

化学反应对流过半无限垂直多孔板的 粘性耗散非定常磁流体流动的影响*

J·A·饶¹, S·施崑阿赫²

(1. 奥斯曼尼阿大学 数学系,海得拉巴 500007,印度;

2. B. V. 拉朱技术学院 数学系,纳沙普尔,梅达克 502313,印度)

摘要: 分析了化学反应,对流过半无限垂直多孔板的、粘性耗散的、非定常的磁流体流动的影响。利用随时间变化的相似参数,将运动、能量、溶质的控制方程变换为常微分方程,并用有限单元法数值地求解所得到的常微分方程。用图形给出了不同参数对速度、温度和浓度分布的影响,用表格给出了不同物理参数值时,表面摩擦力、Nusselt 数和 Sherwood 数的数值。

关键词: 磁流体动力学(MHD); 化学反应; 多孔介质; 粘性耗散; 有限元

中图分类号: O357.3;O361.3 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.08.010

引 言

在很多工艺流程中,伴有化学反应的传热和传质的组合问题是一个重要问题,因此,近年来得到众多的关注。例如干燥、水体表面的蒸发、湿式冷却塔内能量的转换和沙漠冷却器中的流动等等,传热和传质同时出现。在很多产业中,都可以找到应用这类流动的可能。例如,在电力行业中,有一种生产电力的方法,就是电能直接来自于运动的导电流体。

有很多实际的扩散过程,包括溶质分子的扩散,在内部或者在边界上都存在化学反应。化学反应有两类。一类是均匀的化学反应,反应均匀地发生,整体呈现单相。在一个均匀的化学反应中,溶质的产生类似于内部的发热源。相反,非均匀化学反应,产生在一个指定的区域或内部区域,而边界呈另一相。因此,可以用边界条件来表达,类似于热交换中常热通量条件。伴有化学反应的传热/传质问题,对工程师和科学家来说,具有重大的实际意义,因为在许多科学和工程分支中几乎普遍存在。流体流过一个楔形体,是一种重要的基础流动,因为这类流动组成普遍又广泛的一类流动,在这类流动中,自由流的流速与从驻点开始测量的长度坐标的幂次成比例。

所有的化学工业过程都被设计成,将较便宜的原料转化为高附加值的产品(通常是通过化学反应)。发生化学转化的“反应塔”有着多种功能,例如,使反应物密实接触,提供一个适当的、时间充裕的环境(如温度场和浓度场),还要考虑到产品的移出等。流体动力学在反应塔部件和反应塔作业间建立联系起着关键的作用。由于溶质化学/催化剂,使得反应塔性能是下面

* 收稿日期: 2011-01-11; 修订日期: 2011-04-19

作者简介: S. Shivaiah, 副教授(联系人. E-mail: sreddy7@yahoo.co.in).

本文原文为英文,吴承平译,张禄坤校。

传输过程的一个复数函数。在任何化学反应的工程分析中,第一步是建立一个评估(和机理)描述的数学构架,在没有任何传输限制(化学动力学)时,将一种化学物质转换成另一种化学物质。一旦内在的动力学合适,原则上,生产的速度和产品的组成涉及到反应塔的面积、反应塔的结构,以及解决质量、动量和能量平衡的操作方式。这是化学反应和反应塔工程行为的中心任务。传输过程以及它们与化学反应之间相互作用的分析是相当困难的,它还与下面的流体动力学有着密切联系。这样一个化学和物理过程组合的综合分析,成了化学反应工程的核心问题。了解流动和计算流动模型(CMF)物理的最新进展,能够为化学工程作出巨大的贡献。

我们特别关注,在大致相同的速度下,出现扩散和化学反应的情况。当扩散速度远远超过化学反应速度时,只有化学因素影响化学反应的速率;当扩散速度远远低于化学反应速度时,由于扩散和化学反应动力学的相互作用,产生完全不同的影响。在运动的流体中,对热量的产生或吸收影响的研究非常重要,鉴于不同的物理问题,如研究流体在遭受放热或吸热的化学反应。由于电子技术的快速发展,需要确保电子器材的有效冷却,同时,电子器材的冷却范围,从单个晶体管到主体计算机,从能源供应设备到电话交换机,在混合气体(有分子量很轻的气体,例如氢和氦,又有分子量中等的气体)中,热量扩散效应被用来作同位素的分离^[1]。

Chambre 和 Young 在文献[2]中指出,在水平板附近存在一级化学反应。Dekha 等^[3]对具有恒定传热/传质的非定常流动,流过一个竖直板时,研究了一级均匀化学反应的影响。Muthucumaraswamy^[4]对一个具有均匀抽吸的、连续移动的垂直表面,考虑到一级均匀化学反应,研究其传热/传质的影响。Muthucumaraswamy 和 Meenakshisundaram^[5]理论研究了化学反应对有温度变化和质量扩散的垂直振动平板的影响。

磁流体动力学(MHD)流动的研究,多孔和非多孔介质中热传导的研究,激起了人们的研究兴趣,是由于磁场影响了对边界层流动的控制,许多系统是使用导电流体来执行的。Raptis 等^[6]分析了磁流体在两平行板间的多孔介质中的自由对流。Gribben^[7]在有压力梯度时,磁场排列成行的半无限平板上的边界层流动进行了研究。他利用匹配渐近展开法,得到了大/小磁 Prandtl 数时的解。Helmy^[8]对一个不可压缩导电(Newton 或极性)流体流经多孔介质,边界为恒温表面的无限垂直平面时,进行了非定常二维层状自由对流的研究。Gregantopoulos 等^[9]就不可压缩粘性耗导电流体,流经无限垂直多孔平板时,研究了二维非定常自由对流及其传质流动。对于一些工业应用,如玻璃生产和熔炉设计,以及空间技术应用,如空气动力学火箭的宇宙飞行、推进系统、等离子体物理、航天器重返的气热动力学,对高温操作、辐射影响有着重大意义。鉴于此,Hossain 和 Takhar^[10]在表面温度均匀的竖直板上,分析了混合对流的幅射效应。Kim 和 Fedorov^[11]在微极流体流过半无限垂直多孔平板时,分析了瞬态混合幅射对流的流动。Muthuraj 和 Srinivas^[12]利用 HAM,在一个垂直的多孔空间中,研究微极和粘性流体作充分发展的磁流体动力学流动。

热量的产生或吸收研究,从一些物理问题看来,是非常重要的,如流体遭受放热性的或吸热性的化学反应。热量的产生可能会影响温度分布的改变,因而,在核反应堆、电子芯片和半导体晶片中,改变了颗粒的沉积速率。Seddeek^[13]在存在放热和吸热时,流过平板的、传热/传质的、定常的磁流体流动,研究了化学反应、热泳和可变粘度对其的影响。Patil 和 Kulkarni^[14]在有内热产生的极性流体流过多孔介质时,研究化学反应对其自由对流的影响。Mohamed^[15]对非定常磁流体流动,流过一个带有发热和吸热效应的竖直运动多孔板时,研究双向扩散和对流-幅射的交互作用。Ramachandra Prasad 等^[16]在多孔介质中嵌入半无限垂直可渗透的运动平板时,研究幅射对非定常 MHD 对流传热/传质流动的影响。Satya Narayana 等^[17]在半无限垂直

多孔传质平板上,研究了 Hall 流动对磁流体动力学自由对流的影响. Sudheer Babu 和 Satya Narayana^[18]在有均匀磁场存在时,流过带可变吸入的多孔介质时,研究化学反应和辐射吸收对自由对流的影响.最近,Dulal 等^[19]对边界层滑移流过一个带热辐射和化学反应的、竖直可渗透的平板时,就非正常的磁流体动力学对流和传热/传质进行了摄动分析. Kim^[20]对一个有可变吸入功能的、半无限多孔竖直移动平板,进行了非正常 MHD 对流和传热流动的研究.新近, Kesavaiah 等^[21]在一个有热源和热吸入的多空介质中,嵌入一块半无限垂直可渗透运动平板时,研究化学反应和辐射吸收对非正常 MHD 对流和传热/传质流动的影响.

本文的目的是,在一个考虑粘性耗散的半无限垂直多孔平板上,研究化学反应对非正常 MHD 流动的影响.流场由连续性方程、动量方程、能量方程和扩散方程给出,使用有限单元法,求解该控制方程.对不同的控制参数,讨论速度、温度、浓度、表面摩擦、Nusselt 数和 Sherwood 数特性.

1 数学分析

不可压缩、导电、导光的耗散粘稠流体,通过一个竖直的多孔平板时,讨论流体作二维非定常的自由对流流动(图 1).设沿平板向上的方向为 x 轴,板的法线方向为 y 轴.垂直于平板方向作用着一个均匀的磁场.假设流体的导电性不是很强,因此,磁 Reynolds 数比单位一小得多,与外加磁场相比较,感应磁场可以忽略不计.假设流体中外来质量的贡献很小,因此, Soret 效应和 Dufour 效应可以忽略不计.再者,根据半无限平板表面的假设,流动变量仅是法向距离 y' 和时间 t' 的函数.现按通常的 Boussinesq 近似,本问题的控制边界层方程为

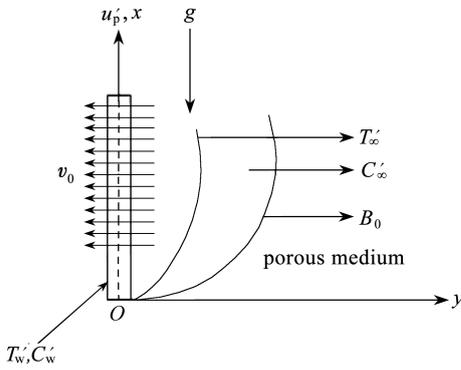


图 1 本问题的坐标系和物理模型

Fig. 1 Physical model and coordinate system of the problem

连续性方程

$$\frac{\partial v'}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

动量方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} = & \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + v' \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + g\beta(T' - T'_\infty) + g\beta^*(C' - C'_\infty) - \frac{\nu u'}{K'} - \frac{\sigma B_0^2 u'}{\rho}; \end{aligned} \quad (2)$$

能量方程

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v' \frac{\partial T'}{\partial y} = \frac{1}{\rho c_p} \left[k \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} - Q_0(T' - T'_\infty) \right] + \frac{\nu}{c_p} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2; \quad (3)$$

扩散方程

$$\frac{\partial C'}{\partial t} + v' \frac{\partial C'}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial y'^2} - K_r C'; \quad (4)$$

其中, u' , v' 分别为速度在 x' , y' 方向的分量, t' 为时间, ρ 为流体密度, p' 为压力, ν 为动粘度, σ 为流体导电率, c_s 为浓度的敏感性, c_p 为定压热容, g 为重力加速度, β 为热膨胀系数, β^* 浓度膨

胀系数, B_0 为外加磁场, Q_0 为热源, K' 为多孔介质渗透率, T' 为平板附近的流体温度, C' 为流体中溶质的浓度, k 为热传导率, μ 为流体粘度, D 为质量扩散, K_r' 为化学反应参数.

速度、温度和浓度场的边界条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} t' \leq 0: u' = 0, T' = T'_\infty, C' = C'_\infty, \\ \quad \text{对所有 } y', \\ t' > 0: u' = u'_p, T' = T'_\infty + \varepsilon(T'_w - T'_\infty)e^{n't'}, C' = C'_\infty + \varepsilon(C'_w - C'_\infty)e^{n't'}, \\ \quad \text{在 } y' = 0 \text{ 处,} \\ u' = U'_\infty = U_0 + \varepsilon(1 + \varepsilon e^{n't'}), T' \rightarrow T'_\infty, C' \rightarrow C'_\infty, \\ \quad \text{当 } y' \rightarrow \infty \text{ 时,} \end{array} \right. \quad (5)$$

其中, u'_p 为板的速度, T'_w 为壁面空间的温度, C'_w 为壁面空间的浓度, T'_∞ 为自由流温度, C'_∞ 为自由流浓度, U'_∞ 为自由流速度, U_0 和 n' 为常数.

由方程(1), 可以清楚地看出, 正交于板的抽吸速度, 要么为常数, 要么为时间的函数. 因此, 假设为如下形式:

$$v' = -V_0(1 + \varepsilon A e^{n't'}), \quad (6)$$

其中, A 为实正常数, $\varepsilon, \varepsilon A$ 为小于单位 1 的小量, V_0 为抽吸速度标量, 是一个非零的正常数. 在边界层外, 由方程(2)得

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{dU'_\infty}{dt} + \frac{\nu U'_\infty}{K} + \frac{\sigma B_0' U'_\infty}{\rho}. \quad (7)$$

为了得到无量纲形式的控制方程和边界条件, 引进如下形式的无量纲量:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{u'}{U_0}, v = \frac{v'}{V_0}, y = \frac{V_0 y'}{v}, U_p = \frac{u'_p}{U_0}, U_\infty = \frac{U'_\infty}{U_0}, n = \frac{n' \nu}{V_0^2}, \\ t = \frac{t' V_0^2}{v}, \theta = \frac{T' - T'_\infty}{T'_w - T'_\infty}, C = \frac{C' - C'_\infty}{C'_w - C'_\infty}, K = \frac{K' V_0^2}{\nu^2}, Pr = \frac{\nu \rho c_p}{k} = \frac{\nu}{a}, \\ Sc = \frac{v}{D}, M = \frac{\sigma B_0'^2 \nu}{\rho V_0^2}, Q = \frac{Q_0 \nu}{\rho c_p V_0^2}, Ec = \frac{U_0^2}{c_p (T'_w - T'_\infty)}, \\ Gr = \frac{\nu \beta g (T'_w - T'_\infty)}{U_0 V_0^2}, Gm = \frac{\nu \beta^* g (C'_w - C'_\infty)}{U_0 V_0^2}, K_r = \frac{K_r' \nu}{V_0^2}, \end{array} \right. \quad (8)$$

根据方程(5) ~ (8), 方程(2) ~ (4)可简化为如下无量纲形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (1 + \varepsilon A e^{nt}) \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dU_\infty}{dt} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Gr\theta + GmC + N(U_\infty - u), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - (1 + \varepsilon A e^{nt}) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - Q\theta + Ec \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (10)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} - (1 + \varepsilon A e^{nt}) \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - K_r C, \quad (11)$$

其中, $N = (M + 1/K)$, Gr 为热 Grashof 数, Gm 为溶质 Grashof 数, M 为磁场参数, K 为渗透参数, Pr 为 Prandtl 数, Q 为热源参数, Ec 为 Eckert 数, Sc 为 Schmidt 数和 K_r 为化学反应参数.

对应的边界条件为

$$\begin{cases} t \leq 0: u = 0, \theta = 0, C = 0, & \text{对所有 } y, \\ t > 0: u = U_p, \theta = 1 + \varepsilon e^{nt}, C = 1 + \varepsilon e^{nt}, & \text{在 } y = 0 \text{ 处,} \\ u \rightarrow U_\infty = 1 + \varepsilon e^{nt}, \theta \rightarrow 0, C \rightarrow 0, & \text{当 } y \rightarrow \infty \text{ 时.} \end{cases} \quad (12)$$

2 问题的解

在单元 e 上,对方程(9) ~ (11),应用 Galerkin 有限单元法,当 $y_j \leq y \leq y_k$ 时,变成

$$\int_{y_j}^{y_k} \mathbf{N}^{(e)\top} \left[\frac{\partial^2 u^{(e)}}{\partial y^2} + P \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} - \frac{\partial u^{(e)}}{\partial t} - Nu^{(e)} + R_1 \right] dy = 0, \quad (13)$$

$$\int_{y_j}^{y_k} \mathbf{N}^{(e)\top} \left[\frac{\partial^2 \theta^{(e)}}{\partial y^2} + PPr \frac{\partial \theta^{(e)}}{\partial y} - Pr \frac{\partial \theta^{(e)}}{\partial t} - QPr\theta^{(e)} + R_2 \right] dy = 0, \quad (14)$$

$$\int_{y_j}^{y_k} \mathbf{N}^{(e)\top} \left[\frac{\partial^2 C^{(e)}}{\partial y^2} + PSc \frac{\partial C^{(e)}}{\partial y} - Sc \frac{\partial C^{(e)}}{\partial t} - ScK_r C^{(e)} \right] dy = 0, \quad (15)$$

其中

$$P = 1 + A\varepsilon e^{nt}, R_1 = n\varepsilon e^{nt} + Gr\theta + GmC + NU_\infty,$$

$$N = \left(M + \frac{1}{K} \right), R_2 = PrEc \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

设分段线性近似解为

$$u^{(e)} = N_j(y)u_j(t) + N_k(y)u_k(t) = N_j u_j + N_k u_k,$$

$$\theta^{(e)} = N_j(y)\theta_j(t) + N_k(y)\theta_k(t) = N_j \theta_j + N_k \theta_k,$$

$$C^{(e)} = N_j(y)C_j(t) + N_k(y)C_k(t) = N_j C_j + N_k C_k,$$

其中

$$N_j = \frac{y_k - y}{y_k - y_j}, N_k = \frac{y - y_j}{y_k - y_j}, \mathbf{N}^{(e)\top} = [N_j \quad N_k]^\top = \begin{bmatrix} N_j \\ N_k \end{bmatrix}.$$

边界条件(12)下的方程(13) ~ (15),是一组高度非线性、高度耦合的微分方程,因而无法解析地求解.所以,根据文献[22]和文献[23],采用有限元法,可以得到该边值问题在所考虑条件下一个精确又有效的解.本方法的基本步骤如下组成:

第1步 将计算域离散化为单元

整个计算域划分为有限个的子域,称为计算域的离散化.把每个子域称为一个有限单元.按有限元网格搜集单元.

第2步 导出单元方程

导出有限元方程,即导出未知参数以有限元近似的代数方程,分如下3步:

- a) 构造微分方程的变分公式;
- b) 为典型的有限元设定渐近解形式;
- c) 将渐近解代入变分公式,导出有限元方程.

第3步 单元方程的集合

将这样得到的代数方程,利用相邻单元的连续性条件,将它们集合在一起,得到一个巨量的代数方程,组成控制着整个流域的总有限元模型.

第4步 代入边界条件

将方程(12)定义的物理边界条件代入集合后的方程组.

第5步 集合后方程组的求解

用直接法或间接(迭代)法求解最终的矩阵方程. 为方便计, y 坐标由 0 变化到 $y_{\max} = 10$, 其中 y_{\max} 表示无穷远, 即到达动量、能量和浓度边界层的外面. 整个区域被分割为宽度等于 0.05 的 100 个线性单元的集合, 每个单元有 3 个结点. 完成所有单元方程的集合后, 我们得到一个 201×201 阶矩阵. 由单元方程集合得到的方程组是非线性的, 因此采用迭代格式求解. 通过已知函数的合并, 对系统进行线性化. 应用给定边界条件后, 成为只有 195 个方程的方程组, 应用 Gauss 消去法求解该方程组. 这一过程重复地进行, 直到到达所需要的精度 0.000 5.

对这一类边界层流动, 表面摩擦、Nusselt 数、Sherwood 数是一组重要的物理参数.

平板上无量纲形式的表面摩擦力为

$$C_f = \frac{\tau_w'}{\rho U_0 V_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}; \quad (16)$$

无量纲形式的 Nusselt 数 (Nu) 表示的热传递系数比为

$$Nu = -x \frac{(\partial T'/\partial y')_{y'=0}}{T_w' - T_\infty'} \Rightarrow Nu Re_x^{-1} = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0}; \quad (17)$$

无量纲形式的 Sherwood 数 (Sh) 表示的传质系数比为

$$Sh = -x \frac{(\partial C'/\partial y')_{y'=0}}{C_w' - C_\infty'} \Rightarrow Sh Re_x^{-1} = - \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0}; \quad (18)$$

其中 $Re_x = V_0 x / \nu$ 为局部 Reynolds 数.

3 结果和讨论

完成前一节所给公式的计算, 当非定常的 MHD 流动, 流过一个带粘性耗散的半无限竖直多孔板时, 说明化学反应所起的作用. 利用有限单元法, 解析地求解流场的控制方程, 得到速

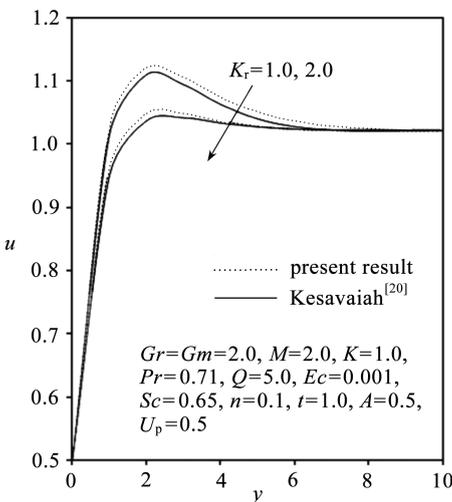


图2 不同 K_r 值时, 速度 u 分布的比较

Fig. 2 Comparison of velocity profiles for different values of K_r

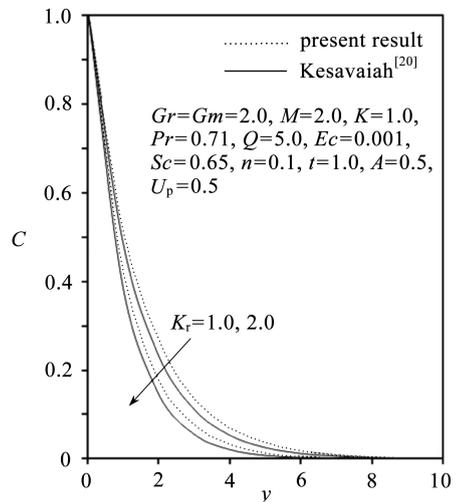


图3 不同 K_r 值时, 浓度 C 分布的比较

Fig. 3 Comparison of concentration profile for different values of K_r

度、温度、浓度、表面摩擦、Nusselt 数和 Sherwood 数. 为了知道该问题的物理意义, 对控制参数的不同值, 即热 Grashof 数 Gr 、溶质 Grashof 数 Gm 、磁性参数 M 、渗透系数 K 、Prandtl 数 Pr 、热源参数 Q 、Eckert 数 Ec 、Schmidt 数 Sc 、化学反应参数 K_r 和平板速度 U_p , 数值地计算上述物理量.

为了确定数值结果的准确性,将本文的结果与过去的研究结果进行了比较.图2和图3分别给出了速度分布和浓度分布,与 Kesavaiah 等^[21]的相应解的比较.由图可以看出,本文的结果与 Kesavaiah 等^[21]的结果吻合得很好.

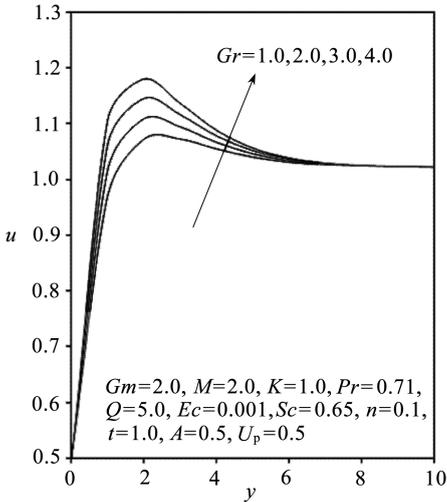


图4 Gr 数对速度 u 分布的影响

Fig. 4 Effect of Gr on velocity

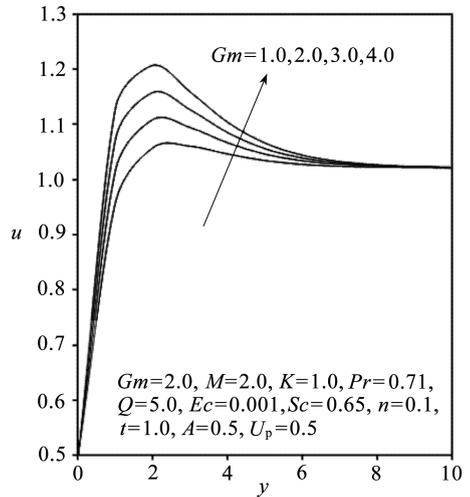


图5 Gm 数对速度 u 分布的影响

Fig. 5 Effect of Gm on velocity

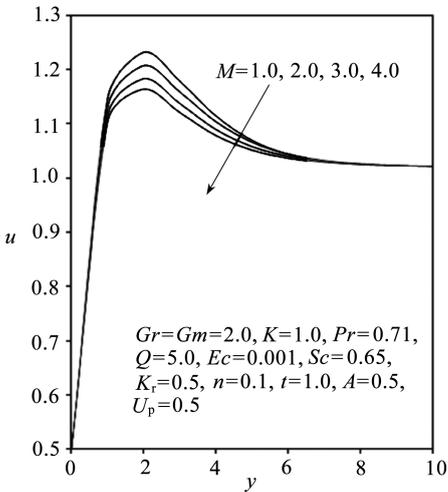


图6 M 对速度 u 分布的影响

Fig. 6 Effect of M on velocity

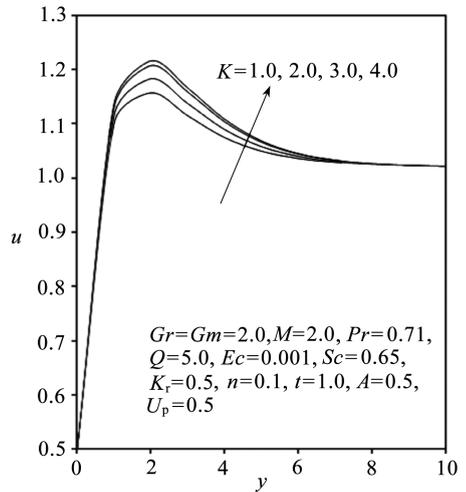


图7 K 对速度 u 分布的影响

Fig. 7 Effect of K on velocity

图4给出了不同的热 Grashof 数 Gr 时,边界层中的速度分布.如预期的那样,是由于浮力的增强, Gr 的增大导致速度的减小.因此 Gr 的正值,对应于冷却表面.此外,曲线还显示,当 Grashof 数增大时,多孔板壁面附近的速度峰值急剧减小,并衰减到自由流速度.图5在溶质 Grashof 数 Gm 取不同数值,所有其它参数保持相对固定值时,给出了边界层中典型的速度分布.在平板表面附近,速度分布状态达到一个醒目的最大值,然后,最终减小至自由流速度值.正如预期的,流体速度增大和峰值更醒目,是由于 Gm 的提高,象征着浓度浮力影响的增大.图5还显示, Gm 增大, u 值也增大.图6示出了磁场对边界层中速度分布的影响.由该图可以看出,对所有的磁场参数来说,速度开始从表面处的最小值,逐渐增大后达到峰值,然后开始减

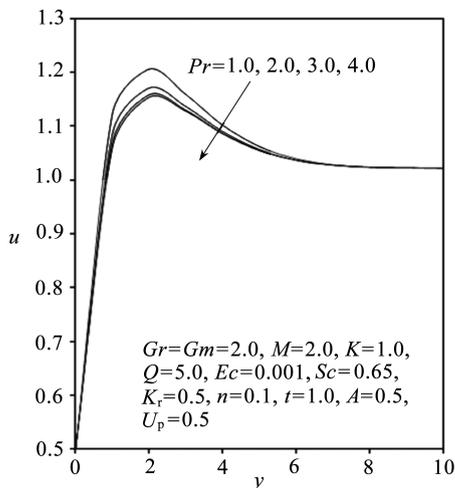


图 8(a) Pr 数对速度 u 分布的影响

Fig. 8(a) Effect of Pr on velocity

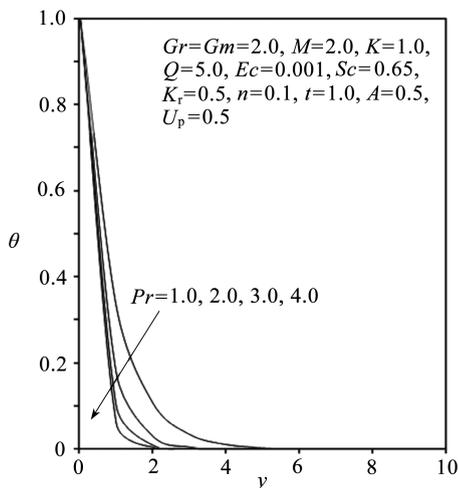


图 8(b) Pr 数对温度 θ 分布的影响

Fig. 8(b) Effect of Pr on temperature

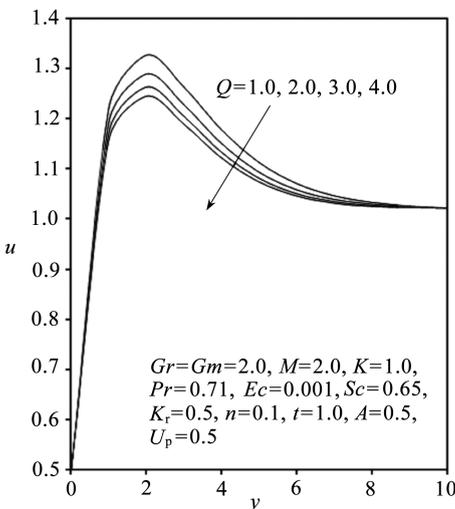


图 9(a) Q 对速度 u 分布的影响

Fig. 9(a) Effect of Q on velocity

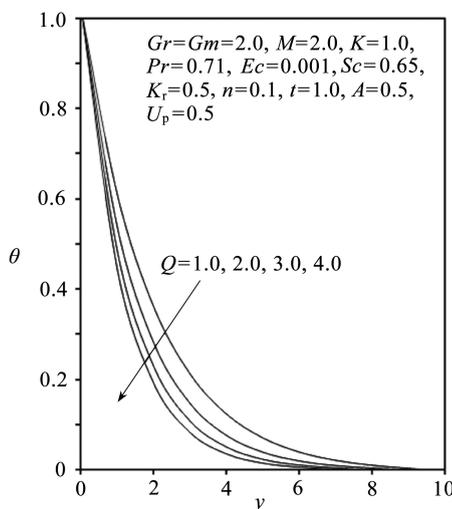


图 9(b) Q 对温度 θ 分布的影响

Fig. 9(b) Effect of Q on temperature

小,直到边界层的外边缘达到最小值.令人感兴趣的是,磁场效应导致速度分布的减小,遍及了整个边界层.在峰值点上磁场效应更为突出,即峰值随着磁场值的增大而大幅下挫,由于磁场的存在,在导电流体中会产生一种 Lorentz 力,如果磁场作用在法线方向,Lorentz 力作用在流动相反的方向.这种类型的抵抗力,使流体速度降下来,图 6 表明了这个现象.

图 7 给出了渗透参数 K 不同数值时的速度分布,显然,随着 K 的增大,速度峰值往往也增大.

图 8(a)和图 8(b)示出了不同 Prandtl 数 (Pr) 时,速度和温度的分布.图 8(a)表明,随着 Prandtl 数的增大,引起速度的增大.图 8(b)表明,随着 Prandtl 数的增大,引起热边界层减小,一般而言,边界层内的平均温度要低些.原因是,较小的 Pr 值,相当于提高了流体的热传导,与高 Pr 值相比,热量能够从受热面向更远处扩散.因此,在 Prandtl 数较小时,热边界层较厚,因而热传导率下降.

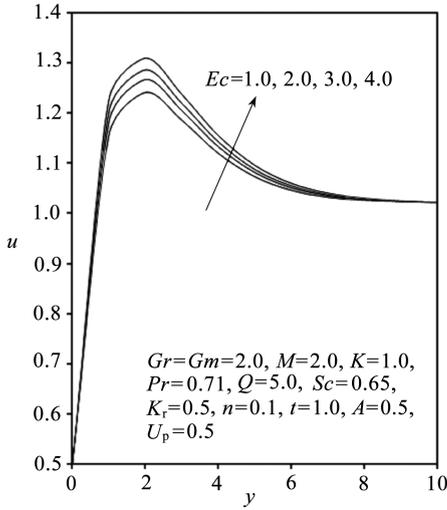
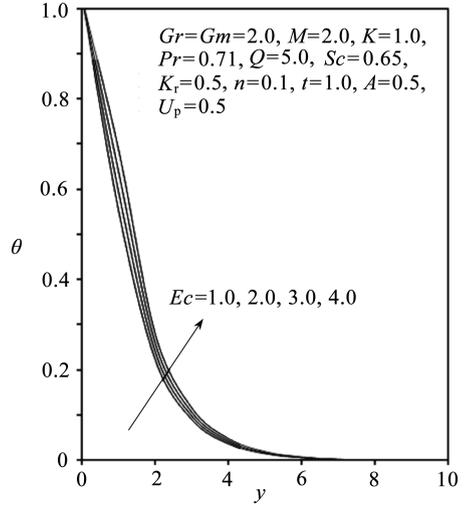
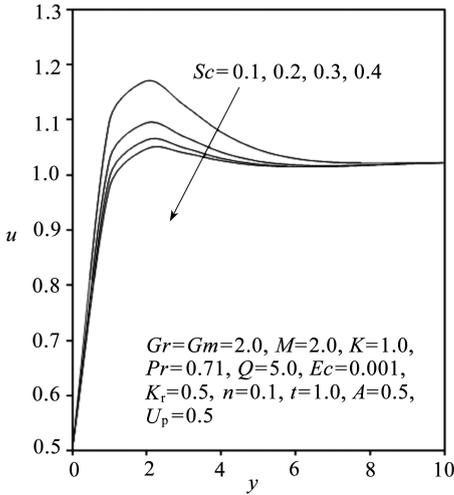
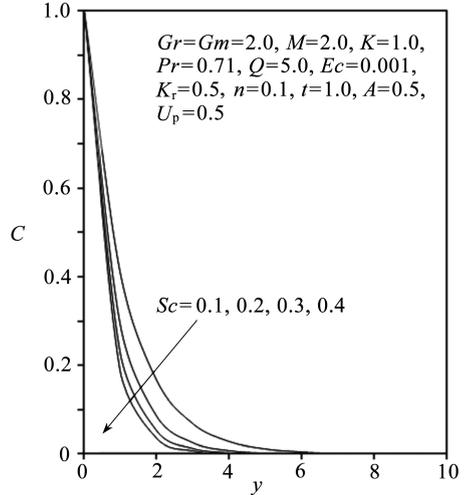
图 10(a) Ec 对速度 u 分布的影响Fig. 10(a) Effect of Ec on velocity图 10(b) Ec 对温度 θ 分布的影响Fig. 10(b) Effect of Ec on temperature图 11(a) Sc 对速度 u 分布的影响Fig. 11(a) Effect of Sc on velocity图 11(b) Sc 对浓度 C 分布的影响Fig. 11(b) Effect of Sc on concentration

图 9(a) 显示,热源参数 Q 值的增大,会使边界层减小,这是由于热的吸收,造成浮力的减小,又阻碍了流速,反过来出现速度分布的减小.当其他物理参数不变,热源参数 Q 取不同数值时,图 9(b) 绘出了不同温度分布随 y 的变化.图形显示,温度 $\theta(y)$ 随着热源参数 Q 的增大而减小,因为热量被吸收后,浮力降低了温度的分布.

图 10(a) 和图 10(b) 示出了粘性耗散参数的影响,即 Eckert 数 Ec 对速度和温度的影响.粘性耗散引起速度的增大和温度的上升.

图 11(a) 和图 11(b) 分别给出了 Schmidt 数 Sc , 对速度和浓度分布的影响.当 Schmidt 数增大时,浓度在减小.这是由于浓度的浮力效应的减小,降低了流体的速度.浓度和速度分布的下降,伴随着速度和浓度边界层的同时减少.这些性质清楚地显示在图 11(a) 和图 11(b) 中.图 12(a) 和图 12(b) 分别给出了化学反应参数 K_r 对速度和浓度分布的影响.正如所料,化学反应对浓度和速度的影响是显著的.值得一提的是化学反应参数 K_r 的不利影响.事实上,当 K_r 增

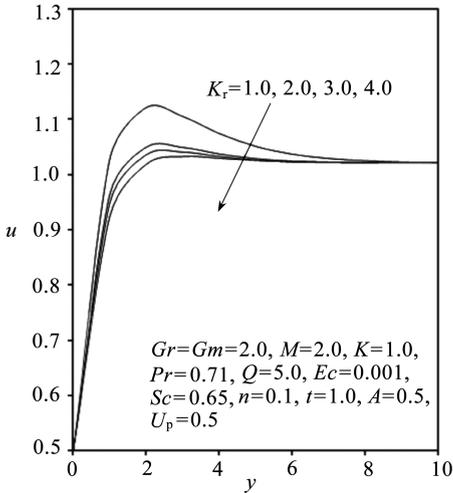


图 12(a) K_r 对速度 u 分布的影响

Fig. 12(a) Effect of K_r on velocity

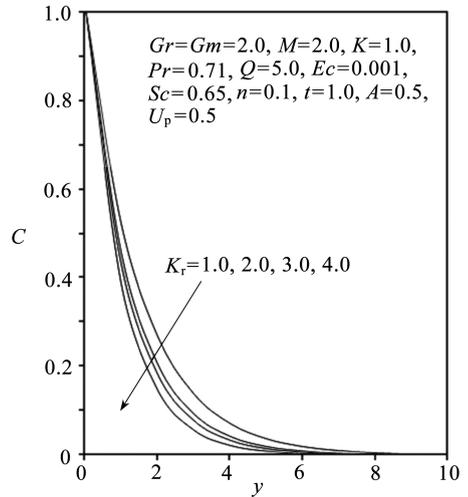


图 12(b) K_r 对浓度 C 分布的影响

Fig. 12(b) Effect of K_r on concentration

大时,预期速度分布显著减小,最大的峰值出现在靠近壁面的流体中,而并不出现在壁面上。同时,随着化学反应参数的增大,浓度值在下降。很显然,随着化学反应参数 K_r 的增大,大大地改变了浓度边界层的厚度,但对动量边界层没有影响。图 13 出示了平板沿着流动方向以多个速度 U_p 移动时,横过边界层速度分布的变化。虽然板以不同的初始速度移动,速度下降到给定材料参数时的速度常数。

表 1 ~ 表 3 列出了,各控制参数对表面摩擦因数 C_f 、Nusselt 数 Nu 、Sherwood 数 Sh 的影响。由表 1 可以看出,随着 Gr 或 Gm 数的增大,表面摩擦因数也增大。显然,当 M 或 K 增大时,表面摩擦因数在减小。由表 2 可看出,辐射参数或 Prandtl 数增大时,表面摩擦因数减小,Nusselt 数在增大。还发现,当 Eckert 数增大时,表面摩擦因数在增大,Nusselt 数在减小。由表 3 可以看出,当 Sc 或 K_r 增大时,表面摩擦因数在减小,Sherwood 数在增大。

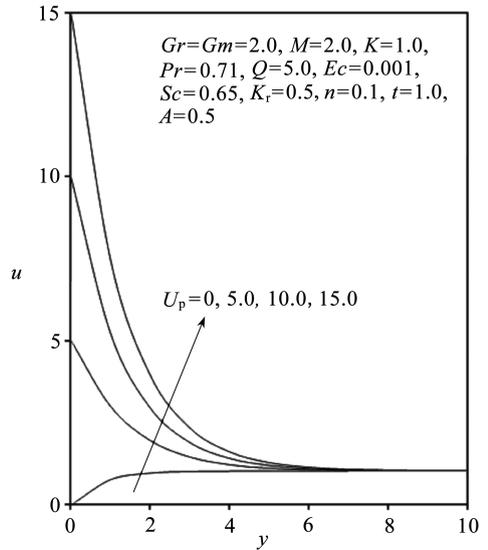


图 13 U_p 对速度 u 分布的影响

Fig. 13 Effect of U_p on velocity

表 1 Gr, Gm, M 和 K 对 C_f 的影响

Table 1 Effect of Gr, Gm, M, K on C_f

($Q = 5.0, Pr = 0.71, Ec = 0.001, Sc = 0.65, K_r = 0.5$)

Gr	Gm	M	K	C_f
2.0	2.0	1.0	0.5	2.144 1
4.0	2.0	1.0	0.5	3.575 9
2.0	4.0	1.0	0.5	3.168 5
2.0	2.0	2.0	0.5	1.564 6
2.0	2.0	1.0	1.0	2.005 2

表2 Q, Pr 和 Ec 对 C_f 和 $Nu Re_x^{-1}$ 的影响Table 2 Effect of Q, Pr and Ec on C_f and $Nu Re_x^{-1}$ $(Gr = 2.0, Gm = 2.0, M = 2.0, K = 1.0, Sc = 0.65, K_r = 0.5)$

Q	Pr	Ec	C_f	$Nu Re_x^{-1}$
5.0	0.71	0.001	4.244 1	0.245 6
10.0	0.71	0.001	4.161 0	0.315 4
5.0	7.00	0.001	3.343 4	1.634 1
5.0	0.71	0.1	4.267 0	0.168 8

表3 Sc 对 K_r 对 C_f 和 $Sh Re_x^{-1}$ 的影响Table 3 Effect of Sc and K_r on C_f and $Sh Re_x^{-1}$ $(Gr = 2.0, Gm = 2.0, M = 2.0, K = 1.0, Q = 5.0, Pr = 0.71, Ec = 0.001)$

Sc	K_r	C_f	$Sh Re_x^{-1}$
0.22	0.5	3.463 8	0.336 6
0.60	0.5	3.144 1	0.680 0
0.22	1.0	3.308 9	0.496 0

4 结 论

本文给出的控制方程,研究化学反应对流过半无限垂直多孔板的、带粘性耗散的、磁流体非稳定流动的影响.应用高效的有限单元法,数值地求解了所导出的方程.用图形给出了速度、温度、浓度、表面摩擦、Nusselt 数和 Sherwood 数的流动特征.我们发现,当热和溶质的 Grashof 数增大时,浓度浮力效应增强,从而流体的速度提高.流速和浓度随着化学反应参数的增大而减小.当 Schmidt 数增大时,浓度水平使流体速度减小. Prandtl 数增大时,表面摩擦减小, Nusselt 数增大. Eckert 数增大时,表面摩擦增大, Nusselt 数减小. Schmidt 数或化学反应参数增大时,表面摩擦因数减小, Sherwood 数增大.

参考文献:

- [1] Levenspiel O. *Chemical Reaction Engineering*[M]. 3rd ed. New York: Wiley, 1999.
- [2] Chambre P L, Young J D. On the diffusion of a chemically reactive species in a laminar boundary layer flow[J]. *The Physics of Fluids*, 1958, 1(1): 48-54.
- [3] Dekha U N Das R, Soundalgekar V M. Effects on mass transfer on flow past an impulsively started infinite vertical plate with constant heat flux and chemical reaction[J]. *Forschung im Ingenieurwesen*, 1994, 60(2): 284-309.
- [4] Muthucumaraswamy R. Effects of a chemical reaction on a moving isothermal vertical surface with suction[J]. *Acta Mechanica*, 2002, 155(1/2): 65-72.
- [5] Muthucumaraswamy R, Meenakshisundaram S. Theoretical study of chemical reaction effects on vertical oscillating plate with variable temperature[J]. *Theoretical Applied Mechanics*, 2006, 33(3): 245-257.
- [6] Raptis A, Massalas A, Tzivanidis G. Hydromagnetic free convection flow through a porous medium between two parallel plates[J]. *Physics Letter A*, 1982, 90(6): 288-289.
- [7] Gribben R J. The magnetohydrodynamic boundary layer in the presence of a pressure gradient [J]. *Proceeding of the Royal Society of London*, 1965, 287(1408): 123-141.
- [8] Helmy K A. MHD unsteady free convection flow past a vertical porous plate[J]. *ZAMM*,

- 1998, **78**(4) : 255-270.
- [9] Gregantopoulos G A, Koullias J, Goudas C L, Courogenis C. Free convection and mass transfer effects on the hydromagnetic oscillatory flow past an infinite vertical porous plate[J]. *Astrophysics and Space Science*, 1981, **74**(2) : 357-389.
- [10] Hossain M A, Takhar H S. Radiation effect on mixed convection along a vertical plate with uniform surface temperature[J]. *Heat Mass Transfer*, 1996, **31**(4) : 243-248.
- [11] Kim Y J, Fedorov A G. Transient mixed radiative convection flow of a micro polar fluid past a moving semi-infinite vertical porous plate[J]. *International Journal Heat Mass Transfer*, 2003, **46**(10) : 1751-1758.
- [12] Muthuraj R, Srinivas S. Fully developed MHD flow of a micropolar and viscous fluid in a vertical porous space using HAM[J]. *International Journal Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **6**(11) : 79-97.
- [13] Seddek M A. Finite-element method for the effects of chemical reaction, variable viscosity, thermophoresis and heat generation/absorption on a boundary-layer hydro magnetic flow with heat and mass transfer over a heat surface[J]. *Acta Mechanica*, 2005, **177**(14) : 1-18.
- [14] Patil P M, Kulkarni P S. Effects of chemical reaction on free convective flow of a polar fluid through a porous medium in the presence of internal heat generation[J]. *International Journal Thermal Science*, 2008, **48**(4) : 1043-1054.
- [15] Mohamad R A. Double diffusive convection-radiation interaction on unsteady MHD flow over a vertical moving porous plate with heat generation and Soret effects[J]. *Applied Mathematical Sciences*, 2009, **13**(13) : 629-651.
- [16] Prasad V R, Reddy N B. Radiation effects on an unsteady MHD convective heat and mass transfer flow past a semi-infinite vertical permeable moving plate embedded in a porous medium[J]. *Journals of Energy Heat and Mass Transfer*, 2008, **30** : 57-68.
- [17] Satya Narayana P V, Venkataramana S. Hall current effect on magnetohydro dynamics free-convection flow past a semi-infinite vertical porous plate with mass transfer[D]. PhD Thesis. SV University, 2007.
- [18] Sudheer Babu M, Satya Narayana P V. Effects of the chemical reaction and radiation absorption on free convection flow through porous medium with variable suction in the presence of uniform magnetic field[J]. *JP Journal of Heat and Mass Transfer*, 2009, **3** : 219-234.
- [19] Pal D, Talukdar B. Perturbation analysis of unsteady magneto hydro dynamic convective heat and mass transfer in a boundary layer slip flow past a vertical permeable plate with thermal radiation and chemical reaction[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, **15**(7) : 1813-1830.
- [20] Kim Y J. Unsteady MHD convective heat transfer past a semi-infinite vertical porous moving plate with variable suction[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2000, **38**(8) : 833-845.
- [21] Kesavaiah D Ch, Satyanarayana P V, Venkataramana S. Effects of the chemical reaction and radiation absorption on an unsteady MHD convective heat and mass transfer flow past a semi-infinite vertical permeable moving plate embedded in a porous medium with heat source and suction[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, **7**(1) : 52-69.
- [22] Reddy J N. *An Introduction to the Finite Element Method*[M]. New York: McGraw-Hill, 1985.

[23] Bathe K J. *Finite Element Procedures*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

Chemical Reaction Effects on an Unsteady MHD Flow Past a Semi-Infinite Vertical Porous Plate With Viscous Dissipation

J. A. Rao¹, S. Shivaiah²

(1. *Department of Mathematics, Osmania University, Hyderabad-500007, India;*

2. *Department of Mathematics, BVRIT, Narsapur, Medak-502313, India*)

Abstract: A chemical reaction effect on an unsteady magnetohydrodynamic flow past a semi-infinite vertical porous plate with viscous dissipation was analyzed. The governing equations of motion, energy and species were transformed into ordinary differential equations using time dependent similarity parameter. The resultant ordinary differential equations were then solved numerically by a finite element method. The effects of the various parameters on the velocity, temperature and concentration profiles were presented graphically and values of skin-friction, Nusselt number and Sherwood number for various values of physical parameters were presented through tables.

Key words: MHD; chemical reaction; porous medium; viscous dissipation; finite element method