文章编号:1000-0887(2011)09-1021-09
ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887

基于辛对偶体系的层合板自由边缘效应的分析解*

姚伟岸[1], 聂臆矚[1], 肖 峰[2]

(1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室,辽宁 大连 116024;
2. 大连医科大学 计算机教研室,辽宁 大连 116044)

(钟万勰推荐)

摘要: 在原变量——位移和其对偶变量——应力组成的辛几何空间,建立了 Pipes-Pagano 模型的复合材料层合板问题的辛对偶求解体系. 与传统的单类变量不同,辛对偶变量有利于同时描述层间位移连续性条件和应力平衡条件. 进入辛对偶体系以后,就可以应用辛对偶体系的统一解析求解方法,如分离变量和辛本征展开的方法对层合板问题进行解析分析和求解. 对层合板自由边缘效应的分析求解,验证了辛对偶体系的方法对层合板问题的分析求解是十分有效的.

关 键 词: 层合板; 边缘效应; Pipes-Pagano 模型; 层间应力; 辛对偶体系
中图分类号: O343 **文献标志码:** A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.09.001

引 言

由于层合板具有成层性且层间强度较低,在结构总体受载时常因层间应力引起分层破坏,因此层间应力的研究是复合材料结构设计的基础问题之一. 1970 年,Pipes 和 Pagano 首先建立了一个有别于经典层合板壳理论的三维力学模型——Pipes-Pagano 模型,并采用有限差分法研究了自由边缘对层间应力的影响[1]. 鉴于文献[1]中,微分方程的复杂性和研究结果仅有 3 个应力分量起主要作用,Pipes 和 Pagano 进一步提出了一个近似的弹性力学解法,并利用级数解法得到对称角铺设层合板的解析解,它与精确方程的有限差分解的结果吻合很好[2]. 针对 Pipes-Pagano 模型,很多学者还提出了各种不同的近似解法,如 Hsu 和 Herakovick[3], Bar-Yoseph 和 Pian[4]用摄动法分析了层间应力;Tang 用边界层理论计算了层合板的层间应力[5]. Wang 和 Choi 用各向异性弹性理论和复变函数的分析方法, 首次尝试论证自由边缘应力场具有应力奇异的性质[6]. 文献[7]对 30 多年来有关自由边缘效应问题的研究做了非常详细的介绍.

传统的弹性力学解析求解方法大多采用半逆解法[8]. 通常的思路是努力消元将方程转化

* **收稿日期:** 2011-04-02; **修订日期:** 2011-07-01
基金项目: 国家 973 重点基础研究计划资助项目(2010CB832704);国家自然科学基金资助项目(10772039)
作者简介: 姚伟岸(1963—),男,辽宁人,教授,博士(联系人. Tel:+86-411-84707154; E-mail: ywa@dlut.edu.cn).

为单类变量的高阶微分方程,再利用预先假设试函数(位移场函数或应力场函数)的形式进行求解.这使其求解受到了很大的限制,许多有效的数学物理方法,如分离变量和本征展开的方法难于应用.钟万勰首先将辛数学方法引入弹性力学[9].辛对偶体系是通过引入原变量的对偶变量,在辛几何空间利用分离变量和辛本征展开等有效的方法求解弹性力学问题,突破了传统解法的限制.由于对偶的变量含有位移分量、应力分量,因此辛对偶体系更易于同时描述层合板的层间位移连续性条件和应力平衡条件,并被成功地用于求解出层合板 Sanit Venant 问题的解析解[10-12],展示了辛对偶体系在层合结构分析中的有效性与应用潜力.

本文建立了 Pipes-Pagano 模型复合材料层合板问题的辛对偶求解体系,并应用分离变量和辛本征展开的方法给出层合板自由边缘效应问题的一个解析求解方法.

1 基本方程

对如图 1 所示的 n 层 Pipes-Pagano 模型的层合板,它具有对称的铺层结构,在其两侧面上有截开式边缘,各个单层之间存在一理想的物理非连续界面.

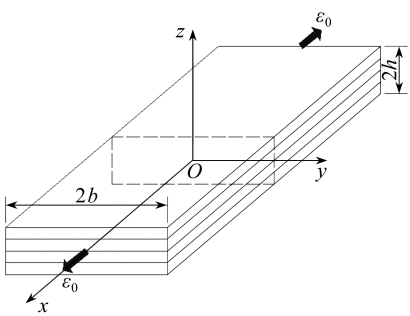

图 1 Pipes-Pagano 模型

Fig. 1 Pipes-Pagano model

记 $z_i(i=0,1,\cdots,n)$ 分别为表面和界面的 z 坐标值 $(z_0=-h<z_1<\cdots<z_n=h)$,第 i 单层的应力向量为

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)}=\{\sigma_x^{(i)}\quad \sigma_y^{(i)}\quad \sigma_z^{(i)}\quad \tau_{yz}^{(i)}\quad \tau_{xz}^{(i)}\quad \tau_{xy}^{(i)}\}^{\mathrm{T}}. \tag{1}$$

应变向量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}=\{\varepsilon_x^{(i)}\quad \varepsilon_y^{(i)}\quad \varepsilon_z^{(i)}\quad \gamma_{yz}^{(i)}\quad \gamma_{xz}^{(i)}\quad \gamma_{xy}^{(i)}\}^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

为表达简单起见,下面给出的一些公式中省略了表示层顺序的上标 (i),可能引起混乱的除外.

这里视层板的每一个单层为均匀的各向异性体,且有一个弹性对称平面(z 轴为弹性主轴方向),其应力-应变关系为

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16}\\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26}\\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36}\\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0\\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66}\end{bmatrix}. \tag{3}$$

当层合板两端沿 x 方向承受均匀拉伸的应力作用时,界面上将产生层间应力.由于层板及其各单层的几何与弹性特性和受载形式沿 x 方向都是均匀分布的,因此 x 方向的应变为常数,即 $\varepsilon_x=\varepsilon_0$,而其余位移分量也只是 y,z 的函数,问题将被简化为平面问题.

首先引入特解,即经典层合板理论解:

$$u^*=0,\ v^*=0,\ w^{*(i)}=-\frac{c_{13}^{(i)}}{c_{33}^{(i)}}\varepsilon_0 z+d_0^{(i)}\qquad (i=0,1,\cdots,n-1), \tag{4}$$

其中

$$d_0^{(0)}=0,\ d_0^{(i)}=d_0^{(i-1)}+\varepsilon_0 z_i\left(\frac{c_{13}^{(i)}}{c_{33}^{(i)}}-\frac{c_{13}^{(i-1)}}{c_{33}^{(i-1)}}\right)\qquad (i=1,2,\cdots,n-1). \tag{5}$$

则位移场函数可设为

$$u = \varepsilon_0 x + \tilde{u}(y,z),\ v = \tilde{v}(y,z),\ w = \tilde{w}(y,z) + w^* . \tag{6}$$

同样下面所有带有波浪线的各量均为去掉特解后的值,而它们应满足的微分方程可由下面的 Hellinger-Rainssner 变分原理导出:

$$\delta\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\int_{-b}^{b}\int_{z_i}^{z_{i+1}}[\tilde{\sigma}_x\varepsilon_0 + \tilde{\sigma}_y\dot{\tilde{v}} + \tilde{\sigma}_z\partial_z\tilde{w} + \tilde{\tau}_{yz}(\dot{\tilde{w}} + \partial_z\tilde{v}) + \tilde{\tau}_{xz}\partial_z\tilde{u} + \tilde{\tau}_{xy}\dot{\tilde{u}} - v_c]\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right\} = 0, \tag{7}$$

其中,v_c 为应变能密度,而 ∂_z 表示变量对 z 的偏导,而用一点表示对 y 的偏导,即$(\dot{\ }) = \partial/\partial y$.

2 导入辛对偶体系

因选取 y 坐标模拟为 Hamilton 体系的时间坐标,所以应力 $\tilde{\sigma}_x,\tilde{\sigma}_z,\tilde{\tau}_{xz}$ 应予以消去,将式(7)对 $\tilde{\sigma}_x,\tilde{\sigma}_z,\tilde{\tau}_{xz}$ 求变分,即可得到用其它应力和应变表示的 $\tilde{\sigma}_x,\tilde{\sigma}_z,\tilde{\tau}_{xz}$:

$$\tilde{\sigma}_x = -S_0\tilde{\tau}_{xy} - S_1\tilde{\sigma}_y + S_2\partial_z\tilde{w},\ \tilde{\sigma}_z = -S_3\tilde{\tau}_{xy} - S_4\tilde{\sigma}_y + S_5\partial_z\tilde{w},\ \tilde{\tau}_{xz} = S_6\partial_z\tilde{u} + S_7\tilde{\tau}_{yz}, \tag{8}$$

其中

$$\begin{cases}\Delta = c_{66}c_{22} - c_{26}^2,\ S_0 = (c_{12}c_{26} - c_{16}c_{22})/\Delta,\ S_1 = (c_{16}c_{26} - c_{12}c_{66})/\Delta,\\ S_2 = c_{13} + S_0c_{36} + S_1c_{23},\ S_3 = (c_{23}c_{26} - c_{36}c_{22})/\Delta,\ S_4 = (c_{36}c_{26} - c_{23}c_{66})/\Delta,\\ S_5 = c_{33} + S_3c_{36} + S_4c_{23},\ S_6 = (c_{44}c_{55} - c_{45}^2)/c_{44},\ S_7 = c_{45}/c_{44}.\end{cases} \tag{9}$$

再将式(8)代入式(7)可得到如下的混合能变分原理:

$$\delta\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\int_{-b}^{b}\int_{z_i}^{z_{i+1}}[\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}} - H]\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right\} = 0, \tag{10}$$

其中

$$H = -\frac{1}{2}S_6(\partial_z\tilde{u})^2 - \frac{1}{2}S_5(\partial_z\tilde{w})^2 + \frac{1}{2}S_8\tilde{\tau}_{xy}^2 + \frac{1}{2}S_9\tilde{\sigma}_y^2 + \frac{1}{2}S_{10}\tilde{\tau}_{yz}^2 - S_7\tilde{\tau}_{yz}\partial_z\tilde{u} - \tilde{\tau}_{yz}\partial_z\tilde{v} + S_3\tilde{\tau}_{xy}\partial_z\tilde{w} + S_4\tilde{\sigma}_y\partial_z\tilde{w} - S_{11}\tilde{\tau}_{xy}\tilde{\sigma}_y, \tag{11}$$

$$S_8 = c_{22}/\Delta,\ S_9 = c_{66}/\Delta,\ S_{10} = 1/c_{44},\ S_{11} = c_{26}/\Delta, \tag{12}$$

而

$$\boldsymbol{q} = \{\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}\}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{p} = \{\tilde{\tau}_{xy},\tilde{\sigma}_y,\tilde{\tau}_{yz}\}^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

显然,位移变量 $\boldsymbol{q}$ 的对偶变量是应力分量 $\boldsymbol{p}$,它们组成一个全状态向量 $\boldsymbol{v} = \{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$.

执行式(10)的变分就可以得到对偶方程组:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{v}, \tag{14}$$

其中算子矩阵

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_3\partial_z & S_8 & -S_{11} & 0\\ 0 & 0 & S_4\partial_z & -S_{11} & S_9 & 0\\ -S_7\partial_z & -\partial_z & 0 & 0 & 0 & S_{10}\\ -S_6\partial_z\partial_z & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_7\partial_z\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_z\\ 0 & 0 & -S_5\partial_z\partial_z & S_3\partial_z & S_4\partial_z & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

微分方程(14)就是全状态向量应满足的域内控制方程.当然它还应该满足侧边边界条件

$$\tilde{\tau}_{xy} = \varepsilon_0c_{13}c_{36}/c_{33},\ \tilde{\sigma}_y = \varepsilon_0c_{13}c_{23}/c_{33},\ \tilde{\tau}_{yz} = 0 \qquad (\text{当 } y = \pm b \text{ 时}); \tag{16}$$

上下表面边界条件

$$\begin{cases}(\tilde{\sigma}_z=)S_5\partial_z\tilde{w}-S_3\tilde{\tau}_{xy}-S_4\tilde{\sigma}_y=0\\(\tilde{\tau}_{xz}=)S_6\partial_z\tilde{u}+S_7\tilde{\tau}_{yz}=0\\\tilde{\tau}_{yz}=0\end{cases}\quad(\text{当 } z=\pm h \text{ 时});\tag{17}$$

层间位移连续条件

$$\tilde{u}^{(i)}=\tilde{u}^{(i-1)},\ \tilde{v}^{(i)}=\tilde{v}^{(i-1)},\ \tilde{w}^{(i)}=\tilde{w}^{(i-1)}\quad(\text{当 } z=z_i \text{ 时});\tag{18a}$$

层间应力平衡条件

$$\begin{cases}(S_5\partial_z\tilde{w}-S_3\tilde{\tau}_{xy}-S_4\tilde{\sigma}_y)^{(i)}=(S_5\partial_z\tilde{w}-S_3\tilde{\tau}_{xy}-S_4\tilde{\sigma}_y)^{(i-1)}\\(S_6\partial_z\tilde{u}+S_7\tilde{\tau}_{yz})^{(i)}=(S_6\partial_z\tilde{u}+S_7\tilde{\tau}_{yz})^{(i-1)}\\\tilde{\tau}_{yz}^{(i)}=\tilde{\tau}_{yz}^{(i-1)}\end{cases}\quad(\text{当 } z=z_i \text{ 时}).\tag{18b}$$

如果问题关于 $z=0$ 平面是对称的,则对称条件可选择为

$$\tilde{w}=\partial_z\tilde{u}=\partial_z\tilde{v}=\tilde{\tau}_{yz}=0.\tag{19}$$

对于带有齐次边界条件(17)和层间连续条件(18)的齐次微分方程(14),可以用有效的数学物理方法——分离变量法进行求解.即可令

$$\boldsymbol{v}(y,z)=\xi(y)\boldsymbol{\Psi}(z),\tag{20}$$

代入式(14)有

$$\boldsymbol{H\Psi}=\mu\boldsymbol{\Psi},\ \xi(y)=\exp(\mu y),\tag{21}$$

其中,μ 是本征值,待求;$\boldsymbol{\Psi}$ 是本征函数向量,当然它还应该满足条件(17)和(18).这样原问题转化为一个本征问题.

本节最后讨论算子矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的性质.引入单位辛矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{I}_3\\-\boldsymbol{I}_3&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{I}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\tag{22}$$

并定义

$$\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{z_i}^{z_{i+1}}\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}_2\mathrm{d}z.\tag{23}$$

不难验证,式(23)满足辛内积的4个条件[12],即按照式(23)的辛内积定义,向量 $\boldsymbol{v}$ 组成一辛空间.如果两个向量的辛内积为0,则称它们互相辛正交;否则为互相辛共轭.

容易验证知:只要向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 满足边界条件(17)和层间连续条件(18),就恒有

$$\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}_2\rangle\equiv\langle\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}_1\rangle,\tag{24}$$

因此,$\boldsymbol{H}$ 为辛空间的 Hamilton 算子矩阵.Hamilton 算子矩阵的辛本征问题(21)是有特点的[9,12],(a) 如果 μ 是本征值,则 $-\mu$ 也一定是其本征值,且 $\pm\mu$ 称为互相辛共轭的本征值;(b) 如果两个本征值不是互相辛共轭的,则它们的本征向量间一定是辛正交的.

3 零本征值的本征解

在辛本征问题中,零本征值是一个特殊的本征值($\mu=-\mu=0$),而且通常存在 Jordan 型的本征解.这些解是影响全域的,也是最基本的本征解,应首先予以求解.解带有边界条件(17)和层间连续条件(18)的微分方程组:

$$\boldsymbol{H\Psi}=0, \tag{25}$$

可得到两个基本本征解

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_0^{[01]}=\boldsymbol{\Psi}_0^{[01]}=\{1,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0\}^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{v}_0^{[02]}=\boldsymbol{\Psi}_0^{[02]}=\{0,\quad 1,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0\}^{\mathrm{T}}.\end{cases} \tag{26}$$

可以验证 $\boldsymbol{\Psi}_0^{[01]}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_0^{[02]}$ 是互相辛正交的,即 $\langle\boldsymbol{\Psi}_0^{[01]},\boldsymbol{\Psi}_0^{[02]}\rangle=0$, 因此,零本征值一定存在 Jordan 型的本征向量,而且 $\boldsymbol{\Psi}_0^{[01]}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_0^{[02]}$ 分别是两条 Jordan 型链的链头.

零本征值的一阶 Jordan 型本征解应求解带有边界条件(17)和层间连续条件(18)的微分方程组:

$$\boldsymbol{H\Psi}_0^{[1i]}=\boldsymbol{\Psi}_0^{[0i]}\qquad(i=1,2), \tag{27}$$

求解得一阶 Jordan 型的本征解为

$$\boldsymbol{\Psi}_0^{[11]}=\left\{0,\quad 0,\quad -\frac{c_{36}}{c_{33}}z+d_1,\quad \frac{c_{33}c_{66}-c_{36}^2}{c_{33}},\quad \frac{c_{33}c_{26}-c_{23}c_{36}}{c_{33}},\quad 0\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{28a}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_0^{[12]}=\left\{0,\quad 0,\quad -\frac{c_{23}}{c_{33}}z+d_2,\quad \frac{c_{33}c_{26}-c_{23}c_{36}}{c_{33}},\quad \frac{c_{33}c_{22}-c_{23}^2}{c_{33}},\quad 0\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{28b}$$

其中

$$d_1^{(0)}=0;\ d_1^{(i)}=d_1^{(i-1)}+z_i\left(\frac{c_{36}^{(i)}}{c_{33}^{(i)}}-\frac{c_{36}^{(i-1)}}{c_{33}^{(i-1)}}\right)\qquad(i=1,2,\cdots,n-1), \tag{29a}$$

$$d_2^{(0)}=0;\ d_2^{(i)}=d_2^{(i-1)}+z_i\left(\frac{c_{23}^{(i)}}{c_{33}^{(i)}}-\frac{c_{23}^{(i-1)}}{c_{33}^{(i-1)}}\right)\qquad(i=1,2,\cdots,n-1). \tag{29b}$$

本征解 $\boldsymbol{\Psi}_0^{[11]}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_0^{[12]}$ 并不是原问题(14)的解,但由它们可以组成原问题的解:

$$\boldsymbol{v}_0^{[11]}=\boldsymbol{\Psi}_0^{[11]}+y\boldsymbol{\Psi}_0^{[01]},\ \boldsymbol{v}_0^{[12]}=\boldsymbol{\Psi}_0^{[12]}+y\boldsymbol{\Psi}_0^{[02]}. \tag{30}$$

可以验证 $\boldsymbol{\Psi}_0^{[01]}$ 与 $\boldsymbol{\Psi}_0^{[11]}$, $\boldsymbol{\Psi}_0^{[02]}$ 与 $\boldsymbol{\Psi}_0^{[12]}$ 是互相辛共轭的,因此零本征值一定不存在二阶 Jordan 型的本征解. 至此,已经求出了零本征值的所有本征解,它们对应的也就是 Sanit Venant 问题的基本解.

4 非零本征值的本征解

本征方程(21)是关于 z 的微分方程组,其求解应先找到 z 方向的本征值 λ, 其方程为

$$\det\begin{bmatrix}-\mu & 0 & S_3\lambda & S_8 & -S_{11} & 0\\ 0 & -\mu & S_4\lambda & -S_{11} & S_9 & 0\\ -S_7\lambda & -\lambda & -\mu & 0 & 0 & S_{10}\\ -S_6\lambda^2 & 0 & 0 & -\mu & 0 & -S_7\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & -\lambda\\ 0 & 0 & -S_5\lambda^2 & S_3\lambda & S_4\lambda & -\mu\end{bmatrix}=0. \tag{31}$$

上面的方程在一般情况下无实根,本文设其根为 3 对不等共轭复根 $(\pm\beta_j\mathrm{i})\mu(j=0,1,2)$. 这里 $\beta_0\geqslant\beta_1\geqslant\beta_2>0$ 为仅与板材料有关的常数. 对根为其它时的情况,这里就不详细讨论了.

于是当 $\mu\neq 0$ 时,本征方程(21)的通解为

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{Bmatrix}\sum_{j=0}^{2}\left[B_{j1}\cos(\beta_j\mu z)+B_{j2}\sin(\beta_j\mu z)\right]\\ \sum_{j=0}^{2}\left[B_{j3}\cos(\beta_j\mu z)+B_{j4}\sin(\beta_j\mu z)\right]\\ \sum_{j=0}^{2}\left[B_{j5}\sin(\beta_j\mu z)+B_{j6}\cos(\beta_j\mu z)\right]\\ \sum_{j=0}^{2}\left[B_{j7}\cos(\beta_j\mu z)+B_{j8}\sin(\beta_j\mu z)\right]\\ \sum_{j=0}^{2}\left[B_{j9}\cos(\beta_j\mu z)+B_{j10}\sin(\beta_j\mu z)\right]\\ \sum_{j=0}^{2}\left[B_{j11}\sin(\beta_j\mu z)+B_{j12}\cos(\beta_j\mu z)\right]\end{Bmatrix},\tag{32}$$

但通解中待定常数 B_{ji} 并不是相互独立的,独立的常数仅有 6 个.将上式代入式(21)可得到如下的方程组:

$$\begin{cases}-\mu B_{j1}+S_3\beta_j\mu B_{j5}+S_8B_{j7}-S_{11}B_{j9}=0,\\ -\mu B_{j2}-S_3\beta_j\mu B_{j6}+S_8B_{j8}-S_{11}B_{j10}=0,\\ -\mu B_{j3}+S_4\beta_j\mu B_{j5}-S_{11}B_{j7}+S_9B_{j9}=0,\\ -\mu B_{j4}-S_4\beta_j\mu B_{j6}-S_{11}B_{j8}+S_9B_{j10}=0,\\ -\mu B_{j5}+S_7\beta_j\mu B_{j1}+\beta_j\mu B_{j3}+S_{10}B_{j11}=0,\\ -\mu B_{j6}-S_7\beta_j\mu B_{j2}-\beta_j\mu B_{j4}+S_{10}B_{j12}=0,\\ -S_6\beta_j^2\mu B_{j1}+B_{j7}+S_7\beta_jB_{j11}=0,\\ -S_6\beta_j^2\mu B_{j2}+B_{j8}-S_7\beta_jB_{j12}=0,\\ B_{j9}+\beta_jB_{j11}=0,\\ B_{j10}-\beta_jB_{j12}=0,\\ S_5\beta_j^2\mu B_{j5}-S_3\beta_jB_{j7}+S_4\beta_jB_{j9}-B_{j11}=0,\\ S_5\beta_j^2\mu B_{j6}+S_3\beta_jB_{j8}+S_4\beta_jB_{j10}-B_{j12}=0,\end{cases}\tag{33}$$

这里取 $B_{j11},B_{j12}(j=0,1,2)$ 作为独立变量,则其它的常数可以用这两个常数表示为

$$\begin{cases}B_{jk}=D_{jk}B_{j11}/\mu & (k=1,3,5),\\ B_{jk}=D_{jk}B_{j12}/\mu & (k=2,4,6),\\ B_{jk}=D_{jk}B_{j11} & (k=7,9),\\ B_{jk}=D_{jk}B_{j12} & (k=8,10),\end{cases}\tag{34}$$

其中 $D_{jk}(j=0,1,2;k=1,2,\cdots,10)$ 都为仅与板材料有关的常数.再将通解(32)和(34)代入边界条件(17)和层间连续条件(18),就可以得到一组关于 $B_{j11},B_{j12}(j=0,1,2)$ 的齐次方程,从而可以求出非零本征值 $\mu_m(m=1,2,\cdots)$ 和对应的本征向量 $\boldsymbol{\Psi}_m$.

5 问题的求解

求出了式(21)的所有本征值和对应的本征向量,根据展开定理,带有边界条件(17)和层

间连续条件(18)的问题(14)的通解可以写为

$$\boldsymbol{v} = a_0^{[0]}\boldsymbol{v}_0^{[01]} + a_0^{[1]}\boldsymbol{v}_0^{[02]} + a_0^{[2]}\boldsymbol{v}_0^{[11]} + a_0^{[3]}\boldsymbol{v}_0^{[12]} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \exp(\boldsymbol{\mu}_m y)\boldsymbol{\Psi}_m, \tag{35}$$

而其中的待定常数 $a_0^{[0]}, a_0^{[1]}, a_0^{[2]}, a_0^{[3]}, a_m (m = 1,2,\cdots)$ 是由尚未使用的侧边边界条件(16)来确定的.

在实际求解中,可以取式(35)中的有限项进行求解,即令

$$\boldsymbol{v} = \{\tilde{u} \quad \tilde{v} \quad \tilde{w} \quad \tilde{\tau}_{xy} \quad \tilde{\sigma}_y \quad \tilde{\tau}_{yz}\}^{\mathrm{T}} =$$

$$a_0^{[0]}\boldsymbol{v}_0^{[01]} + a_0^{[1]}\boldsymbol{v}_0^{[02]} + a_0^{[2]}\boldsymbol{v}_0^{[11]} + a_0^{[3]}\boldsymbol{v}_0^{[12]} + \sum_{m=1}^{k} a_m \exp(\boldsymbol{\mu}_m y)\boldsymbol{\Psi}_m. \tag{36}$$

上式已严格满足微分方程(14)以及边界条件(17)和层间连续条件(18). 但侧边边界条件(16)则由于仅取有限项是不能严格满足的,一般情况下它是当 $k \to \infty$ 时才能严格满足的.

将式(36)代入下面的变分方程:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{z_i}^{z_{i-1}} \left[\left(\tilde{\tau}_{xy} - \varepsilon_0 \frac{c_{13}c_{36}}{c_{33}} \right) \delta\tilde{u} + \left(\tilde{\sigma}_y - \varepsilon_0 \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}} \right) \delta\tilde{v} + \tilde{\tau}_{yz}\delta\tilde{w} \right] \Bigg|_{y=-b}^{b} \mathrm{d}z = 0, \tag{37}$$

就得到关于常数 $a_0^{[0]}, a_0^{[1]}, a_0^{[2]}, a_0^{[3]}, a_m (m = 1,2,\cdots,k)$ 的一个线性代数方程组,从而得到位移 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ 和应力 $\tilde{\tau}_{xy}, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\tau}_{yz}$ 的分析解. 最后,再叠加非齐次方程的特解(4)就得到问题的一个分析解.

这里需要强调的是式(36)中本征值的选取应该是其绝对值越小的越优先选择,而且复本征值应成对选取.

算例 本文选用文献[1]提供的例题. 取 4 层层厚相同的对称铺层复合材料层合板. 材料弹性常数取为

$$E_{11} = 138\ \mathrm{GPa},\ E_{22} = E_{33} = 14.5\ \mathrm{GPa},$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5.9\ \mathrm{GPa},\ \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.21,$$

而铺设角为-45°/45°/45°/-45°,长度 $b = 4h$, 分析层间应力的自由边缘效应.

表 1 非零本征值

Table 1 Nonzero eigenvalue

n	1	2	3	4	5	6	7
μh	1.563 57	2.030 42	2.679 95	2.218 58+0.626 698i	3.718 76	3.871 37	5.483 78

表 1 给出了前 7 组非零本征值. 表中仅列出第一象限的根,其中实根 ($n = 1,2,3,5,6,7$) 意味对每个 n 还有其辛共轭根 $-\mu h$,共两个本征值,而复根($n = 4$) 意味还有复共轭以及它们的辛共轭根,共 4 个本征值. 这些非零本征值均为单根.

图 2 为分别取前 5,6,7 组(对应 $k = 12,14,16$) 非零本征值时得到的 $x = 0, z = h/2$ 线上的应力 τ_{xz} 的分布图. 从图上可以明显看出,随 k 值的增加,边缘处 τ_{xz} 的值越来越大,其数值也明显比文献[1] 提供的结果(大约为 15.5) 大很多. 当 $k \to \infty$ 时,应力 τ_{xz} 将趋于 ∞, 表明层间应力场确实存在奇异性质.

图 3 和图 4 分别给出了取前 7 组非零本征值时得到的 $x = 0, z = h/2$ 线上的应力 τ_{xy} 和 σ_z 的分布图,它们与文献[1] 所给出的结果是相近的. 从图 4 可以看出,层合板在靠近自由边缘处层间正应力 σ_z 存在着拉应力区.

如果在式(36)中取 $k = 0$, 即辛本征展开中仅取零本征值的本征解,则给出的就是经典层合板的理论解,也就是 Sanit Venant 问题的解析解[11-12]. 要讨论具有边缘效应的问题,则必须

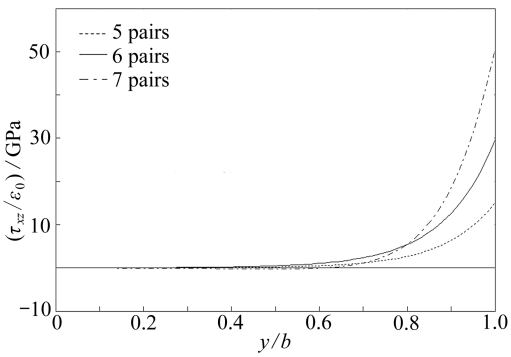

图 2 $x = 0$, $z = h/2$ 线上应力 τ_{xz} 的分布图

Fig. 2 Distribution of stress τ_{xz} on the line $x = 0$, $z = h/2$

包含非零本征值的本征解. 从式(36)可以看出,非零本征值的本征解均含有指数函数 $\exp(\mu_m y)$,它们全部是向远处衰减的,其中非零本征值绝对值最小的解是衰减最缓慢的. 这些解也都是 Sanit Venant 原理所覆盖的部分,其中本征值实部为正的本征解是向 y 的负向衰减的,而本征值实部为负的本征解是向 y 的正向衰减的. 从表 1 可以看出,从边缘向内部衰减最缓慢的解在距离边界 $2h$(板厚) 处, 其值已经衰减为原值的 4.38% ($\exp(-2\mu_1 h) = 4.38\%$),这很好地证明了其自由边缘效应的影响区域是局部的. 同时,由于非零本征值与 y 向的长度无关,而与板厚有关,因此影响区域仅在端部与板厚相当的区域,而与 y 向的长度无关.

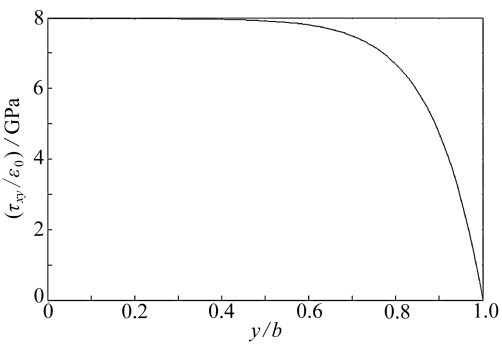

图 3 $x = 0$, $z = h/2$ 线上应力 τ_{xy} 的分布图

Fig. 3 Distribution of stress τ_{xy} on the line $x = 0$, $z = h/2$

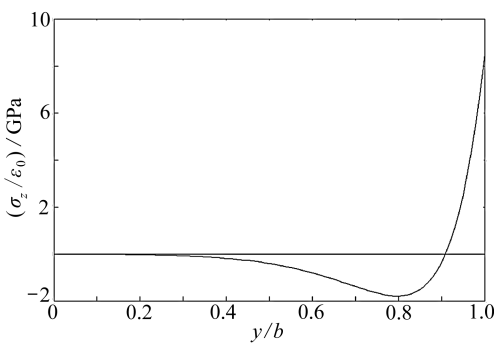

图 4 $x = 0$, $z = h/2$ 线上应力 σ_z 的分布图

Fig. 4 Distribution of stress σ_z on the line $x = 0$, $z = h/2$

6 结 束 语

应用辛对偶求解体系的方法论,本文给出了基于 Pipes-Pagano 模型层合板自由边缘效应问题的一个分析求解方法. 所提供的解严格满足问题的微分方程、边界条件以及层间的位移连续性条件和应力平衡条件. 本文的工作表明辛对偶体系的方法对边缘效应问题的分析求解也是十分有效的.

事实上本文所提出的方法对研究层合板的开孔如方孔、切口、空隙及结构与荷载的突变处和不连续处的层间应力的奇异性问题也有参考价值.

参考文献:

[1] Pipes R B, Pagano N J. Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension[J]. *J Comp Mater*, 1970, **4**(10): 538-548.

[2] Pipes R B, Pagano N J. Interlaminar stresses in composite Laminates—an approximate elasticity solution[J]. *J Appl Mech Trans ASME*, 1974, **41**(9): 668-672.

[3] Hsu P W, Herakovick C T. Edge effects in angle-ply composite laminates[J]. *J Comp Mater*, 1977, **11**(4): 422-438.

[4] Bar-Yoseph P, Pian T H H. Calculation of interlaminar stress concentration in composite laminates[J]. *J Comp Mater*, 1981, **15**(5): 225-239.

[5] Tang S. A boundary layer theory—part Ⅰ: laminated composites in plane stress[J]. *J Comp Mater*, 1975, **9**(1): 33-41.

[6] Wang S S, Choi I. Boundary-layer effects in composite laminates: part Ⅰ—free-edge stress singularities[J]. *J Appl Mech Trans ASME*, 1982, **49**(9): 541-548.

[7] Mittelstedt C, Becker W. Free-edge effects in composite laminates[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2007, **60**(5): 217-245.

[8] Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of Elasticity*[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1970.

[9] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995. (ZHONG Wan-xie. *A New Systematic Methodology for Theory of Elasticity*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995. (in Chinese))

[10] Zhong W X, Yao W A. The Saint Venant solutions of multi-layered composite plates[J]. *Advances in Strunctural Engineering*, 1997, **1**(2): 127-133.

[11] Yao W A, Yang H T. Hamiltonian system based Saint Venant solutions for multi-layered composite plane anisotropic plates[J]. *I J Solids &Structures*, 2001, **38**(32): 5807-5817.

[12] Yao W A, Zhong W X, Lim C W. *Symplectic Elasticity*[M]. Singapore: World Scientific, 2009.

Analytical Solutions to Edge Effect of Composite Laminates Based on Symplectic Dual System

YAO Wei-an[1], NIE Yi-zhu[1], XIAO Feng[2]

(1. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment*, *Dalian University of Technology*, *Dalian*, *Liaoning* 116024, *P. R. China*;
2. *Department of Computer Science*, *Dalian Medical University*, *Dalian*, *Liaoning* 116044, *P. R. China*)

Abstract: In symplectic space composed of the original variables—displacements and their dual variables—stresses, the symplectic solution for the composite laminated based on the Pipes-Pagano model was established. In contrast to traditional technique, the symplectic dual variables include displacement components as well as stress components, so the compatibility conditions of displacement and stress at interfaces can be formulated simultaneously. After introducing into the symplectic dual system, the uniform scheme, such as the separation of variables and symplectic eigenfunction expansion method, can be implemented conveniently to analyze problem of composite laminates. An analytical solution for free edge effect of composite laminates was gained, and it shows that the symplectic dual method is efficient for the analysis of composite laminates.

Key words: composite laminates; edge effect; Pipes-Pagano model; interlaminar stresses; symplectic dual system