

功能梯度压电圆柱体的旋转分析 及其应用——内压和热荷载 作用下的力学传感器*

G·H·拉希米, M·阿勒菲, M·J·科霍斯勾弗塔

(塔比特莫达勒斯大学 机械工程系,德黑兰 14115-143,伊朗)

摘要: 对旋转的功能梯度压电(FGP)圆柱体,进行了精确的热弹性分析.圆柱体同时承受电、热和力学荷载的作用,这是一个旋转传感器或者调节器的简化模型.应用能量法得到系统的控制微分方程.为了正确地评估能量函数,引进了一个被称为“附加能量”的新项.在两种边界条件下:自由旋转的圆柱体和受内压作用的圆柱体,求解所得到的控制方程.研究角速度对各个物理量沿半径分布的影响.所研究的结构也可以认为是,在压力及热荷载作用下,测量圆柱体角速度的一个传感器.结果表明,电势与角速度成正比例关系.

关键词: 功能梯度压电材料; 传感器; 旋转圆柱体; 角速度; 压力; 温度

中图分类号: O442 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.08.004

符号说明

C	弹性刚度	u	位移
D	电位移	W_{body}	体力能
e	压电系数	Q_T	附加能量
k	热传导系数	J	Jacobi 行列式
p	热电系数	α	热膨胀系数
P_i	内压力	ϕ	电势
r	半径	η	介电系数
E_r	电场强度	σ	应力
T	温度	ε	应变

引言

本文在两种不同的边界条件下,论述了旋转的功能梯度压电(FGP)圆柱体的热弹性分析.

* 收稿日期: 2010-10-27; 修订日期: 2011-05-09

作者简介: G. H. Rahimi(联系人. Tel/Fax: +98-2182883356; E-mail: rahimi_gh@modares.ac.ir)

本文原文为英文,黄锋译,张禄坤校.

随着材料生产技术的发展,新型材料不断地涌现出来。通常称这种新型材料为功能梯度材料(FGMs),它们由两种材料,例如金属和陶瓷混合而成。压电材料是另一类新型材料,于1880年,由 Pierre 和 Jacques Curie 发现。压电材料在外部应力作用下会产生电势,相反地,在电势作用时会发生变形。这种性质可以用于机电系统的传感器或调节器。随着功能梯度压电材料(FGPMs)的应用,可以相当精确地控制力学及电学分量的分布。本文就旋转的功能梯度压电圆柱体,作为机电系统中的传感器或调节器,对其分析和应用进行研究。

众所周知,测量旋转设备的角速度,如像发电机或其它类似的机器,是一件十分必要的事情。在机电系统中,收集角速度的反馈信息,并将它发送至数据处理器,对系统的控制和系统的设计十分重要。转速计一类测量系统,可以用来测量角速度。光电转速计是转速计的一种,它包含一块具有反射功能的平板。光探测器接收了光束的反射信息,并发送至平板。光学传感器是另一类型的测量器具,该装置包含一个光源和一个光探测器,它们之间的光束,被连接/不连接在一个旋转的圆柱体或圆盘上。本文所建议的传感器结构,是一个 FGP 的空心圆柱体,它与旋转装置的转轴相连接,两个电极被相连在空心圆柱体的内外表面上。

Liu 等^[1]所提出的压电体自由振动分析模型,是基于 Mindlin 平板理论的一对中等厚度的圆平板。电势沿厚度方向的分布,用一个正弦函数来模拟。应用 ABAQUS 软件进行了有限元数值分析,采用剪切变形理论建立位移场。考虑了3个平衡方程和 Maxwell 方程,得到了4个微分方程,求解4个未知量(1个位移场,2个旋转场以及1个电势场)。

Hou 等^[2]对磁-压电空心圆柱体动力学进行了分析研究,他们所分析的圆柱体,包含了全部应力分量的一般形式,提出了一个简单又正确的工具,预测、证明和研究力学和电磁场耦合时复杂的动力学特性。

Kollias 和 Avaritsiotis^[3]提出了特征函数展开的方法,得到了弯曲模式压电加速系统频率响应的解析表达式,并将应用近似关系得到的结果,用实验响应加以检验。

Dai 等^[4]就压电纤维增强叠层复合材料,在热冲击荷载作用下,提出了应力波传播的解析解,应用有限的 Hankel 转换和 Laplace 转换,求解各分离材料层的热电动力学方程。

Pietrzakowski^[5]研究了活动矩形板的自由振动,平板由压电传感器/激励器层复合而成,通过速度反馈的控制,实现横向振动的抑制。通过2个不同的平板分析模型,得到系统最终的微分方程。在第1个模型中,位移场采用 Kirchhoff 假定,而第2个模型,应用了 Mindlin 平板模型。

2008年, Babaei 和 Chen^[6]对有限长的磁弹性空心圆柱体,以及径向被极化和磁化了的实心旋转圆柱体,给出了精确解。假定圆柱体是正交各向异性,研究了角速度对环向和径向应力的影响。并把上述研究进一步拓展到,圆柱体由功能梯度压电材料组成,承受热荷载作用,同时,研究了角速度和不均匀性对旋转圆柱体的影响。

Khoshgoftar 等^[7]对 FGPM 厚壁圆柱体进行了热弹性分析,假定所有的力学和电学性能,按功能变化。以往的研究中,没有考虑该假定。应用平面弹性理论和平面应变条件,使用了平衡方程和 Maxwell 方程,对问题进行了分析。该方法用能量法构成基本方程,可以应用于非等厚度又承受热影响的结构。而且,本文还提出了一个定义为附加能量的新项,用于预测压电结构的性能,特别是在承受热荷载作用时。经典的能量法不带附加能量,不具备精确预测热荷载作用时压电结构响应的能力。

下面,关于压电材料高阶热弹性的分析,能量法是其研究的基础。为了显示能量法在问题

分析中的能力,本文将应用该方法,对一个旋转的 FGP 圆柱体进行热弹性分析,所得结果可以用来预测,变角速度作用下的旋转 FGP 圆柱体的行为.一个旋转的压电圆柱体可以作为控制器或传感器,精确地确定旋转结构的角速度,如像电动机或涡轮机,这正是传感器的应用领域.尽管对各向同性或复合的压电圆柱体,本研究可以应用有限元方法,得到问题的解析解:所有力学和电学分量及其各变量之间相互作用的信息.

应用能量法研究旋转荷载,对非均匀结构力学和电学分量的影响,为设计人员的非均匀结构热弹性分析,提供重要的信息.尽管该结果已为实验分析所确认,根据相关文献的检索,还没有看到有关 FGPMs 生产和制造的全面报道,仅仅停留在对这些(各种结构)材料的实验分析.因此,当实验分析的物理模型无法实现时,该理论方法可以作为一种新的评价分析方法.

1 热传导方程的解

本节在圆柱坐标系中,在假定的边界条件下,求解对称、稳态的热传导方程.圆柱坐标系中,对称、稳态的热传导方程可以表示为^[8,9]

$$\frac{1}{r}(rk_T(r)T'(r))' = 0 \quad a_c \leq r \leq b_c, \quad (1)$$

其中, a_c 和 b_c 分别为圆柱体的内径和外径, $k_T(r)$ 为热传导系数,假定它是半径(r)的一个函数.方程(1)的一般边界条件为^[8,10]

$$\begin{cases} C_{11}T(a_c) + C_{12}T'(a_c) = f_1, \\ C_{21}T(b_c) + C_{22}T'(b_c) = f_2, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $C_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 为常数,它们依赖于热传导和热对流; f_1 和 f_2 分别是依赖于内径和外径的常数.

基于材料性能的不均匀分布,热传导系数可以如方程(3)所假定:

$$k_T(r) = k_0 r^k, \quad (3)$$

其中, k 为不均匀指数.温度分布的通解可以由方程(4)得到:

$$T(r) = \frac{-A_1}{k} r^{-k} + A_2, \quad k \neq 0, \quad (4)$$

其中, A_1 和 A_2 为积分常数,由方程(5)给出:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{C_{21}f_1 - C_{11}f_2}{C_{21}(C_{12}r_{a_c}^{-(k+1)} - C_{11}(r_{a_c}^{-k}/k)) - C_{11}(C_{22}r_{b_c}^{-(k+1)} - C_{21}(r_{b_c}^{-k}/k))}, \\ A_2 = \frac{(C_{12}r_{a_c}^{-(k+1)} - C_{11}(r_{a_c}^{-k}/k))f_2 - f_1(C_{22}r_{b_c}^{-(k+1)} - C_{21}(r_{b_c}^{-k}/k))}{C_{21}(C_{12}r_{a_c}^{-(k+1)} - C_{11}(r_{a_c}^{-k}/k)) - C_{11}(C_{22}r_{b_c}^{-(k+1)} - C_{21}(r_{b_c}^{-k}/k))}. \end{cases} \quad (5)$$

2 压电热弹性分析

本节导出旋转的 FGP 圆柱体分析所必需的方程.方便计,由于边界条件和外加荷载的对称,应变-位移关系中,只有一个位移分量(径向位移)不为 0^[11-12]:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad u = u(r). \quad (6)$$

旋转的 FGP 圆柱体的示意图在图 1 中给出.本文假定圆柱体沿轴线方向均匀.实际上,该

条件仅适用于无限长圆柱体模型,对许多应用问题也是有效的。

对一个机电结构来说,由于结构边界上有电势作用,预期可以得到一个如下的电场^[6-7]:

$$\begin{cases} \phi = \phi(r), \mathbf{E} = -\nabla\phi, \\ E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r}, E_\theta = E_z = 0. \end{cases} \quad (7)$$

考虑到方程在力学、热学和电学分量间的耦合,2个不为0的应力分量是^[7]

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = C_{rr}\varepsilon_{rr} + C_{r\theta}\varepsilon_{\theta\theta} - e_{rr}E_r - \beta_r T, \\ \sigma_{\theta\theta} = C_{r\theta}\varepsilon_{rr} + C_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} - e_{r\theta}E_r - \beta_\theta T, \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\sigma_{r\theta}=0$ (对称性), σ_{ij} 和 ε_{ij} ($i, j=r, \theta$) 分别为应力、应变张量的分量; $T(r)$ 为温度分布, $E(r)$ 为电场; C_{ij} ($i=r, \theta; j=r, \theta$) 为弹性刚度, e_{ij} ($i, j=r, \theta$) 为压电系数; β 由方程(9)如下给出^[7]:

$$\begin{cases} \beta_r = C_{rr}\alpha_r + C_{r\theta}\alpha_\theta, \\ \beta_\theta = C_{r\theta}\alpha_r + C_{\theta\theta}\alpha_\theta, \end{cases} \quad (9)$$

其中, α_i ($i=r, \theta$) 为热膨胀系数。

电位移的径向分量包括应变场、电场和温度3部分,给出如下^[7]:

$$D_r = e_{rr}\varepsilon_{rr} + e_{r\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \eta E_r - pT, \quad (10)$$

其中, η 为介电常数, p 为热电常数。根据对称条件,电位移的环向分量 $D_\theta = 0$ 。

在能量方程中,电场分量替换之前,假定所有的性能函数都可以用适当的函数表示^[7]

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 r^l, \eta = \eta_0 r^l, e_{ri} = e_{ri0} r^l, C_{ij} = C_{ij0} r^l, \\ p = p_0 r^{b+l}, \beta = \beta_0 r^{b+l}, \alpha = \alpha_0 r^b, \end{cases} \quad (11)$$

其中, l 和 b 为材料性能的不均匀参数。旋转圆柱体单位体积的能量为

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{D}^T \mathbf{E} - Q_T T \} - W_{\text{body}}, \quad (12)$$

这里, W_{body} 为与结构体力有关的能量。引入的 Q_T , 作为特别的附加能量,如下给出:

$$Q_T = \sum_{i=1}^3 (\beta_i \varepsilon_{ii} - p E_i). \quad (13)$$

假定在圆柱坐标系中,与结构适当的函数 $F(u, \phi, r)$ 为

$$F(u, \phi, r) = |J| \bar{u} = r \bar{u}, \quad (14)$$

其中, $|J|$ 为任意一个坐标系中的 Jacobi 行列式,对于本问题有

$$\begin{aligned} F(u, \phi, r) = \pi \left[r \left\{ C_{rr0} r^l \frac{\partial u}{\partial r} + C_{r\theta0} r^l \frac{u}{r} + e_{r\theta0} r^l \frac{\partial \phi}{\partial r} - \beta_{r0} r^{b+l} T \right\} \frac{\partial u}{\partial r} + \right. \\ \left. r \left\{ C_{r\theta0} r^l \frac{\partial u}{\partial r} + C_{\theta\theta0} r^l \frac{u}{r} + e_{r\theta0} r^l \frac{\partial \phi}{\partial r} - \beta_{r0} r^{b+l} T \right\} \frac{u}{r} + \right. \\ \left. r \left\{ e_{r\theta0} r^l \frac{\partial u}{\partial r} + e_{r\theta0} r^l \frac{u}{r} - \eta_0 r^l \frac{\partial \phi}{\partial r} - p_0 r^{b+l} T \right\} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] - \\ \left. r \left\{ \beta_{r0} r^{b+l} \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_{\theta0} r^{b+l} \frac{u}{r} + p_0 r^{b+l} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\} T - 2\pi \rho_0 r^l \times r^2 \omega^2 u, \quad (15) \right. \end{aligned}$$

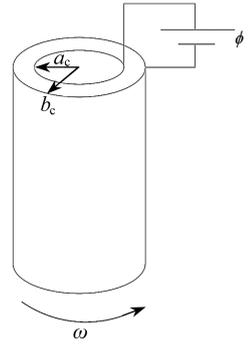


图1 旋转的FGP圆柱体示意图
Fig.1 The schematic figure of a FGP rotating cylinder

将上述函数代入 Euler 方程

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial (\partial q_i / \partial r)} = 0, \quad q_i = u, \phi,$$

得到如下微分方程组:

$$\left\{ \begin{aligned} & [C_{r\theta 0}]r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + [C_{r\theta 0}(l+1)]r \frac{\partial u}{\partial r} + [C_{r\theta 0}l - C_{\theta\theta 0}]u + \\ & [e_{r\theta 0}]r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + [e_{r\theta 0}(l+1) - e_{r\theta 0}]r \frac{\partial \phi}{\partial r} = \\ & - A_1 \left[\beta_{r0} \left(1 - \frac{1}{k}(b+l+1) \right) + \frac{1}{k} \beta_{\theta 0} \right] r^{b-k+1} - \\ & A_2 [-\beta_{r0}(b+l+1) + \beta_{\theta 0}]r^{b+1} - \rho_0 r^3 \omega^2, \quad (16) \\ & [e_{r\theta 0}]r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + [e_{r\theta 0}(l+1) + e_{r\theta 0}]r \frac{\partial u}{\partial r} + [e_{r\theta 0}l]u - \\ & [\eta_0]r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - [\eta_0(l+1)]r \frac{\partial \phi}{\partial r} = \\ & - p_0 A_1 \left[\frac{1}{k}(b+l+1) - 1 \right] r^{b-k+1} + p_0 A_2 [b+l+1]r^{b+1}, \end{aligned} \right.$$

当 $\omega = 0$ 时,方程(16)就是文献[7]中的式(15a)和式(15b)。

方程(16)的解由齐次解和特解组成。齐次解可以由方程(16)的特征方程的特征根得到。为此首先引入转换 $r = e^s$, 将 Cauchy-Euler 方程(16)变成可以求解的微分方程。定义 $(\lambda = d/ds)$, 齐次微分方程能够表达为

$$\left\{ \begin{aligned} & [C_{r\theta 0}\lambda^2 + C_{r\theta 0}l\lambda + C_{r\theta 0}l - C_{\theta\theta 0}]u + [e_{r\theta 0}\lambda^2 + (e_{r\theta 0}l - e_{r\theta 0})\lambda]\phi = 0, \quad (17) \\ & [e_{r\theta 0}\lambda^2 + (e_{r\theta 0}l + e_{r\theta 0})\lambda + l e_{r\theta 0}]u + [-\eta_0\lambda^2 - \eta_0l\lambda]\phi = 0. \end{aligned} \right.$$

对方程(17)的行列式(见方程(18))求解,

$$\lambda^4 + 2l\lambda^3 + (l^2 + \gamma)\lambda^2 + l\gamma\lambda = 0, \quad (18)$$

可以得到方程(17)的非平凡解 (u_h 和 ϕ_h) 如下:

$$u_h = \sum_{i=j}^4 u_{hi} r^{\lambda_i}, \quad \phi_h = \sum_{i=j}^4 M_i u_{hi} r^{\lambda_i}, \quad M_i = -\frac{C_{r\theta 0}\lambda_i^2 + C_{r\theta 0}l\lambda_i + C_{r\theta 0}l - C_{\theta\theta 0}}{e_{r\theta 0}\lambda_i^2 + (e_{r\theta 0}l - e_{r\theta 0})\lambda_i}, \quad (19)$$

其中, $u_{hi}(i = 1, \dots, 4)$ 为常数,可以由 4 个力学和电学的边界条件得到。

为了求得特征方程的根,需要求解 4 阶特征方程,方程的根就是齐次方程的解。

方程组的特解依赖于微分方程组右边的项,在方程(16)的右边,有 3 种类型的项,即 r^{b-k+1} , r^{b+1} 和 r^3 , 则方程(16)的特解为

$$\left\{ \begin{aligned} & u_p = X_1 r^{b-k+1} + X_2 r^{b+1} + X_3 r^3, \\ & \phi_p = X_4 r^{b-k+1} + X_5 r^{b+1} + X_6 r^3, \end{aligned} \right. \quad (20)$$

其中, $X_i(i = 1, 2, \dots, 6)$ 为特解的未知系数,将方程(20)代入方程(16),比较方程两边相同项的系数,可以求解得这些未知系数。因此,微分方程组的最终解为

$$u = u_h + u_p, \quad (21a)$$

$$\phi = \phi_h + \phi_p, \quad (21b)$$

最终解包含了 4 个积分常数 $u_{hi}(i = 1, \dots, 4)$, 可以利用适当的力学和电学边界条件,求得这些常数。在本问题中,有 4 个力学和电学的边界条件。

3 两种边界条件类型下的数值结果

3.1 自由-自由边界条件下的旋转圆柱体

对本问题应用边界条件,并将参数值代入,就可以得到方程的最终解.参数值如下:

$$\begin{cases} \alpha_{r_0} = 2.458 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \alpha_{\theta_0} = 4.396 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \\ C_{rr_0} = 83.6 \text{ GPa}, C_{\theta\theta_0} = 74.1 \text{ GPa}, C_{r\theta_0} = 39.3 \text{ GPa}, \\ e_{rr_0} = 0.347 \text{ C/m}^2, e_{r\theta_0} = 0.16 \text{ C/m}^2, \\ \eta_0 = 9.03 \times 10^{-11} \text{ C}^2/(\text{N}\cdot\text{m})^2, p_0 = 2.94 \times 10^{-6} \text{ C}/(\text{m}^2\cdot\text{K}). \end{cases} \quad (22)$$

本文将热荷载看作永久荷载.因此,本文的模型可以作为在热荷载作用下,测量角速度的力学传感器.考虑内表面温度和外表面温度分别为 50°C 和 0°C .自由旋转圆柱体所必需的力学边界条件为

$$u(r = a_c) = 0, u(r = b_c) = 0, \quad (23)$$

该旋转圆柱体所必需的电学边界条件为

$$\phi(r = a_c) = 0, \phi(r = b_c) = 0. \quad (24)$$

分别选取方程(25)的无量纲参数,以及方程(26)的无量纲角速度:

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\alpha_0 Y_0 T_0}, \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\alpha_0 T_0}, \bar{u}_r = \frac{u_r}{\alpha_0 T_0 r_{b_c}}, \bar{e} = \frac{e}{Y_0 |d_0|}, \\ \bar{\eta} = \frac{\eta}{Y_0 |d_0|^2}, \bar{p} = \frac{p}{\alpha_0 Y_0 |d_0|}, \bar{D}_r = \frac{D_r}{\alpha_0 Y_0 T_0 |d_0|}, \\ \bar{\phi} = \frac{\phi |d_0|}{\alpha_0 T_0 r_{b_c}}, \bar{E}_r = \frac{E_r |d_0|}{\alpha_0 T_0}, \bar{T} = \frac{T}{T_0}, \bar{r} = \frac{r}{r_{b_c}}, \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \bar{C}_{ij} = \frac{C_{ij}}{Y_0}, \end{cases} \quad (25)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{\alpha_0 Y_0 T}{\rho_0 r_{b_c}^2}. \quad (26)$$

为了检查角速度对力学和电学分量的影响,对每个力学和电学分量,给出4个图形,它们分别表示4个无量纲的角速度(Ω)值.

方程(11)中有3个不均匀参数可供选择.为了反映不均匀参数的影响,本文仅选择不均匀参数 l 是可以变动的.另外2个参数取为常数($b = 0, k = 0.01$)^[7].下面的结果是在上述数值参数下得到的.

图2给出了4个角速度值下,电势沿厚度的变化.图形显示,电势的最大值与无量纲的角速度(Ω)成正比.这些结果可以应用于力学传感器的设计.

图3给出了4个角速度值下,径向位移沿厚度的变化.图形显示,径向位移值与无量纲的角速度(Ω)不成比例.对不同的 Ω 值,径向位移值的变化趋势不变.

图4给出了4个角速度值下,径向应力沿厚度的变化.图形显示,对所有的不均匀指数值,径向应力曲线都相交于同一点.对于所有的角速度,该交点处在半径方向的同一位置.

3.2 内压力作用下的旋转圆柱体

本节考虑内压力作用下旋转的FGP圆柱体.电势边界条件均匀一致.在内压力作用下旋转圆柱体的力学边界条件为

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r = a_c) = -P_i, \\ \sigma_{rr}(r = b_c) = 0, \end{cases} \quad (27)$$

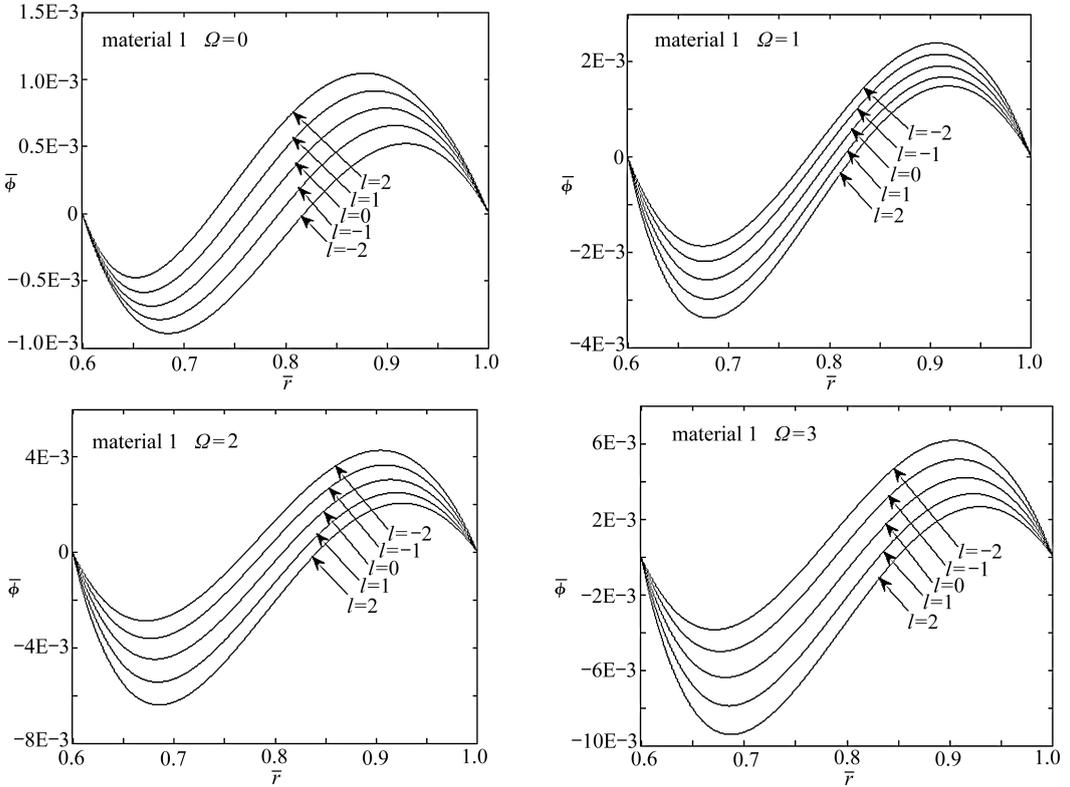
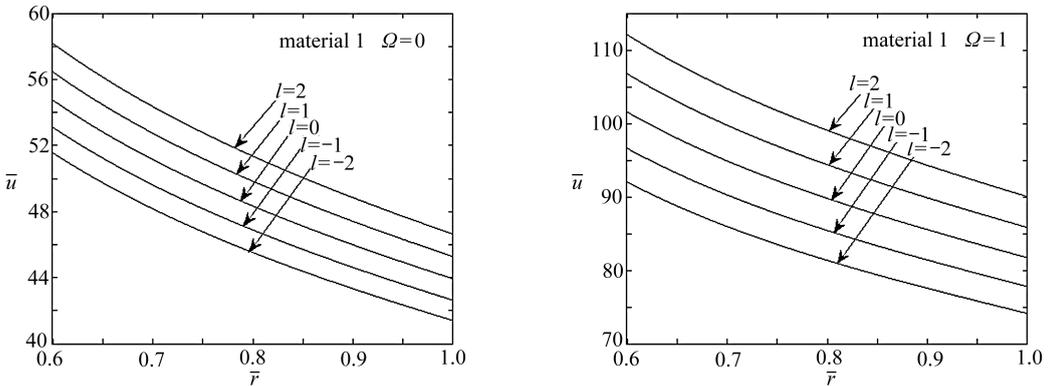


图2 不均匀指数 l 取 5 个不同值,角速度 $\Omega = 0, 1, 2, 3$ 时,电势沿无量纲半径的变化(自由旋转)
 Fig. 2 The distribution of electrical potential in terms of various angular velocities (Ω) for five values of inhomogenous index l (free rotation)

其中, P_i 为圆柱体内径上的压力. 该边界条件是一个空心圆柱体的物理模型. 所述圆柱体的均匀电场边界条件为

$$\begin{cases} \phi(r = a_c) = 0, \\ \phi(r = b_c) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

为了更好地了解角速度, 对一个旋转、受压 FGP 圆柱体响应的影响, 选取 3 个电学和力学的分量: 径向应力、径向位移和电势作为分析对象.



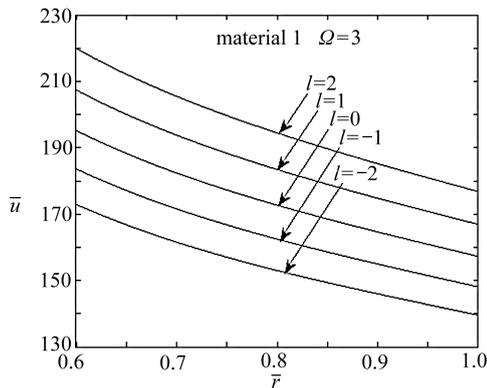
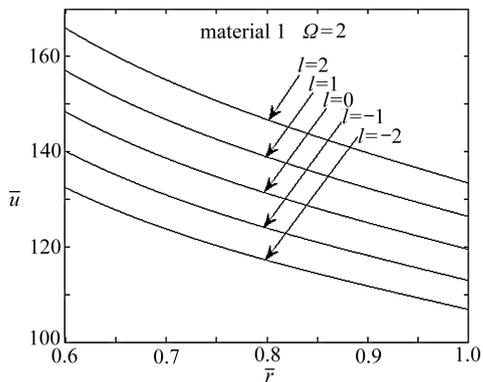


图3 不均匀指数 l 取 5 个不同值,角速度 $\Omega = 0,1,2,3$ 时,径向位移沿无量纲半径的变化(自由旋转)

Fig. 3 The distribution of radial displacement in terms of various angular velocities (Ω) for five values of inhomogenous index l (free rotation)

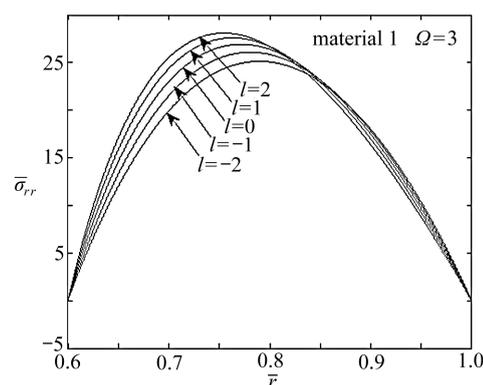
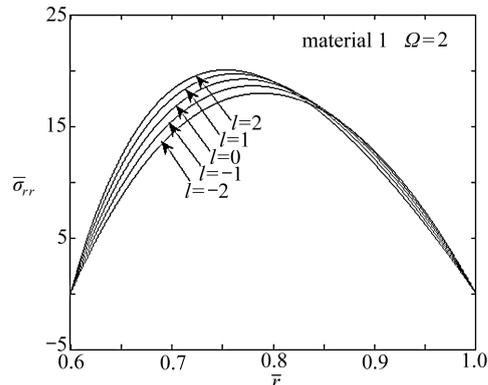
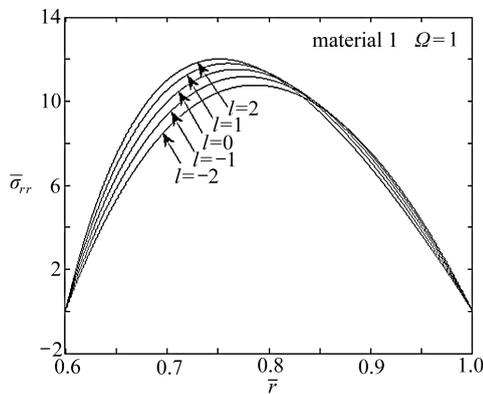
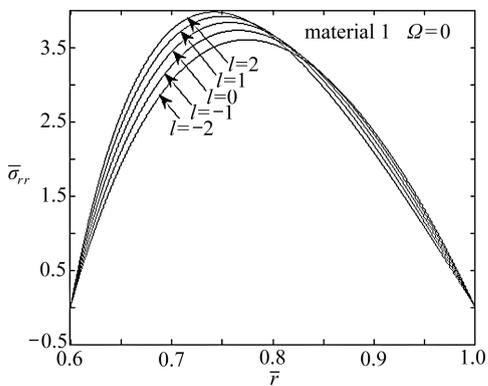


图4 不均匀指数 l 取 5 个不同值,角速度 $\Omega = 0,1,2,3$ 时,径向应力沿无量纲半径的变化(自由旋转)

Fig. 4 The distribution of radial stress in terms of various angular velocities (Ω) for five values of inhomogenous index l (free rotation)

图5 给出了 4 个角速度值下,电势沿厚度的分布.图形显示,电势的最大值与无量纲角速度 (Ω) 成正比例.该结果已经在上一小节中,对自由旋转的 FGP 圆柱体得到过.

图6 给出了 4 个角速度值下,径向位移沿厚度的分布.图形显示,径向位移值与无量纲角速度 (Ω) 不成比例.对于不同的 Ω 值,径向位移值的变化趋势不变.该结果在自由旋转 FGP 圆柱体中也得到过.

图 7 给出了 4 个角速度值下,径向应力沿厚度的分布. 显示出与自由旋转 FGP 圆柱体(图 4)相同的性质. 对于所有的角速度值,交点出现在半径方向上.

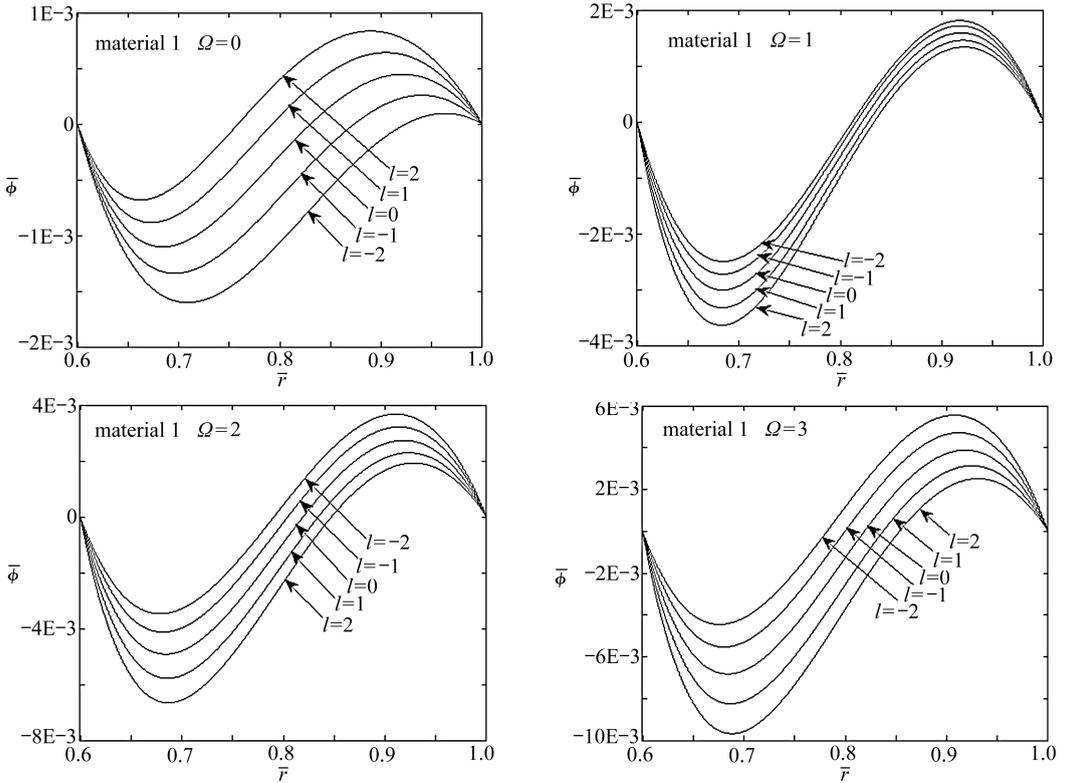


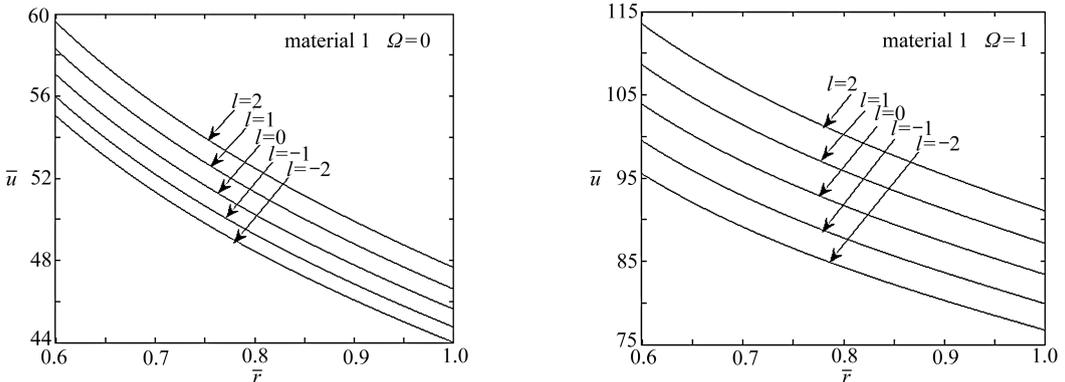
图 5 不均匀指数 l 取 5 个不同值,角速度 $\Omega = 0, 1, 2, 3$ 时,电势沿无量纲半径的变化(受压旋转)

Fig. 5 The distribution of electrical potential in terms of various angular velocities (Ω) for five values of inhomogenous index l (pressurized rotational cylinder)

3.3 上述两种圆柱体结果间的比较

为了更好地了解内压力对旋转 FGP 圆柱体响应的影响,分析上述两种旋转 FGP 圆柱的径向应力.

比较图 4 和图 7,研究内压力对旋转 FGP 圆柱体响应的影响. 比较表明,内压力使径向应力的最大值减小. 随着角速度的增大,径向应力的最大值在减小,静态圆柱体减小的幅度最大.



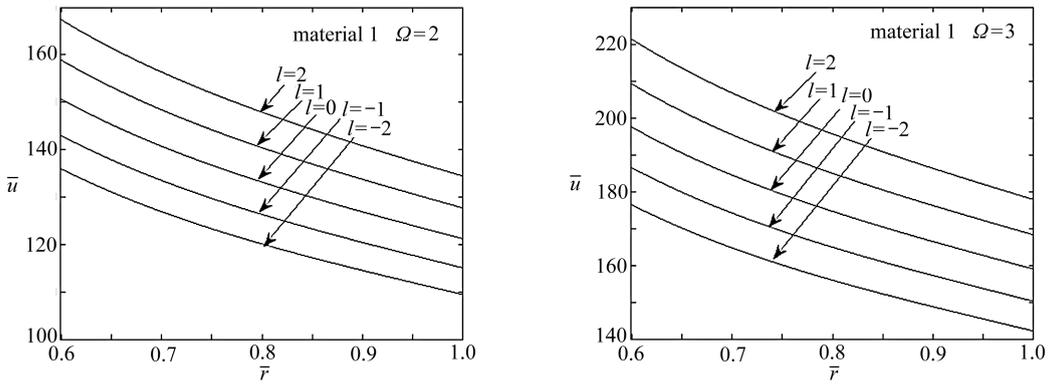


图6 不均匀指数 l 取 5 个不同值,角速度 $\Omega = 0,1,2,3$ 时,径向位移沿无量纲半径的变化(受压旋转)

Fig. 6 The distribution of radial displacement in terms of various angular velocities (Ω) for five values of inhomogenous index l (pressurized rotational cylinder)

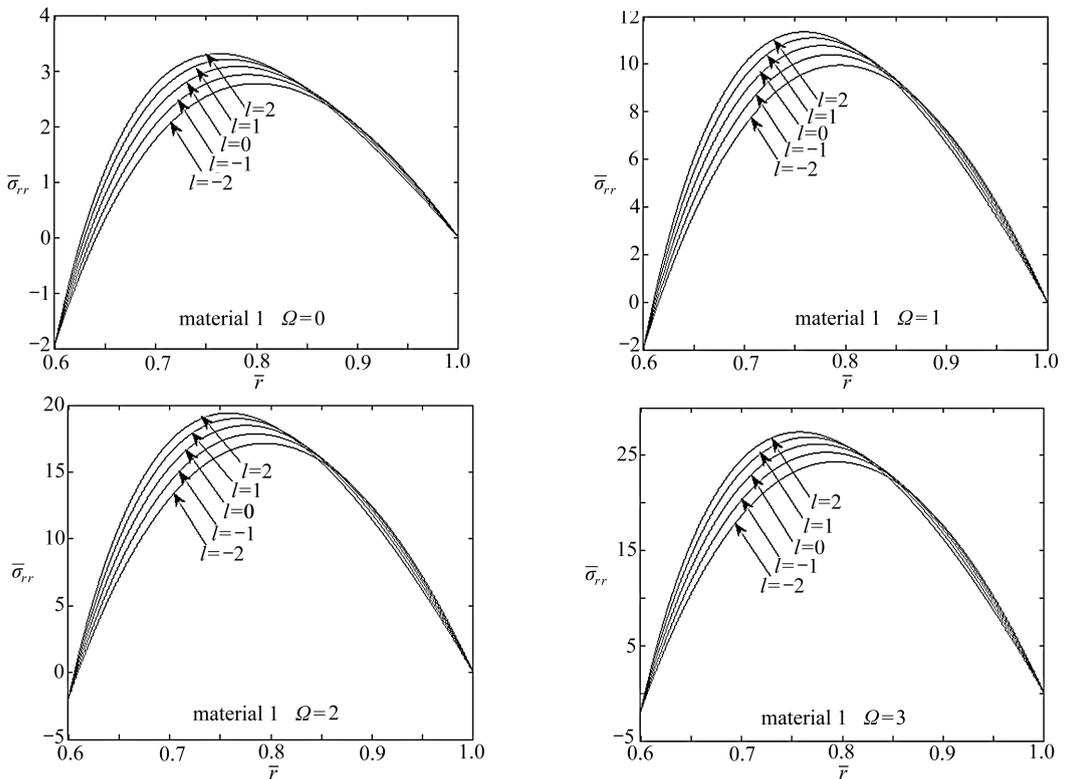


图7 不均匀指数 l 取 5 个不同值,角速度 $\Omega = 0,1,2,3$ 时,径向应力沿无量纲半径的变化(受压旋转)

Fig. 7 The distribution of radial stress in terms of various angular velocities (Ω) for five values of inhomogenous index l (pressurized rotational cylinder)

如前所述,旋转 FGP 圆柱体的电势分布有着类似的性质.图 2 和图 5 比较表明,在内压力作用下,电势的最大值在减小.随着角速度的增大,电势的数值在减小,静态圆柱体减小的幅度最大.

4 结 论

本文研究了角速度对旋转 FGP 圆柱体力学和电学响应的影响,得到以下结论:

1) 本文应用能量法,并引进了一个被称呼为“附加能量”的新项,给出了旋转的功能梯度压电圆柱体热-电-弹性的公式化表示.该新项以一般形式定义,并可以在各种坐标系下进行研究,如直角坐标系、圆柱坐标系和球面坐标系.

2) 就自由旋转和受压旋转的 FGP 圆柱体两种情况研究表明,电势的最大值与无量纲角速度 Ω 成正比.对其它分量,如径向位移、径向和环向的应力,这个比例关系不成立.在测量装置中,这个关系式可以用来评估角速度,这个关系式还可以用于微量的定位,如调节器.电势的最大值出现在外半径附近,因此,两个电极必须安置在最大电势和内径处,或者外径和内径处.

3) 计算结果还显示,内压力造成径向应力最大值减小,在 4 个角速度值下都出现减小现象.而且,在外径附近,5 种不均匀指数下的径向应力值相同.

4) 计算结果还显示,内压力造成电势最大值减小,本文的结果还可以用来提高电势最小的绝对值.

参考文献:

- [1] Liu X, Wang Q, Quek S T. Analytical solution for free vibration of piezoelectric coupled moderately thick circular plates[J]. *Int J Solids Struct*, 2002, **39**(8): 2129-2151.
- [2] Hou P F, Leung A Y T. The transient responses of magneto-electro-elastic hollow cylinders [J]. *Smart Mater Struct*, 2004, **13**: 762-776. doi:10.1088/0964-1726/13/4/014.
- [3] Kollias A T, Avaritsiotis J N. A study on the performance of bending mode piezoelectric accelerometers[J]. *Sens Actuators A*, 2005, **121**(2): 434-442.
- [4] Dai H L, Wang X. Stress wave propagation in piezoelectric fiber reinforced laminated composites subjected to thermal shock[J]. *Composite Struct*, 2006, **74**(1): 51-62.
- [5] Pietrzakowski M. Piezoelectric control of composite plate vibration: effect of electric potential distribution[J]. *Comput Struct*, 2008, **86**(9): 948-954.
- [6] Babaei M H, Chen Z T. Exact solutions for radially polarized and magnetized magneto-electro-elastic rotating cylinders[J]. *Smart Mater Struct*, 2008, **17**(2): 25-35.
- [7] Khoshgoftar M J, Ghorbanpour Arani A, Arefi M. Thermoelastic analysis of a thick walled cylinder made of functionally graded piezoelectric material[J]. *Smart Mater Struct*, 2009, **18**(11). doi: 10.1088/0964-1726/18/11/115007.
- [8] Jabbari M, Sohrabpour S, Eslami M R. Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads[J]. *Int J Pressure Vessel Piping*, 2002, **79**(7): 493-497.
- [9] Frank P I. *Introduction to Heat Transfer*[M]. New York: John Wiley Press, 1996: 79-86.
- [10] Kang J H. Field equations, equations of motion, and energy functionals for thick shells of revolution with arbitrary curvature and variable thickness from a three-dimensional theory [J]. *Acta Mechanica*, 2007, **188**(1/2): 21-37.

- [11] Lai M, Rubin D, Krepl E. *Introduction to Continuum Mechanics*[M]. 3rd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann Press, 1999: 95-108.
- [12] Borei A. *Advanced Mechanics of Materials*[M]. 5th ed. New York: John Wiley and Sons Press, 1993: 55-67.

Application and Analysis of a Functionally Graded Piezoelectrical Rotating Cylinder as a Mechanical Sensor Subjected to Pressure and Thermal Loads

G. H. Rahimi, M. Arefi, M. J. Khoshgoftar

(*Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran 14115-143, Iran*)

Abstract: The exact thermoelastic analysis of a functionally graded piezoelectrical (FGP) rotating cylinder was investigated analytically. The cylinder was subjected to a combination of electrical, thermal and mechanical loads simultaneously. This structure was a simplified model of a rotational sensor or actuator. Basic governing differential equation of the system had been obtained using the energy method. A novel term which was named as additional energy was introduced in order to exact evaluation of energy functional. The solution of the governing differential equation was presented for two types of boundary conditions including free rotating cylinder and rotating cylinder exposed to inner pressure. The effect of angular velocity was investigated on the radial distribution of various components. The mentioned structure can be considered as a sensor for measuring the angular velocity of the cylinder subjected to pressure and temperature. The obtained results indicate that the electrical potential is proportional to angular velocity.

Key words: functionally graded piezoelectric materials; sensor; rotating cylinder; angular velocity; pressure; temperature