 Nachtsheim-Swigert^[16]的迭代技术,数值地求解这组方程.此时,得到了直到二阶截断的方程组的解,局部摩擦因数和局部 Nusselt 数项可以如下表示:

$$C_{fx} Gr_x^{3/5} = f''(\zeta, 0), \quad Nu_x Gr_x^{-1/5} = \frac{1}{\theta(\zeta, 0)}. \quad (41)$$

下面将讨论所得到的数值解,由于个别物理参数,例如磁场参数 M , Hall 参数 m , Prandtl 数 Pr , 随 ζ 从0~100之间变化.下面一小节,使用正规的摄动法,得到局部蒸发系数 ζ 足够小时的解.

2.3 小 ζ 时的正规摄动解

在板表面前缘附近,或 ζ 的值足够小时,将方程(27)~(29)和相应的边界条件(31)中的函数 f, g 和 θ 以 ζ 的幂级数展开:

$$f(\eta, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta^i f_i(\eta), \quad g(\eta, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta^i g_i(\eta), \quad \theta(\eta, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta^i \theta_i(\eta). \quad (42)$$

将(42)式代入方程(27)~(29)和相应的边界条件(31),令 ζ 的幂次相同的项,系数相等,得到:

零阶问题

$$f_0''' + \frac{4}{5} f_0 f_0'' - \frac{3}{5} f_0'^2 + \theta_0 = 0, \quad (43)$$

$$g_0'' + \frac{4}{5} f_0 g_0' - \frac{3}{5} f_0' g_0 = 0, \quad (44)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta_0'' + \frac{4}{5} f_0 \theta_0' - \frac{1}{5} f_0' \theta_0 = 0, \quad (45)$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} f_0 = f_0' = g_0 = 0, \theta_0' = -1, & \text{当 } \eta = 0 \text{ 时,} \\ f_0 \rightarrow 0, g_0 \rightarrow 0, \theta_0 \rightarrow 0, & \text{当 } \eta \rightarrow \infty \text{ 时.} \end{cases} \quad (46)$$

类似地,一阶问题

$$f_1''' + \frac{4}{5} f_0 f_1'' + f_0' f_1' - \frac{7}{5} f_0' f_1' + f_0'' + \theta_1 = 0, \quad (47)$$

$$g_1'' + \frac{4}{5} f_0 g_1' + f_1 g_0' - \frac{3}{5} f_1' g_0 - \frac{4}{5} f_0' g_1 = 0, \quad (48)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta_1'' + \frac{4}{5} f_0 \theta_1' + f_1 \theta_0' - \frac{2}{5} f_0' \theta_1 - \frac{1}{5} f_1' \theta_0 = 0, \quad (49)$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} f_1 = f_1' = g_1 = 0, \theta_1' = 0, & \text{当 } \eta = 0 \text{ 时,} \\ f_1 \rightarrow 0, g_1 \rightarrow 0, \theta_1 \rightarrow 0, & \text{当 } \eta \rightarrow \infty \text{ 时.} \end{cases} \quad (50)$$

对高阶问题(即 $i \geq 2$),相应的方程可从下式得到:

$$f_i''' + f_{i-1}'' + \theta_i - \frac{M}{1+m^2} (f_{i-2}' + m g_{i-2}) = \sum_{r=0}^i \left[\left(\frac{3}{5} + \frac{r}{5} \right) f_r' f_{i-r}' - \left(\frac{4}{5} + \frac{r}{5} \right) f_r f_{i-r}'' \right], \quad (51)$$

$$g_i'' + g_{i-1}' - \frac{M}{1+m^2} (g_{i-2} - m f_{i-2}') = \sum_{r=0}^i \left[\left(\frac{3}{5} + \frac{r}{5} \right) g_r f_{i-r}' - \left(\frac{4}{5} + \frac{r}{5} \right) f_r g_{i-r}' \right], \quad (52)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta_i'' + \theta_{i-1}' = \sum_{r=0}^i \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{r}{5} \right) \theta_r f_{i-r}' - \left(\frac{4}{5} + \frac{r}{5} \right) f_r \theta_{i-r}' \right], \quad (53)$$

相应的边界条件为

$$\begin{cases} f_i = f_i' = g_i = 0, \theta_i' = 0, & \text{当 } \eta = 0 \text{ 时,} \\ f_i \rightarrow 0, g_i \rightarrow 0, \theta_i \rightarrow 0, & \text{当 } \eta \rightarrow \infty \text{ 时.} \end{cases} \quad (54)$$

在上述方程中, f_0, g_0 和 θ_0 就是熟知的流过恒温半无限竖直板时自由对流的相似方程;当 Hall 存在时,由于流过平面流体蒸发的交互作用,方程对 f_1, g_1 和 θ_1 以及方程对 f_i, g_i 和 $\theta_i (i = 2, 3, \dots)$,分别是对流动有效的一阶修正和高阶修正.此外,对每个 $i \geq 2$,方程(51)~(54)是线性的,但是耦合在一起,能够通过成对方式的序列解得到.这些方程对可用 Butcher^[17]提出的隐式 Runge-Kutta 初值法,结合 Nachtsheim-Swigert^[16]的迭代格式进行积分.在不同物理参数取值下,根据板前缘附近所得到的数值解,讨论局部表面摩擦因数 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$ 和局部 Nusselt 数 $Nu_x Gr_x^{-1/5}$,从工程角度看来是有意义的,它们可以按下面的关系计算:

$$C_{fx} Gr_x^{-3/5} = f''(\zeta, 0) = f_0'' + \zeta f_1'' + \zeta^2 f_2'' + \dots, \quad (55)$$

$$Nu_x Gr_x^{-1/5} = 1/\theta(\zeta, 0) = 1/\theta_0 + \zeta \theta_1 + \zeta^2 \theta_2 + \dots. \quad (56)$$

值得注意的是,若忽略 Hall 效应,基本模型简化为 Wilks 和 Hunt 在文献[18]中讨论过的模型,并将数值计算结果用表格列出. Wilks 和 Hunt^[18]是针对均匀表面热通量边界层流动的研究,在整个流域,他们使用 Keller 工具箱(Keller-box method)数值求解问题,然而,在板的附近区

域,用正规的摄动法处理问题.另一方面,当局部可变参数的取值相当大时,他们采用坐标反向展开技术.表 1 给出了 Pr 取不同数值时,本文得到的壁面剪切应力和传热率的数值解,与 Wilks 和 Hunt^[18]的结果进行的比较,两者吻合得很好.

表 1 壁面剪切应力和传热率的数值解

Table 1 Numerical values of coefficients of skin friction and rate of heat transfer

Pr	Wilks and Hunt ^[18]		Present	
	$f_0''(0)$	$\theta_0(0)$	$f_0''(0)$	$\theta_0(0)$
1.5	1.091 7	-1.975 7	1.091 1	-1.976 2
1.0	1.374 4	-1.872 8	1.373 9	-1.873 0
0.72	1.655 3	-1.799 4	1.653 7	-1.799 8
0.5	2.033 1	-1.727 6	2.030 6	-1.728 0
0.2	3.390 0	-1.586 7	3.380 6	-1.587 3
0.1	4.958 5	-1.510 9	4.931 6	-1.511 9
0.05	7.208 5	-1.455 4	7.132 3	-1.546 8
0.02	11.718 5	-1.404 7	11.717 2	-1.404 7
0.01	16.829 7	-1.378 6	16.825 2	-1.378 6

此外,所得到的数值结果,就是局部表面摩擦因数 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$ 和局部 Nusselt 数 $Nu_x Gr_x^{-1/5}$ 项中,靠近小 $\zeta \in [0.0, 1.5]$ 部分.图 2 ~ 图 4 给出了局部表面摩擦因数 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$ 和局部 Nusselt 数 $Nu_x Gr_x^{-1/5}$,随局部蒸发系数 ζ 变化时数值结果的比较.上游区(接近板前缘)得到的数值解获得了验证.

下面,将研究局部蒸发系数 ζ 取较大值时的下游区.

2.4 大 ζ 值时的渐近解 (ASS)

本小节将研究局部变量 ζ 值较大时,方程(27) ~ (29)以及相应的边界条件(31)的解.方程(27) ~ (29)中不同项数量级分析发现:方程(27)中的最大项为 f''' 和 $\zeta f''$,方程(28)中的最大项为 g''' 和 $\zeta g'$,方程(29)中的最大项为 θ'' 和 $\zeta \theta'$.在各自方程中,两边处于同一数量级,办法是假设 η 较小,因而其导数较大.当 $\zeta \rightarrow \infty$ 时,有 $\theta' = O(1)$.为 f 和 η 寻找适当的缩放比例是关键.总而言之,方程(27)中的 f''' , θ 和 $\zeta f''$ 项,当 $\zeta \rightarrow \infty$ 时,有 $\eta = O(\zeta)$ 和 $f = O(\zeta^{-4})$.因此,可以引入如下的变换:

$$f = \zeta^{-4} \bar{f}(\bar{\eta}), \quad \eta = \zeta \bar{\eta}, \quad g = \zeta^{-3} \bar{g}(\bar{\eta}), \quad \theta = \zeta^{-1} \bar{\theta}(\bar{\eta}). \quad (57)$$

根据变换式(57),方程(27) ~ (29)变为

$$\bar{f}''' + \bar{f}'' + \bar{\theta} - \frac{M}{1+m^2} (\bar{f}' + m\bar{g}) = \frac{1}{5} \zeta^{-4} \left[\bar{f}' \frac{\partial \bar{f}'}{\partial \zeta} - \bar{f}'' \frac{\partial \bar{f}}{\partial \zeta} \right], \quad (58)$$

$$\bar{g}''' + \bar{g}' - \frac{M}{1+m^2} (\bar{g} - m\bar{f}') = \frac{1}{5} \zeta^{-4} \left[\bar{f}' \frac{\partial \bar{g}}{\partial \zeta} - \bar{g}' \frac{\partial \bar{f}}{\partial \zeta} \right], \quad (59)$$

$$\frac{1}{Pr} \bar{\theta}'' + \bar{\theta}' = \frac{1}{5} \zeta^{-4} \left[\bar{f}' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \zeta} - \bar{\theta}' \frac{\partial \bar{f}}{\partial \zeta} \right], \quad (60)$$

相应边界条件为

$$\begin{cases} \bar{f}(\zeta, 0) = \bar{f}'(\zeta, 0) = \bar{g}(\zeta, 0) = 0, \quad \bar{\theta}'(\zeta, 0) = -1, \\ \bar{f}(\zeta, \infty) = \bar{g}(\zeta, \infty) = \bar{\theta}(\zeta, \infty) = 0. \end{cases} \quad (61)$$

对于足够大的 ζ ,可忽略上述方程中等号右边的项,于是方程变为

$$\bar{f}''' + \bar{f}'' + \bar{\theta} - \frac{M}{1+m^2} (\bar{f}' + m\bar{g}) = 0, \quad (62)$$

$$\bar{g}'' + \bar{g}' - \frac{M}{1+m^2} (\bar{g} - m\bar{f}') = 0, \quad (63)$$

$$\frac{1}{Pr} \bar{\theta}'' + \bar{\theta}' = 0. \quad (64)$$

满足如下的边界条件:

$$\begin{cases} \bar{f}(0) = \bar{f}'(0) = \bar{g}(0) = 0, \bar{\theta}' = -1, \\ \bar{f}(\infty) = \bar{g}(\infty) = \bar{\theta}(\infty) = 0. \end{cases} \quad (65)$$

很容易得到方程(64)及其方程(65)中相应边界条件下的解为

$$\bar{\theta}(\eta) = \frac{1}{Pr} e^{-Pr\eta}. \quad (66)$$

现在,将方程(62)和(63)合写在一起:

$$V'' + V' - \frac{M(1-im)}{1+m^2} V = -\frac{1}{Pr} e^{-Pr\eta}, \quad (67)$$

其中, V 为复变函数,其实部为函数 \bar{f} ,其虚部为函数 \bar{g} ,即 $V = \bar{f}' + i\bar{g}$. 方程(67)在方程(65)相应边界条件下的解为

$$V(\eta) = \frac{1}{Pr(Pr(Pr-1) - M_1)} (e^{-h\eta} - e^{-Pr\eta}), \quad (68)$$

有

$$V(0) = \frac{Pr-h}{Pr(Pr(Pr-1) - M_1)} \quad (69)$$

和

$$\begin{aligned} V'(0) = & \frac{[(Pr-A_1)(Pr(Pr-1)-A_0) - B_1B_0]}{Pr((Pr(Pr-1)-A_0)^2 + B_0^2)} - \\ & i \frac{[(Pr-A_1)B_0 + (Pr(Pr-1)-A_0)B_1]}{Pr((Pr(Pr-1)-A_0)^2 + B_0^2)}. \end{aligned} \quad (70)$$

现在,对函数 V 取实部,得到平板表面处 \bar{f} 的表达式

$$\bar{f}''(0) = \frac{[(Pr-A_1)(Pr(Pr-1)-A_0) - B_1B_0]}{Pr((Pr(Pr-1)-A_0)^2 + B_0^2)}, \quad (71)$$

其中

$$A_0 = \frac{M}{1+m^2}, B_0 = \frac{Mm}{1+m^2}, M_1 = A_0 - iB_0, \quad (72)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} [((1+4A_0)^2 + 16A_0^2m^2)^{1/2} + (1+4A_0)]^{1/2}, \quad (73)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} [((1+4A_0)^2 + 16A_0^2m^2)^{1/2} - (1+4A_0)]^{1/2}, \quad (74)$$

$$A_1 = \frac{(1+A)}{2}, B_1 = \frac{B}{2}, h = A_1 + iB_1. \quad (75)$$

从而,根据式(62)~(75)计算流体的各种性质,诸如局部表面摩擦因数 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$,又如局部 Nusselt 数 $Nu_x Gr_x^{-1/5}$ 项中的传热率,分别表示如下:

$$C_{fx} Gr_x^{3/5} = \zeta^{-2} \frac{[(Pr - A_1)(Pr(Pr - 1) - A_0) - B_1 B_0]}{Pr((Pr(Pr - 1) - A_0)^2 + B_0^2)}, Nu_x Gr_x^{-1/5} = \zeta Pr. \quad (76)$$

从上述方程可以发现:当局部蒸发系数 ζ 足够大时,局部表面摩擦因数 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$ 近似等于 $1/Pr^2 \zeta$, 局部 Nusselt 数 $Nu_x Gr_x^{-1/5}$ 近似等于 $Pr \zeta$ 。图 2 至图 4 给出了相关参数取不同值时,局部表面摩擦因数和局部 Nusselt 数的近似值,并与 ζ 取所有值时的数值解进行了比较,结果发现,对局部蒸发系数 ζ 所有足够大的数值,两者吻合得很好。

3 结果讨论

本文就层状自由对流边界层问题,流过一个热通量均匀的、半无限的、可渗透的竖直平板,均匀磁场垂直作用在平板表面上,考虑了 Hall 电流的影响。用自由变量公式化 (FVF) 和流函数公式化 (SFF),将边界层方程变换为非线性偏微分方程。在 ζ 的所有取值范围,分别经由简明有限差分格式,结合 Gauss 消去法,以及局部非相似法,得到方程的完整解。可是,对上游区,假设 ζ 足够小,采用正规的摄动法求解。此外,在远离板前缘区域, ζ 足够大,采用渐近分析法求解。对低 Prandtl 数,得到了局部表面摩擦因数 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$ 和局部 Nusselt 数 $Nu_x Gr_x^{-1/5}$ 。最后研究控制流场的不同物理参数对速度和温度分布的影响。

表 2 当 $Pr = 0.1, M = 0.1$ 和 $m = 1.0$, 蒸发系数 ζ 取不同值时,局部表面摩擦因数和局部 Nusselt 数的数值结果

Table 2 Numerical values of local skin friction coefficient and local Nusselt number coefficient against the transpiration parameter ζ for $Pr = 0.1, M = 0.1, m = 1.0$

ζ	$C_{fx}/Gr_x^{-3/5} = f''(\zeta, 0)$			$Nu_x/Gr_x^{-1/5} = 1/\theta(\zeta, 0)$		
	PVF	RPS & ASS	LNS	PVF	RPS & ASS	LNS
0.000 00	3.114 77	3.114 78 (S)	3.114 00	0.264 04	0.264 04 (S)	0.264 11
0.100 17	3.172 74	3.172 85 (S)	3.171 71	0.267 97	0.267 77 (S)	0.267 90
0.201 34	3.231 53	3.230 74 (S)	3.229 59	0.271 75	0.271 55 (S)	0.271 68
0.410 75	3.348 62	3.347 12 (S)	3.346 10	0.279 61	0.279 39 (S)	0.279 53
0.509 84	3.403 76	3.400 08 (S)	3.399 15	0.283 35	0.283 12 (S)	0.283 26
0.601 37	3.451 17	3.447 53 (S)	3.446 69	0.286 81	0.286 57 (S)	0.286 71
0.809 41	3.551 31	3.549 19 (S)	3.548 58	0.294 70	0.294 45 (S)	0.294 58
1.012 24	3.642 07	3.638 50 (S)	3.638 13	0.302 46	0.301 29 (S)	0.302 30
1.206 30	3.715 44	3.713 21 (S)	3.713 07	0.309 93	0.310 67 (S)	0.309 73
2.014 27	3.882 53	-	3.882 79	0.341 88	-	0.341 36
4.021 86	3.092 39	-	3.068 35	0.439 32	-	0.440 45
8.028 49	0.945 85	-	0.948 08	0.803 66	-	0.803 38
10.017 87	0.609 05	0.589 16 (L)	0.609 51	1.001 36	1.001 79 (L)	1.001 94
12.002 58	0.425 13	0.410 43 (L)	0.424 59	1.198 36	1.200 26 (L)	1.200 45
15.116 10	0.269 40	0.258 77 (L)	0.267 71	1.506 66	1.511 61 (L)	1.511 82
18.103 24	0.188 46	0.180 42 (L)	0.186 70	1.801 45	1.810 32 (L)	1.810 33
20.009 94	0.154 60	0.147 67 (L)	0.152 81	1.989 12	2.000 99 (L)	2.001 00
25.190 30	0.097 52	0.093 18 (L)	0.096 42	2.496 77	2.519 03 (L)	2.519 07
30.161 86	0.068 25	0.064 99 (L)	-	2.981 39	3.016 19 (L)	-
40.314 01	0.039 07	0.036 38 (L)	-	3.963 72	4.031 40 (L)	-
50.237 10	0.025 51	0.023 43 (L)	-	4.913 15	5.023 71 (L)	-
60.146 53	0.018 06	0.016 34 (L)	-	5.851 27	6.014 65 (L)	-
70.583 94	0.013 32	0.011 87 (L)	-	6.828 73	7.058 39 (L)	-

注 (S)和(L)分别表示 ζ 取小值和大值。

当磁场参数 $M = 0.1$, Hall 参数 $m = 1.0$ 和 Prandtl 数 $Pr = 0.1$, 蒸发系数 ζ 在 0 到 100 之间变化时, 表 2 给出了局部表面摩擦因数 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$ 和局部 Nusselt 数 $Nu_x Gr_x^{-1/5}$ 的数值结果. 从表中可以看到, 一方面, 随着蒸发系数 ζ 的增加, 板的前缘附近的局部表面摩擦因数逐渐增大, 然后缓慢地减少; 另一方面, 局部 Nusselt 数迅速地增加. 比较清楚地验证了, 小 ζ 值和大 ζ 值时的解, 和简明有限差分解和局部非相似解卓越地一致, 确保本问题中使用的数值解有相当好的精度. 还可以看出, 简明有限差分法给出的解, 对所有 ζ 值适用; 但是局部非相似法给出的解, 对非常大的 ζ 值不适用.

3.1 有关物理常数对 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$ 和 $Nu_x Gr_x^{-1/5}$ 的影响

当 $Pr = 0.005$, $m = 2.0$, $M = 0, 0.1, 1.0, 10$ 时, 图 2(a) 和图 2(b) 分别给出了局部表面摩擦因数 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$ 和局部 Nusselt 数 $Nu_x Gr_x^{-1/5}$, 随蒸发系数 ζ 的变化. 从图中可以看到, 局部蒸发系数 ζ 取小值、大值和全部值时, 结果吻合良好. 还可以看到, 随着磁场参数的增大, 局部表面摩擦因数和局部 Nusselt 数都减小, 这是因为边界层内出现了流动方向相反的 Lorentz 力, 随着磁场的增强而实际地增强, 因而, 磁场担当起阻力的作用, 使局部表面摩擦因数和局部 Nusselt 数出现明显地减小. 图 2(a) 还可以看到, 当 $M = 0, 0.1, 1.0$ 时, 随着 ζ 的增大, 局部表面摩擦因数先达到局部最大值, 然后逐渐减小直至渐近值, 当 $M = 0, 0.1$ 和 1.0 时, 局部表面摩擦因数的最大值分别为 44.432 34, 20.557 01 和 11.182 55, 分别出现在 $\zeta = 20.328, 6.689 94$ 和 $1.855 18$ 处. 然而, 强磁场 $M = 10.0$ 时, 最大值并不出现. 另外, 图 2(b) 可以看到, 当 $M = 0.1, 1.0$ 和 10.0 时, 局部 Nusselt 数在板的前缘附近达到局部最小值, 然而随着 ζ 的增大, 局部 Nusselt 数逐渐增加直至渐近值. 在 $\zeta = 12.164 6, 5.890 11$ 和 $2.975 54$ 处, 分别取得最小值 0.084 48, 0.059 和 0.047. 还可以看到热传递情况, 弱磁场没有局部最小值. 此外, 随着作用在平板表面垂直方向上磁场的增强, 动量边界层和热边界层厚度都出现减少.

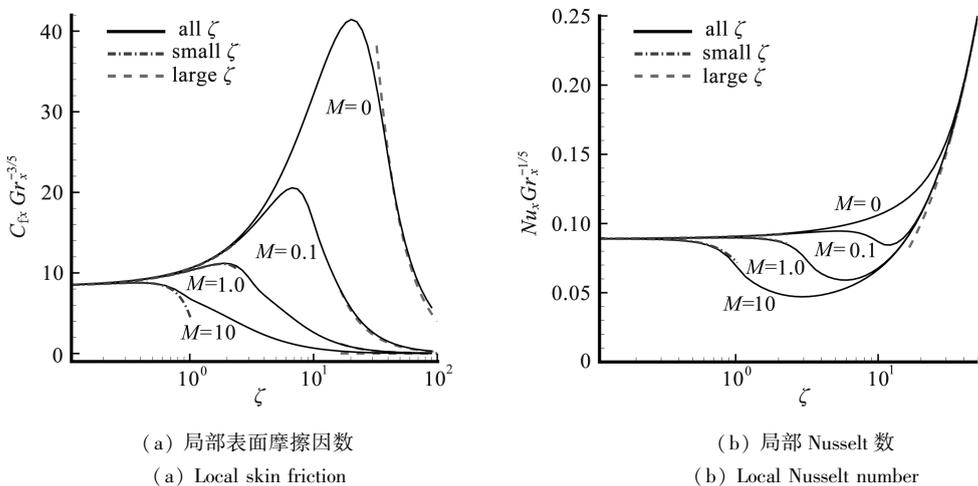
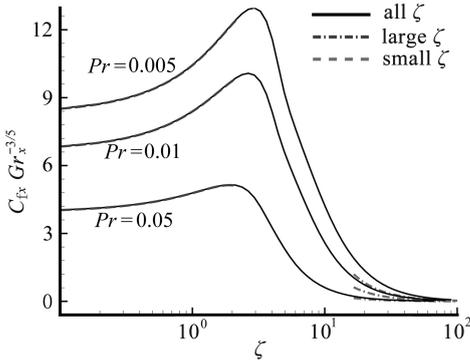


图 2 当 $Pr = 0.005$, $m = 2.0$, 磁场参数 M 取不同数值时, $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$, $Nu_x Gr_x^{-1/5}$ 随蒸发系数 ζ 的变化

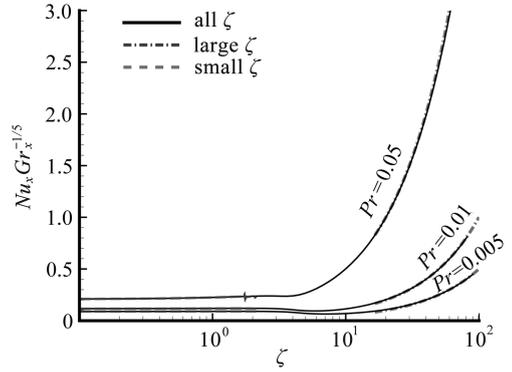
Fig. 2 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$, $Nu_x Gr_x^{-1/5}$ for different values of magnetic parameter against transpiration parameter ζ for $Pr = 0.005$ and $m = 2.0$

当磁场参数 $M = 0.5$, Hall 参数 $m = 2.0$, Prandtl 数 $Pr = 0.05, 0.01$ 和 0.005 时, 图 3(a) 和图 3(b) 分别给出了局部表面摩擦因数 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$ 和局部 Nusselt 数 $Nu_x Gr_x^{-1/5}$, 随着蒸发系数 ζ 的变化. 图 3(a) 可以看到, 随着 Prandtl 数 Pr 增加, 局部表面摩擦因数在逐渐减少, 同时传热率在增加. 物理上这是可能的, 因为 Pr 的增加, 导致流体的热传导性能下降, 最后导致粘性层之间摩擦力的下降, 最终平板表面摩擦的减小, 反而使边界层内的局部 Nusselt 数增加. 同样地,



(a) 局部表面摩擦因数

(a) Local skin friction

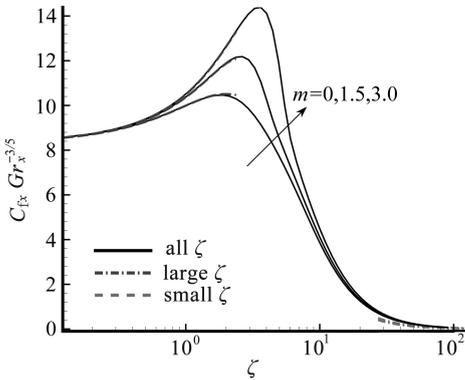


(b) 局部 Nusselt 数

(b) Local Nusselt number

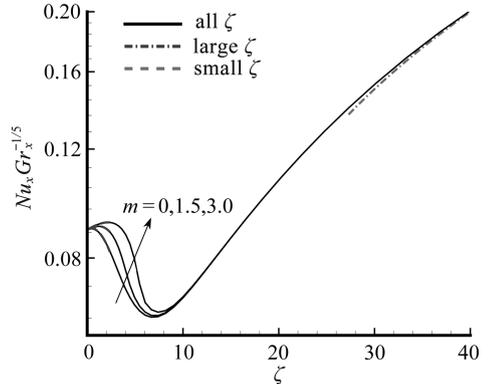
图 3 当 $M = 0.5, m = 2.0$, Prandtl 数取不同数值时, $C_{fx} Gr_x^{-3/5}, Nu_x Gr_x^{-1/5}$ 随蒸发系数 ζ 的变化

Fig.3 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}, Nu_x Gr_x^{-1/5}$ for different values of Prandtl number against transpiration parameter ζ for $M = 0.5$ and $m = 2.0$



(a) 局部表面摩擦因数

(a) Local skin friction



(b) 局部 Nusselt 数

(b) Local Nusselt number

图 4 当 $M = 0.5, Pr = 0.005$, Hall 参数 m 取不同数值时, $C_{fx} Gr_x^{-3/5}, Nu_x Gr_x^{-1/5}$ 随蒸发系数 ζ 的变化

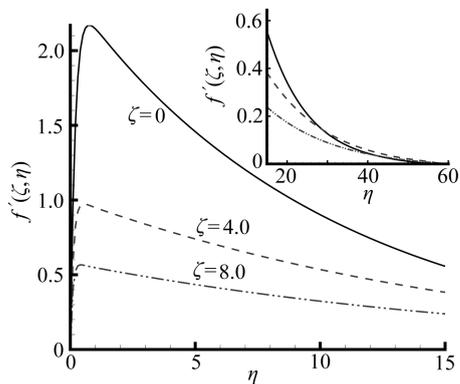
Fig.4 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}, Nu_x Gr_x^{-1/5}$ for different values of Hall parameter against transpiration parameter ζ for $M = 0.5$ and $Pr = 0.005$

随着 Pr 的增加,热边界层厚度在增加。另外,由图 3(a)看到, $Pr = 0.005, 0.01, 0.05$ 时,每条曲线的最大值分别为 12.953 62, 10.072 92 和 5.134 848, 分别出现在 $\zeta = 2.96, 3.62$ 和 2.12 处。

当 $Pr = 0.005, M = 0.5$, Hall 参数 $m (= 0.0, 1.5, 3.0)$ 时,图 4(a)和图 4(b)分别给出了局部表面摩擦因数 $C_{fx} Gr_x^{-3/5}$ 和局部 Nusselt 数 $Nu_x Gr_x^{-1/5}$, 随着蒸发系数 ζ 的变化。图 4(a)和图 4(b)表明,由于 Hall 参数 m 的增加,使得局部表面摩擦因数和局部 Nusselt 数出现明显增加。与磁场参数 M 不同, Hall 效应对边界层内的流动起着支撑作用,最终导致表面摩擦和传热率的上升。图 4(a)还可以看到,在板的前缘附近,每个 m 值对应着局部表面摩擦因数的局部最大值,并随着 ζ 增加,最大值逐渐减小直至渐近值。 $m = 0.0, 1.5$ 和 3.0 时,最大值分别为 10.458 08, 12.170 27 和 14.36, 分别出现在 $\zeta = 1.91, 2.52$ 和 3.47 处。

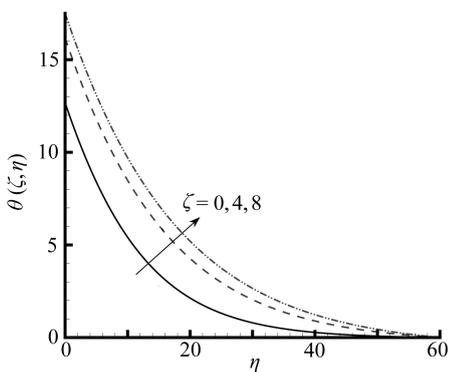
3.2 有关物理常数对速度和温度分布的影响

本小节研究低 Prandtl 数 Pr 时,各种物理参数对无量纲速度 $f'(\zeta, \eta)$ 和温度 $\theta(\zeta, \eta)$ 的影响。



(a) 无量纲速度的分布

(a) Velocity profiles

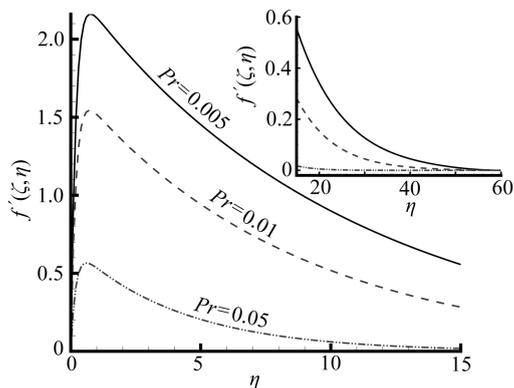


(b) 无量纲温度的分布

(b) Temperature profiles

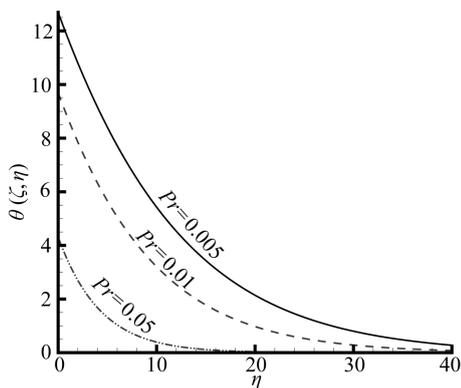
图5 当磁场参数 $M = 0.5$, Hall 参数 $m = 2.0$, Prandtl 数 $Pr = 0.005$, 蒸发系数 ζ 取不同数值时,无量纲速度和温度随 η 的分布

Fig.5 Velocity profiles and temperature profiles against η for different values of transpiration parameter ζ while Prandtl number $Pr = 0.005$, magnetic parameter $M = 0.5$ and Hall parameter $m = 2.0$



(a) 速度分布

(a) Velocity profiles



(b) 温度分布

(b) Temperature profiles

图6 当 $M = 0.5, m = 2.0, \zeta = 4.0$, Prandtl 数 $Pr = 0.005, 0.01$ 和 0.05 时,速度和温度随 η 的分布

Fig.6 Velocity profiles and temperature profiles against η for different values of Prandtl number Pr while transpiration parameter $\zeta = 4.0$, magnetic parameter $M = 0.5$ and Hall parameter $m = 2.0$

当 $Pr = 0.005, M = 0.5, m = 2.0, \zeta = 0.0, 4.0$ 和 8.0 时,图 5(a) 和图 5(b) 分别给出了局部蒸发系数 ζ 对速度和温度分布的影响. 明显地看到,边界层内流速在下降,同时温度在升高. 还可以看到,当 $\zeta > 0$ 时,由于流体的吸入或抽出,使得流速在下降. 这个现象可解释为:由于吸入效应将流体拉向壁面,浮力成为拉力,因而使边界层内流速降低、温度升高. 值得注意的是,动量边界层厚度减少,热边界层厚度轻微地增加. 实验计算可以得到 $\zeta > 10.0$ 时温度的渐近分布.

当 $\zeta = 4.0, M = 0.5, m = 2.0, Pr = 0.005, 0.01$ 和 0.05 时,图 6(a) 和图 6(b) 分别给出了 Prandtl 数 Pr 取不同数值时,无量纲速度和温度分布随 η 的变化. 图中可以看到,随着 Prandtl 数的增大,速度和温度分布均出现下降. 还可以看到,当 Prandtl 数取值大时,速度和温度分布曲线迅速分离,并达到它们的渐近值,从而,热边界层和动量边界层的厚度随之减少. 这种现象的原因是,运动学粘性值是某个定值,流体的热扩散率下降,导致流体速度和温度减小.

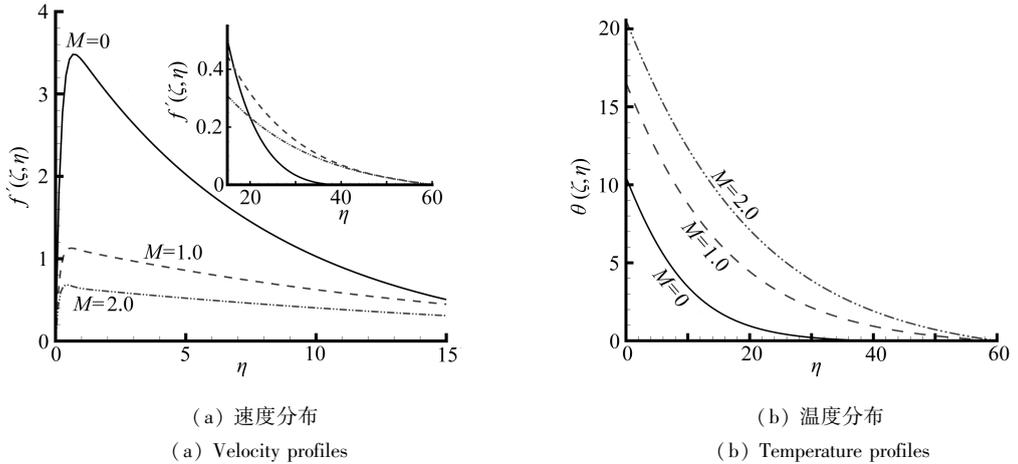


图 7 当 $Pr = 0.005, \zeta = 4.0, m = 2.0$, 磁场参数 $M = 0.0, 1.0, 2.0$ 时, 速度和温度随 η 的分布

Fig. 7 Velocity profiles and temperature profiles against η for different values of magnetic parameter M while Prandtl number $Pr = 0.005$, transpiration parameter $\zeta = 4.0$ and Hall parameter $m = 2.0$

当 $M = 0.0, 1.0, 2.0, Pr = 0.005, \zeta = 4.0$ 和 $m = 2.0$ 时, 图 7 给出了磁场对无量纲速度 $f'(\zeta, \eta)$ 和温度 $\theta(\zeta, \eta)$ 随 η 的变化. 从图中可以看到, 随着磁场参数 M 从 0 增加到 2, 边界层内的流速在减少降低, 同时温度在提高. 磁场的作用, 像一个反作用力或阻力, 使得流体的运动减缓. 用图 7(a) 来解释这个特性, 磁场垂直作用于流动方向, 随着磁场强度的提高, 流速减缓了. 还可以看到, 随着磁场参数 M 增大, 热边界层和动量边界层厚度在增加.

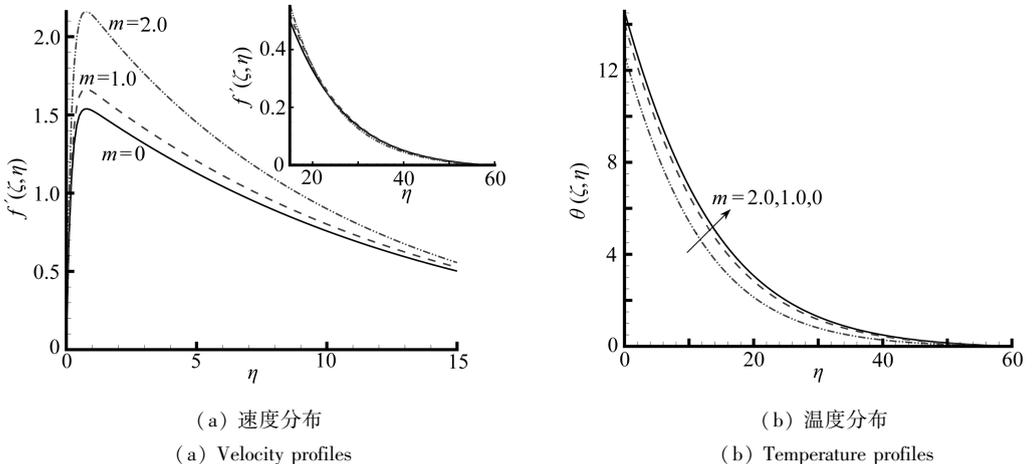


图 8 当 $Pr = 0.005, \zeta = 4.0, M = 0.5$, Hall 参数 $m = 0.0, 1.0$ 和 2.0 时, 速度和温度随 η 的分布

Fig. 8 Velocity profiles and temperature profiles against η for different values of Hall parameter m while Prandtl number $Pr = 0.005$, magnetic parameter $M = 0.5$ and transpiration parameter $\zeta = 4.0$

最后将注意力转向 Hall 参数 m , 考虑它对流体的速度 $f'(\zeta, \eta)$ 和温度 $\theta(\zeta, \eta)$ 随 η 的变化. 在图 8 中, Hall 参数 $m = 0.0, 1.0$ 和 2.0 , 其他物理量 $Pr = 0.005, \zeta = 4.0$ 和 $M = 0.5$. 从图中可以看到, 随着 Hall 参数 m 的增加, 流速在增加, 同时温度在下降. 此外, 动量边界层厚度轻微地增加, 而热边界层厚度在逐渐减少. 可以发现, Hall 电流效应与磁场相比, 本质上是相反的, 磁场对流体运动起着阻碍作用.

4 总 结

本文主要研究 Hall 电流对竖直可渗透平板上的 MHD 自然对流的影响,板表面具有均匀的热通量.使用 4 种截然不同的方法来模拟边界层的控制方程:对较小的 ζ 值,用展开的级数法求解;对较大的 ζ 值,用渐近法求解;对 $\zeta \in [0,100]$ 上的所有值,用带二阶截断的局部非相似法和简明有限差分法求解.模拟结果被表示为局部表面摩擦因数 $C_{f_x} Gr_x^{-3/5}$ 和局部 Nusselt 数 $Nu_x Gr_x^{-1/5}$.然后,讨论各种物理量对边界层内流体速度和温度分布的影响.从本文的研究中可得到以下结论:

- 1) 磁场参数 M 的增加,使局部表面摩擦因数和局部 Nusselt 数均出现减小;
- 2) Hall 参数 m 的增加,使局部表面摩擦因数和局部 Nusselt 数均出现提高,然而对传热率的影响很小;
- 3) 蒸发系数 ζ 的增加,导致流体速度下降,然而温度分布明显地上升,并在 $\zeta > 10.0$ 时达到其渐近值;
- 4) 磁场参数 M 的增加,使边界层内的速度分布降低而温度增加,然而, Hall 参数 m 的影响,与磁场参数 M 的作用正相反.

参考文献:

- [1] Sato H. The Hall effect in the viscous flow of ionized gas between two parallel plates under transverse magnetic field[J]. *J Phys Soc Japan*, 1961, **16**: 1427-1433.
- [2] Yamanishi T. Hall effect in the viscous flow of ionized gas through straight channels[C]// *17th Annual Meeting of Phys Soc Japan*, 1962, **5**: 29.
- [3] Sherman A, Sutton G W. *Magnetohydrodynamics* [M]. Illinois: Northwestern University Press, 1961.
- [4] Katagiri M. The effect of Hall currents on the magnetohydrodynamic boundary layer flow past a semi-infinite flat plate[J]. *J Phys Soc Japan*, 1969, **27**: 1051-1059.
- [5] Pop I, Watanabe T. Hall effect on magnetohydrodynamic free convection about a semi-infinite vertical flat plate[J]. *Int J Eng Sci*, 1994, **32**(2): 1903-1911.
- [6] Aboeldahab M E, Elbarbary M E. Hall current effect on magnetohydrodynamic free convection flow past a semi-infinite plate with mass transfer[J]. *Int J Eng Sci*, 2001, **39**(14): 1641-1652.
- [7] Eichhorn R. The effect of mass transfer on free convection[J]. *ASME J Heat Transfer*, 1960, **82**: 260-263.
- [8] Vedhanayagam M, Altenkirch R A, Eichhorn R A. Transformation of the boundary layer equation for free convection flow past a vertical flat plate with arbitrary blowing and wall temperature variation[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 1980, **23**: 1236-1288.
- [9] Lin H T, Yu W S. Free convection on horizontal plate with blowing and suction[J]. *ASME J Heat Transfer*, 1988, **110**(3): 793-796.
- [10] Hossain M A, Alam K C A, Rees D A S. MHD free and forced convection boundary layer flow along a vertical porous plate[J]. *Appl Mech Engrg*, 1997, **2**(1): 33-51.
- [11] Saha L K, Hossain M A, Gorla R S R. Effect of Hall current on the MHD laminar natural convection flow from a vertical permeable flat plate with uniform surface temperature[J]. *Int J Ther Sci*, 2007, **46**(8): 790-801.
- [12] Hossain M A, Rashid R I M A. Hall effects on hydromagnetic free convection flow along a porous flat plate with mass transfer[J]. *J Phys Soc Japan*, 1987, **56**(1): 97-104.

- [13] Siddiqa S, Asghar S, Hossain M A. Natural convection flow over an inclined flat plate with internal heat generation and variable viscosity[J]. *Math and Comp Model*, 2010, **52**(9/10): 1739-1751.
- [14] Minkowycz W J, Sparrow E M. Numerical solution scheme for local nonsimilarity boundary layer analysis[J]. *Numerical Heat Trans*, 1978, **1**(1/3):69-85.
- [15] Chen T S. Parabolic system: local nonsimilarity method[C]//Minkowycz W J, Sparrow E M, Schneider G E, Pletcher R H. *Handbook of Numerical Heat Transfer*. New York: Wiley, 1988.
- [16] Nachtsheim P R, Swigert P. Satisfaction of the asymptotic boundary conditions in numerical solution of the system of nonlinear equations of boundary layer type[A]. NASA TND-3004, 1965.
- [17] Butcher J C. Implicit Runge-Kutta process[J]. *Math Comp*, 1964, **18**(85): 50-55.
- [18] Wilks G, Hunt R. Magneto hydrodynamic free convection flow about a semi-infinite plate at whose surface the heat flux is uniform[J]. *ZAMP*, 1984, **35**(1): 34-49.

Effect of Hall Current on the MHD Natural Convection Flow From a Vertical Permeable Flat Plate With Uniform Surface Heat Flux

L. K. Saha¹, S. Siddiqa², M. A. Hossain²

(1. *Department of Mathematics, University of Dhaka, Dhaka 1000, Bangladesh;*

2. *Department of Mathematics, COMSATS Institute of Information Technology, Park Road, Chak Shahzad, Islamabad 44000, Pakistan)*

Abstract: The effect of Hall current on the MHD natural convection flow from a vertical permeable flat plate with uniform heat flux in the presence of transverse magnetic field was analyzed. It was assumed that the induced magnetic field was negligible compared to the imposed magnetic field. The boundary layer equations were reduced to the suitable form by employing free variable formulation (FVF) and stream function formulation (SFF). The parabolic equations obtained from FVF were integrated numerically with the help of straightforward finite difference method while on the other hand nonsimilar system of equations obtained from SFF were solved by employing local non-similarity method, for the whole range of local transpiration parameter ζ . Consideration had also been given to the regions where local transpiration parameter ζ was small or large enough. However, in these particular regions, solutions were acquired with the aid of regular perturbation method. Effects of the magnetic field M , and the Hall parameter m , on the local skin friction coefficient and local Nusselt number coefficient were shown graphically for smaller values of the Prandtl number Pr ($= 0.005, 0.01, 0.05$). Further, velocity and temperature profiles were also drawn from various values of local transpiration parameter.

Key words: MHD natural convection; Hall current; permeable plate; heat flux