

# 气体动力学燃烧模型的广义 Riemann 问题\*

刘玉锦<sup>1,2</sup>, 盛万成<sup>1</sup>

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444;

2. 山东理工大学 理学院, 山东 淄博 255049)

**摘要:** 考察了在  $(x, t)$  平面上原点  $(t > 0)$  的邻域内气体动力学燃烧模型的广义 Riemann 问题. 在改进的熵条件下构造了此问题的唯一解. 它们是自相似 ZND 燃烧模型的极限. 发现对某些情形, 广义 Riemann 问题的解与相应的 Riemann 问题的解有本质的不同. 特别地, 扰动会使得相应 Riemann 问题的强爆轰波转化为由预压激波点燃的弱爆轰波. 在一些情形, 尽管相应的 Riemann 解中不含燃烧波, 扰动后燃烧波会出现. 这反映了未燃气体的不稳定性.

**关键词:** 广义 Riemann 问题; 熵条件; 爆轰波; 爆燃波

**中图分类号:** O175.27; O175.29; O354.5 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.08.011

## 引言

研究化学反应气体燃烧现象有两种著名的数学模型: Chapman-Jouguet (CJ) 模型和 Zel'dovich-von Neumann-Döring (ZND) 模型<sup>[1-2]</sup>. 早在 1948 年, Courant 和 Friedrichs<sup>[1]</sup> 研究了 CJ 燃烧模型并得到它的部分解. 在 Lagrange 坐标下, 可燃理想气体的具有无穷大反应速率的一维绝热无粘流可描述如下:

$$\begin{cases} u_t + p_x = 0, \\ \tau_t - u_x = 0, \\ E_t + (up)_x = 0, \\ q(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{若 } \sup_{0 \leq y \leq t} T(x, y) > T_i, \\ q(x, 0), & \text{其它,} \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $u, p$  和  $\tau$  分别为速度、压力和比容. 对多方气体,  $E = u^2/2 + e + q$  为比总能,  $e$  为内能,  $q$  为束缚能. 温度  $T$  满足 Boyle-Gay-Lussac 定律:  $p\tau = RT$ ,  $T_i$  为燃点. 对多方气体, 我们知道  $E = u^2/2 + p\tau/(\gamma - 1) + q$ ,  $\gamma > 1$  且  $\gamma$  在反应过程中保持不变. 假设燃烧过程是放热的, 亦即对已燃气体而言当原子再化合组成新分子时所消耗的能量小于未燃气

\* 收稿日期: 2010-11-12; 修订日期: 2011-06-14

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(10971130); 上海市教委重点学科资助项目(J50101); 上海市教委创新基金重点资助项目(11ZZ84)

**作者简介:** 刘玉锦(1979—), 女, 山东淄博人, 博士生(E-mail: yjliu@shu.edu.cn);

盛万成(1963—), 男, 新疆人, 教授(联系人. Tel: +86-21-66132526; E-mail: mathwcheng@shu.edu.cn).

体的结合能<sup>[1]</sup>.

由于气体动力学中燃烧问题的难度,除了文献[3](解中只含爆轰波)、文献[4](解中只含爆燃波)和文献[5]的 Riemann 问题外鲜有其它结果.文献[5]研究了模型(1)的 Riemann 问题

$$(u, \tau, p, q)(x, 0) = (u^\pm, \tau^\pm, p^\pm, q^\pm), \quad \pm x > 0, \quad (2)$$

其中,  $u^\pm, \tau^\pm, p^\pm > 0$  为任意常数.

$$q^\pm = \begin{cases} 0, & \text{当 } T^\pm > T_i, \\ 0 \text{ 或 } q_0, & \text{当 } T^\pm \leq T_i, \end{cases}$$

其中  $q_0 > 0$  为常数.为保证解的唯一性,他们提出一组熵条件包括逐点熵条件和全局熵条件.在这组熵条件下,他们利用特征分析方法构造了唯一的 Riemann 解.

本文主要考虑 CJ 模型(1)的带有如下初值的广义 Riemann 问题

$$(u, \tau, p, q)(x, 0) = (u_0^\pm, \tau_0^\pm, p_0^\pm, q_0^\pm)(x), \quad \pm x > 0, \quad (3)$$

其中,  $q_0^\pm(x) = q^\pm$ ,  $u_0^\pm(x), \tau_0^\pm(x), p_0^\pm(x)$  为任意的光滑函数且满足

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} (u_0^\pm, \tau_0^\pm, p_0^\pm)(x) = (u^\pm, \tau^\pm, p^\pm).$$

问题(1)和(3)可看作相应的 Riemann 问题(1)和(2)的扰动.自然的,我们想知道扰动后的解与相应的 Riemann 问题的解有什么差别和相似性?

关于广义 Riemann 问题已有许多研究<sup>[6-15]</sup>,在文献[14]和文献[15]中,作者分别研究了单个凸的和非凸的 CJ 燃烧模型的广义 Riemann 问题

$$\begin{cases} (u + q)_t + f_x(u) = 0, \\ q(x, t) = \begin{cases} q(x, 0), & \sup_{0 \leq y \leq t} u(x, y) \leq u_i, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $u$  为综合量,可以表示密度、速度或温度等,  $u_i$  为燃点温度.在文献[16]的逐点和全局熵条件下,他们在  $(x, t)$  平面上原点  $(t > 0)$  小邻域内构造了扰动的 Riemann 问题的解.特别地,他们发现对凸的情形扰动会将 Chapman-Jouguet 爆轰波 (CJDT) 转变为强爆轰波 (SDT),对非凸情形扰动会将 SDT 转变为弱爆燃 (WDF) 伴随着一个激波,这一点出现在文献[17]中数值模拟的结果中.

根据文献[18]和文献[19]的结果,问题(1)和(2)的所有可能的 Riemann 解(至多 9 个)为自相似 ZND 模型的解当反应速率  $k$  趋于无穷大时的极限

$$\begin{cases} u_t + p_x = 0, \\ \tau_t - u_x = 0, \\ E_t + (up)_x = 0, \\ q(x, t) = -\frac{k}{t} \varphi(T)q, \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\varphi(T)$  为 Heaviside 函数:当  $T \leq T_i, \varphi(T) = 0$ ,当  $T > T_i, \varphi(T) = 1$ .但在文献[5]的熵条件下,我们挑不出包含爆轰波的解(情形 2.2).本文在修正的熵条件下构造 Riemann 问题(1)和(2)的唯一解.进而,根据 Riemann 问题的解的不同情形构造所有可能的广义 Riemann 问题(1)和(3)的解.在大多数情况下,相应 Riemann 解中的燃烧波在扰动后都能够保持原来的形式,但某些情况下,扰动使得燃烧波发生了本质性的改变.例如,在情形 2.2.2.2 中扰动会将燃烧波熄灭,在情形 2.3 中会将 Chapman-Jouguet 爆燃 (CJDF) 转变为 CJDT.特别的,在情形

2.1.1, 2.2.1 和 2.2.2.1 中,我们发现尽管相应的 Riemann 解中不含燃烧波,扰动后燃烧波会出现,这表明未燃气体是不稳定的.进一步,对于情形 2.2.2.2 我们观察到扰动会将爆轰波转变为由预压激波点燃的弱爆燃波.

本文安排如下:第 1 节在修正的熵条件下,构造问题(1)和(2)的唯一解;第 2 节中,根据相应的 Riemann 解的不同情形,构造广义 Riemann 问题(1)和(3)的唯一解.

### 1 Riemann 问题(1)和(2)的解

首先介绍一下系统(1)的基本波和本文的一些记号.对于系统(1),我们知道它有 3 个实的互异的特征根  $\lambda_- = -\sqrt{\gamma p/\tau}$ ,  $\lambda_0 = 0$  和  $\lambda_+ = \sqrt{\gamma p/\tau}$ ,所以(1)为严格双曲的系统.易知,特征域  $\lambda_{\pm}$  是真正非线性的, $\lambda_0$  是线性退化的.

根据 Jouguet 法则,在  $(\tau, p)$  平面内至多有 3 类不同的波可以连接到左状态  $(-) := (u^-, \tau^-, p^-, q^-)$ :

(i)  $S(-)$  或  $R(-)$  (不含燃烧波),

$$R(-): p\tau^\gamma = p_- \tau_-^\gamma, \quad p \leq p_-,$$

$$S(-): (p + \mu^2 p_-)(\tau - \mu^2 \tau_-) = (1 - \mu^4) p_- \tau_-, \quad p > p_-;$$

(ii)  $S(-) + (i_s) + WDF$  (或  $CJDF + R$ ) (不含  $DT$  波),

$$WDF(i_s): (p + \mu^2 p_{i_s})(\tau - \mu^2 \tau_{i_s}) = (1 - \mu^4) T_{i_s} + 2\mu^2 q_0, \quad p \leq p_{i_s};$$

(iii)  $SDT(-)$  (或  $CJDT(-) + R$ ) (不含  $DF$  波),

$$SDT(-): (p + \mu^2 p_-)(\tau - \mu^2 \tau_-) = (1 - \mu^4) p_- \tau_- + 2\mu^2 q_0, \quad p > p_k,$$

其中  $\mu^2 = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$  且  $i_s := (u_i, p_i, \tau_i, q_0)$  为  $S(-)$  上的满足燃点温度  $T_{i_s}$  的状态,  $p_k$  为  $CJDT(-)$  处的压强,符号“+”表示“跟着”.在  $(u, p)$  平面内,后向波曲线如下:

1) 当  $q^- = 0$

$$\bar{R}(-): u = u_- - \frac{\sqrt{1 - \mu^4}}{\mu^2} \tau_-^{1/2} p_-^{1/(2\gamma)} (p^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - p_-^{(\gamma-1)/(2\gamma)}) \quad (0 < p \leq p_-),$$

$$\bar{S}(-): u = u_- - (p - p_-) \sqrt{\frac{(1 - \mu^2)\tau_-}{p + \mu^2 p_-}} \quad (p > p_-),$$

我们记  $\bar{R}(-) \cup \bar{S}(-)$  为  $(\bar{W}_S(-), q^- = 0)$ .

2) 当  $q^- > 0$

$$\bar{S}(-): u_{i_s} = u_- - (p_{i_s} - p_-) \sqrt{\frac{(1 - \mu^2)\tau_-}{p_{i_s} + \mu^2 p_-}} \quad (p_- < p \leq p_{i_s}),$$

$$\bar{D}(-): -\frac{u - u_-}{p - p_-} = \sqrt{\frac{2[\tau_- - (\gamma - 1)q_- / (p - p_-)]}{(\gamma + 1)p + (\gamma - 1)p_-}} \quad (\text{燃烧波曲线}).$$

记能够连接到状态  $(-)$  的后向波曲线为  $\bar{W}(-)$ , 则

$$\bar{W}(-) := \bar{W}_S(-) \cup \bar{W}_D(-),$$

其中

$$\bar{W}_S(-) := (\bar{W}_S(-), q^- = 0) \text{ 或 } (\bar{W}_S(-), q = q^- > 0),$$

$$\bar{W}_D(-) := \bar{W}_{DF}(-) \cup \bar{W}_{DT}(-),$$

$$\vec{W}_{DF}(-) := \vec{WDF}(i_s) \cup (\vec{CJDF}(i_s) + \vec{R}),$$

$$\vec{W}_{DT}(-) := \vec{SDT}(-) \cup (\vec{CJDT}(-) + \vec{R}).$$

同理,我们可以构造出能够连接到状态(+)  
的前向波曲线  $\vec{W}(+)$  .

接下来,我们在下面的全局熵条件(GEC)下研究 CJ 模型的 Riemann 问题(1)和(2):

我们按照下面的顺序挑选出唯一的解(个数至多 9 个):

A) 解中燃烧波的传播速度尽可能的小;

B) 解中参数  $\beta$  尽可能的小, $\beta$  定义为  $T(\xi)$  在集合  $\{\xi \in R^1: T(\xi) \leq T_i\}$  与集合  $\{\xi \in R^1: T(\xi) > T_i\}$  之间的振荡次数;

C) 解中包含的燃烧解尽可能的多.

注 条件 A)源自文献[16]中对最简 CJ 燃烧模型构造的全局熵条件.

简便起见,我们仅考虑 Riemann 问题(1)和(2)的下面的两种情形.对于其它情形,可类似得到,参阅文献[5].

**情形 1.1**  $q^- > 0, q^+ = 0$  且  $\vec{W}(+)$  与  $\vec{W}_s(+)$  有 3 个交点.此时,  $\vec{W}(-) = \vec{W}_s(-) \cup \vec{W}_{DF}(-) \cup \vec{W}_{DT}(-)$ ,  $\vec{W}(+) = \vec{W}_s(+)$  (图 1).

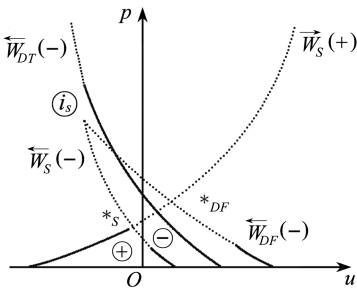


图 1  $q^- > 0, q^+ = 0$  且有 3 个交点  
Fig. 1  $q^- > 0, q^+ = 0$  and there are three interaction points

根据文献[5]中的引理 1 和引理 2,爆燃波的传播速度小于爆轰波的传播速度.由全局熵条件 A),  $\vec{W}_s(+)$  与  $\vec{W}_{DT}(-)$  的交点应该舍掉.记  $\vec{W}_s(+)$  与  $\vec{W}_s(-)$ ,  $\vec{W}_{DF}(-)$  的交点分别为  $*_s, *_{DF}$ .记在点  $*_s, *_{DF}$  沿着  $\vec{W}_s(+)$  的温度分别为  $T_s, T_{DF}$ .由于我们假设燃烧过程是放热的,因此在  $*_{DF}$  沿着  $\vec{W}_{DF}(-)$  的温度大于  $T_i$  (图 2).

a) 当  $T^+ > T_i, T_{DF} > T_i$ ,则  $\beta(*_s) = 1, \beta(*_{DF}) = 1$ ,由条件 C) 知,我们选取点  $*_{DF}$  而得到一个包含 DF 的燃烧波解(见图 2(a)).

b) 当  $T^+ > T_i, T_{DF} \leq T_i (\Rightarrow T_s \leq T_i)$ ,则  $\beta(*_s) = 1, \beta(*_{DF}) = 3$ ,由条件 B) 知,我们选取点  $*_s$  而得到一个非燃烧波解(见图 2(b)).

c) 当  $T^+ \leq T_i, T_s \leq T_i$ ,则  $\beta(*_s) = 0, \beta(*_{DF}) = 2$ ,由条件 B) 知,我们选取点  $*_s$  而得到一个非燃烧波解(见图 2(b)).

d) 当  $T^+ \leq T_i, T_s > T_i (\Rightarrow T_{DF} > T_i)$ ,则  $\beta(*_s) = 2, \beta(*_{DF}) = 2$ ,由条件 C) 知,我们选取点  $*_{DF}$  而得到一个包含 DF 的燃烧波解(见图 2(a)).

**情形 1.2**  $q^- > 0, q^+ = 0$  且  $\vec{W}(+)$  与  $\vec{W}_s(+)$  有 2 个交点.类似的,我们记  $\vec{W}_s(+)$  与  $\vec{W}_{DT}(-)$  的交点为  $*_{DT}$ ,在点  $*_{DT}$  沿着  $\vec{W}_s(+)$  的温度记为  $T_{DT}$  (图 3).

a) 当  $T^+ > T_i, T_{DT} > T_i$ ,则  $\beta(*_s) = 1, \beta(*_{DT}) = 1$ ,由条件 C) 知,我们选取点  $*_{DT}$  而得到一个包含 DT 的燃烧波解(见图 4(a)).

b) 当  $T^+ > T_i, T_{DT} \leq T_i (\Rightarrow T_s \leq T_i)$ ,则  $\beta(*_s) = 1, \beta(*_{DT}) = 3$ ,由条件 B) 知,我们选取点  $*_s$  而得到一个非燃烧波解(见图 4(b)).

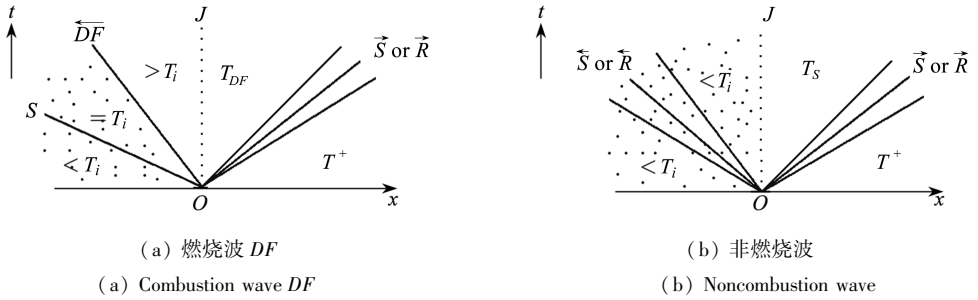


图 2 对应情形 1.1 的解

Fig. 2 Solutions in case 1.1

c) 当  $T^+ \leq T_i, T_S \leq T_i$ , 则  $\beta(*_s) = 0, \beta(*_{DT}) = 2$ , 由条件 B) 知, 我们选取点  $*_s$  而得到一个非燃烧波解 (见图 4(b)).

d) 当  $T^+ \leq T_i, T_S > T_i (\Rightarrow T_{DT} > T_i)$ , 则  $\beta(*_s) = 2, \beta(*_{DT}) = 2$ , 由条件 C) 知, 我们选取点  $*_{DT}$  而得到一个包含 DT 的燃烧波解 (见图 4(a)).

注 情形 1.2 中, 在文献[5]的全局熵条件下燃烧波解并没有出现, 但是根据文献[18]和文献[19]中的结论知道这个解是物理的.

**定理 1** 在全局熵条件(GEC)下, Riemann 问题(1)和(2)存在唯一的片光滑解.

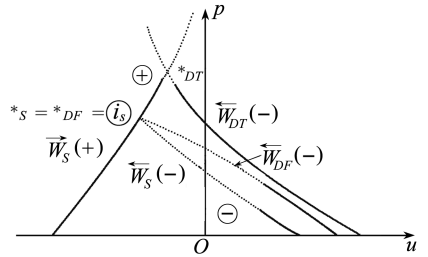


图 3  $q^- > 0, q^+ = 0$  且有 2 个交点

Fig. 3  $q^- > 0, q^+ = 0$  and there are two interaction points

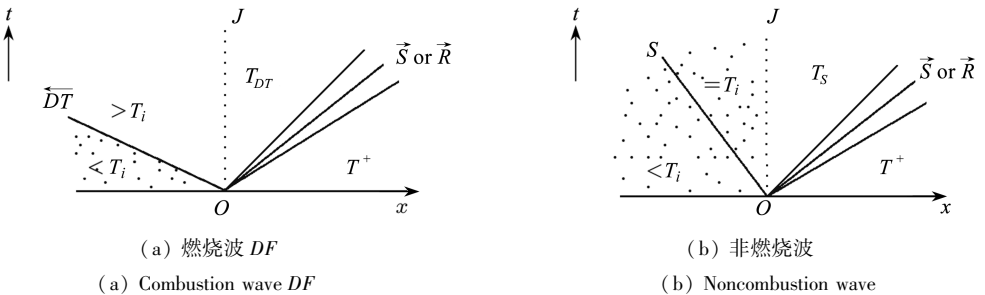


图 4 对应情形 1.2 的解

Fig. 4 Solutions in case 1.2

## 2 广义 Riemann 问题(1)和(3)的解

在  $(x, t)$  平面上原点  $(t > 0)$  的一个小邻域中讨论问题(1)和(3). 根据经典理论<sup>[6]</sup>, 我们可在某个带形区域  $D_l(D_r)$  中定义古典解  $(u_l, \tau_l, p_l, q_l)(x, t) ((u_r, \tau_r, p_r, q_r)(x, t))$ , 其中  $D_l(D_r)$  沿  $t$  方向是充分小的,  $D_l$  的右侧边界具有特征  $OA: x = \lambda_- t, D_r$  的左侧边界具有特征  $OB: x = \lambda_+ t$  (图 5). 我们只需在角域  $AOB$  中将扰动的解构造出来. 根据相应 Riemann 问题的不同解的情况对问题(1)和(3)进行分类讨论, 从而这两种解之间的异同性就可以得到.

**情形 2.1** 相应的 Riemann 解为非燃烧波解或包含爆燃波的燃烧解. 设  $q^- > 0, q^+ = 0$  且后向波线与前向波线有 3 个交点 (见图 1).

情形 2.1.1 相应的 Riemann 解为非燃烧波解 (见图 2(b)).

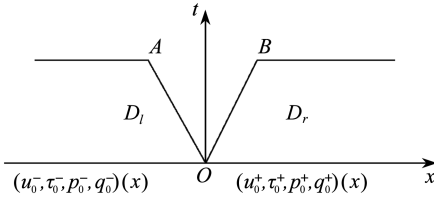


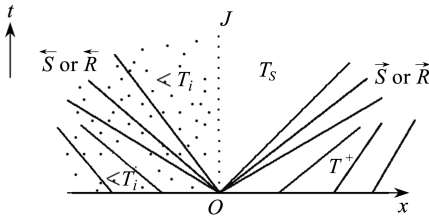
图 5 所讨论的区域

Fig. 5 The discussed region

1)  $T^+ > T_i, T_{DF} \leq T_i, T_S \leq T_i$ . 扰动后我们得到  $T^+ > T_i, T_{DF} \leq T_i$  或  $T_{DF} > T_i, T_S \leq T_i$  或  $T_S > T_i$ , 则扰动后的解为

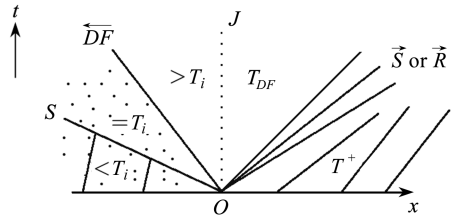
1a) 当  $T^+ > T_i, T_{DF} \leq T_i, T_S \leq T_i$ , 则  $\beta(*_S) = 1, \beta(*_{DF}) = 3$ , 由条件 B) 知, 我们选取点  $*_S$  而得到扰动后的解是一个非燃烧波解 (见图 6(a));

1b) 当  $T^+ > T_i, T_{DF} > T_i$ , 则  $\beta(*_S) = 1, \beta(*_{DF}) = 1$ , 由条件 C) 知, 我们选取点  $*_{DF}$  而得到扰动后的解



(a) 原点 ( $t > 0$ ) 小邻域内扰动的非燃烧解

(a) A perturbed noncombustion solution in the neighborhood of the origin ( $t > 0$ )



(b) 原点 ( $t > 0$ ) 小邻域内扰动的燃烧解

(b) A perturbed combustion solution in the neighborhood of the origin ( $t > 0$ )

图 6 对应情形 2.1.1 的解

Fig. 6 Solutions in subcase 2.1.1

是包含  $DF$  的一个燃烧解 (见图 6(b)).

2)  $T^+ \leq T_i, T_S \leq T_i$ . 扰动后我们得到  $T^+ \leq T_i$  或  $T^+ > T_i, T_S \leq T_i$  或  $T_S > T_i, T_{DF} \leq T_i$  或  $T_{DF} > T_i$ , 则扰动后的解为

2a) 当  $T^+ \leq T_i, T_S \leq T_i$ , 则  $\beta(*_S) = 0, \beta(*_{DF}) = 2$ , 由条件 B) 知, 我们选取点  $*_S$  而得到扰动后的解是一个非燃烧波解 (见图 6(a));

2b) 当  $T^+ \leq T_i, T_S > T_i$ , 则  $\beta(*_S) = 2, \beta(*_{DF}) = 2$ , 由条件 C) 知, 我们选取点  $*_{DF}$  而得到扰动后的解是包含  $DF$  的一个燃烧解 (见图 6(b));

2c) 当  $T^+ > T_i, T_{DF} \leq T_i$ , 则  $\beta(*_S) = 1, \beta(*_{DF}) = 3$ , 由条件 B) 知, 我们选取点  $*_S$  而得到扰动后的解是一个非燃烧波解 (见图 6(a));

2d) 当  $T^+ > T_i, T_{DF} > T_i$ , 则  $\beta(*_S) = 1, \beta(*_{DF}) = 1$ , 由条件 C) 知, 我们选取点  $*_{DF}$  而得到扰动后的解是包含  $DF$  的一个燃烧解 (见图 6(b)).

情形 2.1.2 相应的 Riemann 解为包含  $DF$  的燃烧解 (见图 2(a)).

1)  $T^+ > T_i, T_{DF} > T_i$ . 扰动后我们得到  $T^+ > T_i, T_{DF} > T_i, T_S > T_i$  或  $T_S \leq T_i$ , 则  $\beta(*_S) = 1, \beta(*_{DF}) = 1$ , 由条件 C) 知, 我们选取点  $*_{DF}$  而得到扰动后的解仍然是包含  $DF$  的一个燃烧解 (见图 7).

2)  $T^+ \leq T_i, T_{DF} > T_i, T_S > T_i$ . 扰动后我们得到  $T^+ > T_i$  或  $T^+ \leq T_i, T_{DF} > T_i, T_S > T_i$ , 则  $\beta(*_S) = 2, \beta(*_{DF}) = 2$ , 由条件 C) 知, 我们选取点  $*_{DF}$  而得到扰动后的解仍然是包含  $DF$  的一个燃烧解 (见图 7).

**定理 2** 尽管相应的 Riemann 问题的解中没有燃烧波, 扰动后燃烧波可能会出现, 这说明未燃气体是不稳定的. 同时, 我们观察到燃烧波解是稳定的.

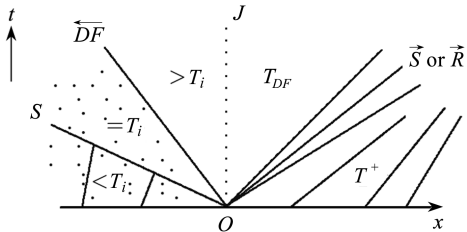
**情形 2.2** 相应的 Riemann 解为非燃烧波解或包含爆轰波的燃烧解 (见图 3). 设  $q^- > 0, q^+ = 0$  且前后向波线有 2 个交点.

情形 2.2.1 扰动后  $\vec{W}(-)$  与  $\vec{W}_s(+)$  只有 1 个交点, 则我们可得到唯一的扰动的解  $\vec{DT} + J + \vec{R}$  或  $\vec{S}$ .

情形 2.2.2 扰动后  $\vec{W}(-)$  与  $\vec{W}_s(+)$  有 3 个交点(图 1). 由熵条件 A) 知, 我们首先舍掉  $\vec{W}_{DT}(-)$  与  $\vec{W}_s(+)$  的交点.

情形 2.2.2.1 相应的 Riemann 解为对应于点  $*_s$  的非燃烧波解(图 4(b)).

1)  $T^+ > T_i, T_{DF} \leq T_i (\Rightarrow T_s \leq T_i)$ . 扰动后我们得到  $T^+ > T_i, T_s \leq T_i$  或  $T_s > T_i, T_{DF} \leq T_i$  或  $T_{DF} > T_i$ ,

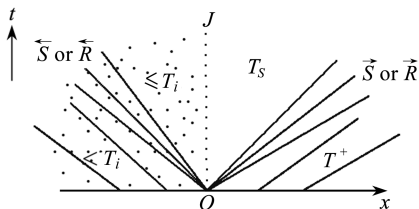


原点 ( $t > 0$ ) 小邻域内扰动的燃烧解

The perturbed combustion solution in the neighborhood of the origin ( $t > 0$ )

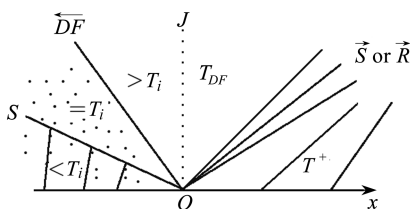
图 7 对应情形 2.1.2 的解

Fig. 7 Solutions in subcase 2.1.2



(a) 原点 ( $t > 0$ ) 小邻域内扰动的非燃烧解

(a) A perturbed noncombustion solution in the neighborhood of the origin ( $t > 0$ )

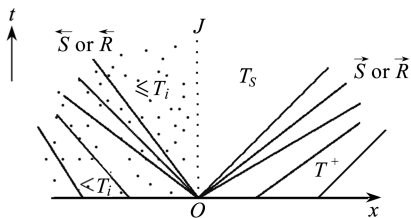


(b) 原点 ( $t > 0$ ) 小邻域内扰动的燃烧解

(b) A perturbed combustion solution in the neighborhood of the origin ( $t > 0$ )

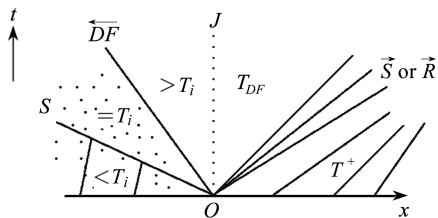
图 8 对应情形 2.2.2.1 的解

Fig. 8 Solutions in subcase 2.2.2.1



(a) 原点 ( $t > 0$ ) 小邻域内扰动的非燃烧解

(a) A perturbed noncombustion solution in the neighborhood of the origin ( $t > 0$ )



(b) 原点 ( $t > 0$ ) 小邻域内扰动的燃烧解

(b) A perturbed combustion solution in the neighborhood of the origin ( $t > 0$ )

图 9 对应情形 2.2.2.2 的解

Fig. 9 Solutions in subcase 2.2.2.2

则扰动后的解为

1a) 当  $T^+ > T_i, T_{DF} > T_i$ , 则  $\beta(*_s) = 1, \beta(*_{DF}) = 1$ , 由条件 C) 知, 我们选取点  $*_{DF}$  而得到扰动后的解是一个包含  $DF$  的燃烧解(图 8(b));

1b) 当  $T^+ > T_i, T_{DF} \leq T_i, T_s \leq T_i$ , 则  $\beta(*_s) = 1, \beta(*_{DF}) = 3$ , 由条件 B) 知, 我们选取点  $*_s$  而得到扰动后的解是一个非燃烧波解(图 8(a)).

2)  $T^+ \leq T_i, T_s \leq T_i$ . 扰动后我们得到  $T^+ > T_i$  或  $T^+ \leq T_i, T_s \leq T_i$  或  $T_s > T_i, T_{DF} \leq T_i$  或  $T_{DF} > T_i$ , 则扰动后的解为

2a) 当  $T^+ > T_i, T_{DF} > T_i$ , 则  $\beta(*_s) = 1, \beta(*_{DF}) = 1$ , 由条件 C) 知, 我们选取点  $*_{DF}$  而得到扰动后的解是一个包含  $DF$  的燃烧解(图 8(b));



2b) 当  $T^+ > T_i, T_{DF} \leq T_i, T_S \leq T_i$ , 则  $\beta(*_s) = 1, \beta(*_{DF}) = 3$ , 由条件 B) 知, 我们选取点  $*_s$  而得到扰动后的解是一个非燃烧波解(图 8(a));

2c) 当  $T^+ \leq T_i, T_S \leq T_i$ , 则  $\beta(*_s) = 0, \beta(*_{DF}) = 2$ , 由条件 B) 知, 我们选取点  $*_s$  而得到扰动后的解是一个非燃烧波解(图 8(a));

2d) 当  $T^+ \leq T_i, T_S > T_i, T_{DF} > T_i$ , 则  $\beta(*_s) = 2, \beta(*_{DF}) = 2$ , 由条件 C) 知, 我们选取点  $*_{DF}$  而得到扰动后的解是一个包含 DF 的燃烧解(图 8(b)).

情形 2.2.2.2 相应的 Riemann 解为对应于点  $*_{DT}$  的燃烧波解(图 4(a)).

1)  $T^+ > T_i, T_{DT} > T_i$ . 扰动后我们得到  $T^+ > T_i, T_S \leq T_i$  或  $T_S > T_i, T_{DF} \leq T_i$  或  $T_{DF} > T_i$ , 则扰动后的解为

1a) 当  $T^+ > T_i, T_{DF} > T_i$ , 则  $\beta(*_s) = 1, \beta(*_{DF}) = 1$ , 由条件 C) 知, 我们选取点  $*_{DF}$  而得到扰动后的解是一个包含 DF 的燃烧解(图 9(b));

1b) 当  $T^+ > T_i, T_{DF} \leq T_i, T_S \leq T_i$ , 则  $\beta(*_s) = 1, \beta(*_{DF}) = 3$ , 由条件 B) 知, 我们选取点  $*_s$  而得到扰动后的解是一个非燃烧波解(图 9(a)).

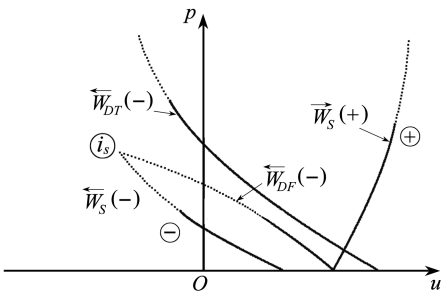


图 10  $q^- > 0, q^+ = 0$  且有 2 个交点  
Fig. 10  $q^- > 0, q^+ = 0$  and there are two intersection points

2)  $T^+ \leq T_i, T_S > T_i (\Rightarrow T_{DT} > T_i)$ . 扰动后我们得到  $T^+ > T_i, T^+ \leq T_i, T_S > T_i, T_{DF} > T_i$ , 则扰动后的解为

2a) 当  $T^+ > T_i, T_S > T_i, T_{DF} > T_i$ , 则  $\beta(*_s) = 1, \beta(*_{DF}) = 1$ , 由条件 C) 知, 我们选取点  $*_{DF}$  而得到扰动后的解是一个包含 DF 的燃烧解(图 9(b));

2b) 当  $T^+ \leq T_i, T_S > T_i, T_{DF} > T_i$ , 则  $\beta(*_s) = 2, \beta(*_{DF}) = 2$ , 由条件 C) 知, 我们选取点  $*_{DF}$  而得到扰动后的解是一个包含 DF 的燃烧解(图 9(b)).

**定理 3** 扰动后相应的 Riemann 问题的爆轰波解可能被熄灭, 也可能被转化为由预压激波点燃的

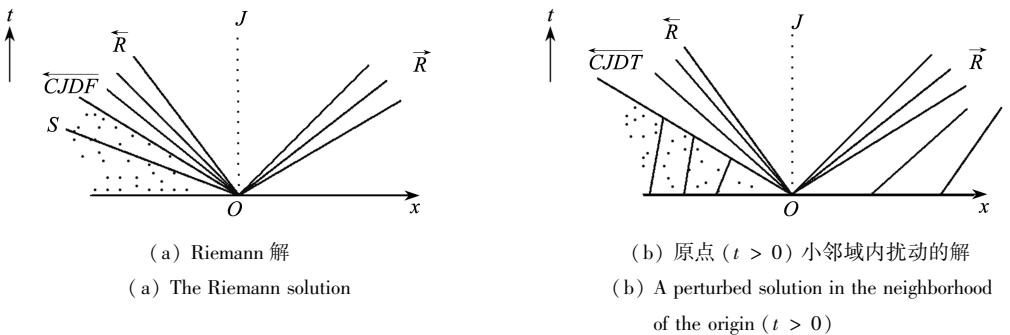


图 11 相应情形 2.3 的解  
Fig. 11 Solutions in case 2.3

弱爆燃波。此外, 扰动可能会将未燃气体点燃。

**情形 2.3** 相应的 Riemann 解为包含 CJDF 的燃烧波解。设  $q^- > 0, q^+ = 0$  且前向后向波线有两个交点(图 10)。由全局熵条件的条件 A), 相应 Riemann 问题的解  $\overleftarrow{CJDF}(i_s) + \bar{R} + J + \bar{R}$ (图 11(a))。

扰动后我们可以观察到, 一种情况是扰动的解为  $\overleftarrow{CJDT} + \bar{R} + J + \bar{R}$ (图 11(b)), 或者另一



种情况是,扰动后  $\bar{W}(-)$  与  $\bar{W}_s(+)$  有两个交点,根据全局熵条件的条件 A) 知,我们得到扰动的解为  $\overleftarrow{CJDF}(i_s) + \bar{R} + J + \bar{R}$ .

**定理 4** 扰动可能将 CJDF 转化为 CJDT,同时我们可以观察到燃烧波解是不稳定的。

### 3 结 论

对于大多数情形,相应的 Riemann 解是稳定的。但是对于某些情形,扰动会引起相应的 Riemann 解的本质变化。比如,扰动会将 CJDF 转变为 CJDT,扰动会将燃烧波熄灭。特别的,扰动会将一个强爆轰波变为一个由预压激波点燃的弱爆燃波。对某些情形,尽管相应的 Riemann 解中不含燃烧波,但是扰动后燃烧波会出现,这反映了未燃气体的不稳定性。

基于上述的分析,我们有下面的结论:

**定理 5** 在熵条件下,广义 Riemann 问题(1)和(3)存在唯一的局部解。

**致谢** 作者对与张同教授的有益讨论深表感谢;并且感谢上海大学研究生创新基金(A.16-0101-08-016)的资助。

#### 参考文献:

- [1] Courant R, Friedrichs K O. *Supersonic Flow and Shock Waves*[M]. New York: Interscience, 1948.
- [2] Williams F A. *Combustion Theory*[M]. Menlo Park: Benjamin Commings, 1985.
- [3] Chorin A J. Random choice methods with application to reacting gas flow[J]. *J Comp Phys*, 1977, **25**(3): 253-272.
- [4] Teng Z H, Chorin A J, Liu T P. Riemann problems for reacting gas with application to transition[J]. *SIAM J Appl Math*, 1982, **42**(5): 964-981.
- [5] Zhang T, Zheng Y X. Riemann problem for gasdynamic combustion[J]. *J Differential Equations*, 1989, **77**(2): 203-230.
- [6] Li T T, Yu W C. *Boundary Value Problem for Quasilinear Hyperbolic Systems*[M]. Duke University Mathematics Series V, 1985.
- [7] Bourgade A, Le Floch Ph, Raviart P A. Approximate solution of the generalized Riemann problem and application[C]//Carasso C, Raviart P A, Serre D. *Nonlinear Hyperbolic Problems Proceedings St. Etienne*. Lecture Notes in Mathematics 1270, Springer-Verlag, 1986: 1-9.
- [8] Le Floch Ph, Raviart P A. An asymptotic expansion for the solution of the generalized Riemann problem—part 1: general theory[J]. *Ann Inst H Poincaré, Nonlinear Analysis*, 1988, **5**(2): 179-207.
- [9] Ben-Artzi M. The generalized Riemann problem for reactive flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, **81**(1):70-101.
- [10] Bourgade A, Le Floch Ph, Raviart P A. An asymptotic expansion for the solution of the generalized Riemann problem—part 2: application to the equation of gas dynamics[J]. *Ann Inst H Poincaré, Nonlinear Analysis*, 1989, **6**(6): 437-480.
- [11] Chang T, Hsiao L. *The Riemann Problem and Interaction of Waves in Gas Dynamics*[M]. Pitman Monographs, No. **41**, Longman Scientific and Technical, Essex, 1989.
- [12] Li T T. *Global Classical Solutions for Quasilinear Hyperbolic System*[M]. New York: John

- Wiley and Sons, 1994.
- [13] Godlewski E, Raviart P-A. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*[M]. *Appl Math Science* **118**, New York: Springer, 1996.
- [14] Sheng W C, Sun M N, Zhang T. The generalized Riemann problem for a scalar nonconvex Chapman-Jouguet combustion model[J]. *SIAM J Appl Math*, 2007, **68**(2) : 544-561.
- [15] Sun M N, Sheng W C. The generalized Riemann problem for a scalar Chapman-Jouguet combustion model[J]. *Z Angew Math Phys*, 2009, **60**(2) : 271-283.
- [16] Sheng W C, Zhang T. Structural stability of solutions to the Riemann problem for a scalar nonconvex CJ combustion model[J]. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2009, **25**(2) : 651-667.
- [17] Bao W, Jin S. The random projection method for hyperbolic conservation laws with stiff reaction terms[J]. *J Comput Phys*, 2000, **163**(1) :216-248.
- [18] Tan D C, Zhang T. Riemann problem for the selfsimilar ZND-model in gas dynamical combustion[J]. *J Differential Equations*, 1992, **95**(2) : 331-369.
- [19] Hsu C H, Lin S S. Some qualitative properties of the Riemann problem in gas dynamical combustion[J]. *J Differential Equations*, 1997, **140**(1) : 10-43.

## Generalized Riemann Problem for Gas Dynamic Combustion

LIU Yu-jin<sup>1,2</sup>, SHENG Wan-cheng<sup>1</sup>

(1. *Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China;*

2. *School of Science, Shandong University of Technology,  
Zibo, Shandong 255049, P. R. China*)

**Abstract:** The generalized Riemann problem for gas dynamic combustion in a neighborhood of the origin ( $t > 0$ ) in the  $(x, t)$  plane was considered. Under the modified entropy conditions, the solutions were constructed uniquely, which were the limits of the selfsimilar ZND combustion model. It was found that, for some cases, there were intrinsic differences between the structures of the perturbed Riemann solutions and the corresponding Riemann solutions. Especially, a strong detonation in the corresponding Riemann solution may be transformed into a weak deflagration coalescing with pre-compression shock wave after perturbation. And in some cases, although there is no combustion wave of the corresponding Riemann solution, it may occur after perturbation, which shows the instability of unburnt gases.

**Key words:** generalized Riemann problem; entropy conditions; detonation wave; deflagration wave