

基于 Burton-Miller 边界积分方程的二维声学 波动问题对角形式快速多极子 边界元及其应用*

吴海军¹, 蒋伟康¹, 刘轶军²

(1. 上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240;
2. 美国辛辛那提大学 机械工程学院, 辛辛那提, 俄亥俄州 45221-0072, 美国)

摘要: 论述了二维声学问题的快速多极子边界元(FMBEM)方程及实现步骤. 概述了核函数展开理论,并对 FMBEM 的 4 个重要组成部分:源点矩计算、源点矩转移、源点矩至本地展开转移、本地展开转移进行了详细的描述. 提出了一种有利于二叉树建立的数据结构. 推导了一种比直接数值计算更精确、稳定和高效的解析源点矩计算公式. 数值算例验证了 FMBEM 的正确性和高效性. 最后,使用 FMBEM 对轨道二维声学辐射模型进行了模拟计算.

关键词: 二维声学波动问题; Helmholtz 方程; 快速多极子; 边界元

中图分类号: O422;O429 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.08.003

引 言

边界元方法(BEM)也叫做边界积分方程法已经被用于求解声学问题许多年^[1-4]. BEM 只对边界而不是整个域进行离散,由于减少了维数从而在网格划分时则需要较少的时间. 但是 BEM 具有一定的缺点. 最麻烦的就是 BEM 所生成的线性方程组其系数矩阵是满的且非对称的. 因此,存储 BEM 所生成的系数矩阵所需要的内存与模型自由度平方成正比 $O(N^2)$. 直接求解 BEM 线性方程组的运算量,如 Gauss 消去法,与模型自由度的立方成正比 $O(N^3)$. 于是,内存占用量和求解时间成为使用 BEM 求解大型声学问题的限制性因素.

为了解决 BEM 在数值计算上的缺点,很多研究致力于寻求一种使用更少的内存和更快速度的方法来求解 BEM 方程. 在上世纪 80 年代,快速多极子方法(FMM)被 Rokhlin 和 Greengard 提出^[5-7]. FMM 可以降低内存使用量和求解时间,从而极大地加速 BEM 方程组的求解. FMM 的主要思想是将核函数进行多极子展开,从而将场点和源点之间的联系分开.

* 收稿日期: 2010-06-10; 修订日期: 2011-05-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11074170)

作者简介: 吴海军(1984—),男,安徽宿州人,博士生(E-mail: navy_wu@sjtu.edu.cn);

蒋伟康(1961—),男,上海人,教授,博士,博士生导师(联系人. Tel: +86-21-34206332-824;
E-mail: wkjiang@sjtu.edu.cn).

FMM 随后被用于二维 Helmholtz 方程的求解. 文献[8-11]论述了二维声学 FMM. Rokhlin 讨论了一种基于迭代方法快速求解二维 Helmholtz 方程边值问题的算法^[8]. Amini 和 Profit 描述了一种单层二维散射对角形式 FMBEM^[9]. Amini 和 Profit 研究了基于 Helmholtz 方程的 Burton-Miller 超奇异积分方程二维散射问题的多层 FMBEM^[10]. Chen J T 和 Chen K H 使用 FMM 的方法用来加速外部声学问题的双重边界积分方程系数矩阵的构造^[11]. 对于三维声学波动问题, Liu, Shen 和 Bapat 对自由空间和半空间 FMBEM 做了大量的研究^[12-14].

在文献[8-14]中所讨论的 FMBEM 实际上可以分为两类:一种是基于卷积形式而另一种基于对角展开形式. 但这两种方法在其适用的频段之外都将失效. 在高频段使用卷积形式的 FMBEM 将导致求解时间正比于 p^3 倍的模型自由度, 其中 p 为核函数展开项数; 而在低频段使用对角形式 FMBEM 将产生数值不稳定. 很多研究致力于克服这个问题. 文献[15]描述了一种对于二维 Helmholtz 方程简单全频段 FMBEM 如何获得数值稳定性和精确性的理论及其实现技巧. 整合卷积形式和对角形式的全频段 FMBEM 在文献[16-17]中被提出. 尽管全频段 FMBEM 对任何非零频率是稳定的和高效的, 但是对角形式 FMBEM 仍有改进的余地, 从而提高全频段 FMBEM 的整体性能.

继文献[18]对二维位势 FMBEM 进行详尽的介绍后, 本文讨论了二维声学波动问题的 FMBEM 的基本理论及算法: 核函数展开理论, 程序实现的数据结构及 FMBEM 的 4 个组成部分(源点矩计算、源点矩转移、源点矩至本地展开转移、本地展开转移); 提出了一种解析源点矩计算方法.

本文结构如下: 第 1 节简要介绍了二维声学问题的边界积分方程及其传统边界元方法. 第 2 节对 FMBEM 的基础——多极子展开理论进行了描述. 第 3 节给出了源点矩 4 个组成部分: 源点矩计算、源点矩转移、源点矩至本地展开转移、本地展开转移的公式. 第 4 节提出了一种有利于二叉树建立的数据结构; 推导了一种精确、稳定和高效的解析源点矩表达式; 同时一些关于程序实现中的技巧也在本节给出. 第 5 节给出了数值和工程应用算例用以验证 FMBEM 的高效性和正确性. 最后, 在第 6 节对全文进行了总结.

1 边界积分方程及传统边界元

1.1 二维声学边界积分方程

如图 1 所示, 二维物体其边界为 Γ , 声学介质密度为 ρ , 速度为 c . 稳态线性声学的控制微分方程为著名的 Helmholtz 方程, 即

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{z}) + k^2 \varphi(\mathbf{z}) = 0, \quad (1)$$

其中, $\varphi(\mathbf{z})$ 为 \mathbf{z} 处声压; 波数定义为 $k = \omega/c$, ω 为角频率. 使用 Green 第二等式, 方程(1)可以表示成积分方程

$$\varphi(\mathbf{z}_i) = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} \varphi(\mathbf{z}) - G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i) q(\mathbf{z}) \right] d\tau + \varphi^1(\mathbf{z}_i), \quad \forall \mathbf{z}_i \in D, \quad (2)$$

其中, \mathbf{z}_i 为场点, \mathbf{z} 为边界上 Γ 的源点, $D = D_e \cup D_i$, $\mathbf{n}(\mathbf{z})$ 为 \mathbf{z} 点处法向向量(内部问题指向内, 外部问题指向外). φ^1 为入射声波, 对于辐射问题此项不存在, $q(\mathbf{z}) = \partial \varphi(\mathbf{z}) / \partial \mathbf{n}(\mathbf{z})$. 本文中, 时间项选为 $e^{-i\omega t}$, 从而相应的二维自由空间 Green 函数为^[19]

$$G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i) = \frac{i}{4} H_0^1(k \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_i\|), \quad (3)$$

其中, $i = \sqrt{-1}$, $\mathbf{z} = [x, y]$, 算子 $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
令 \mathbf{z}_i 移至边界, 得到传统边界积分方程 (CBIE)

$$c(\mathbf{z}_i) \varphi(\mathbf{z}_i) = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} \varphi(\mathbf{z}) - G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i) q(\mathbf{z}) \right] d\tau + \varphi^1(\mathbf{z}_i), \quad \forall \mathbf{z}_i \in \Gamma, \quad (4)$$

其中当在点 \mathbf{z}_i 附近的边界光滑时, $c(\mathbf{z}_i) = 1/2$.

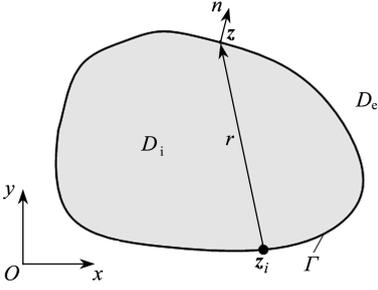


图1 二维外部声学问题及其边界

Fig.1 A 2D exterior domain and its boundary

在内部共振频率处, 外部声学 CBIE 存在不能给出唯一解的缺点. 为了解决这个问题, Burton 和 Miller 提出了一种将 CBIE 及其导数方程组合的方法^[20]. 将方程(2)对场点 \mathbf{z}_i 的法向求导并令点 \mathbf{z}_i 移至边界, 得到如下超奇异积分方程 (HBIE):

$$c(\mathbf{z}_i) q(\mathbf{z}_i) = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_i) \partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} \varphi(\mathbf{z}) - \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_i)} q(\mathbf{z}) \right] d\tau(\mathbf{z}) + q^1(\mathbf{z}_i), \quad \forall \mathbf{z}_i \in \Gamma. \quad (5)$$

对于外部问题, 方程(4)和(5)分别具有不同的虚拟特征频率, 在各自的特征频率处方程(4)和(5)均不能给出唯一解. 但是方程(4)和(5)总会有共同的解. 鉴于此, 将方程(4)和(5)进行线性组合得到的方程 (CHBIE) 可以对任意频率给出唯一解

$$\int_{\Gamma} \left[\alpha \frac{\partial^2 G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_i) \partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} + \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} \right] \varphi(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}) - c(\mathbf{z}_i) \varphi(\mathbf{z}_i) + \varphi^1(\mathbf{z}_i) = \int_{\Gamma} \left[\alpha \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_i)} + G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i) \right] q(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}) + \alpha [c(\mathbf{z}_i) q(\mathbf{z}_i) - q^1(\mathbf{z}_i)], \quad \forall \mathbf{z}_i \in \Gamma, \quad (6)$$

其中, α 为耦合常数, 可取为 i/k ^[21]. 此 CHBIE 也被称作 Burton-Miller 方程.

求解二维声学问题的主要任务就是在一定阻抗边界条件下求解方程(6). 一般的阻抗边界可以表示为

$$i\rho\omega\varphi(\mathbf{z}) + \sigma\partial\varphi(\mathbf{z})/\partial\mathbf{n}|_{\mathbf{z}\in\Gamma} = 0, \quad (7)$$

其中, σ 为边界阻抗. 两种极端的情况分为 Newman 边界条件, 对应于 $\sigma = \infty$; 及 Dirichlet 边界条件, 对应于 $\sigma = 0$.

在二维外部声学问题中, 方程(2)隐式地满足了二维 Sommerfeld 辐射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - ik\varphi \right) = 0, \quad (8)$$

其中, $r = \|\mathbf{z}\|$, $\mathbf{z} \in D_e$. 此条件可以保证方程(6)的解是向外传播的声波^[22].

1.2 传统边界元

对方程(6)的求解, 一般将其离散然后使用数值方法进行计算. 为了方便起见, 使用常单元对二维模型进行离散, 即将边界 Γ 分割成 N 个线段并在每段上放置一个节点. 离散后, 可以得到如下对每个节点 $i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的线性方程组:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_j = \sum_{j=1}^N b_{ij} q_j + b^1, \quad (9)$$

其中, b^1 是散射问题中的入射波项,

$$a_{ij} = \int_{\Gamma_j} \left[\alpha \frac{\partial^2 G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_i) \partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} + \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} \right] d\tau(\mathbf{z}) - \frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad (10)$$

$$b_{ij} = \oint_{\Gamma_j} \left[\alpha \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_i)} + G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i) \right] q(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}) - \frac{\alpha}{2} \delta_{ij}. \quad (11)$$

当 $i \neq j$, 常规数值积分方法如 Gauss 积分可以用来计算 a_{ij}, b_{ij} . 当 $i = j$, 对所有单元 $\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i) / \partial \mathbf{n}_j |_{\mathbf{z} \in \Gamma_j}$ 成立, a_{ij} 是一超奇异积分, b_{ij} 是奇异积分, 因此需要用特殊的方法来计算. 本文使用 Hadamard 有限积分法来计算超奇异积分, 采用如下公式^[23] 计算奇异积分:

$$\int_0^{l_j^2} G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i) d\tau = \frac{il_j}{8} \left\{ H_0^1 \left(\frac{kl_j}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \left[S_0 \left(\frac{kl_j}{2} \right) H_1^1 \left(\frac{kl_j}{2} \right) - S_1 \left(\frac{kl_j}{2} \right) H_0^1 \left(\frac{kl_j}{2} \right) \right] \right\}, \quad (12)$$

其中, S_0, S_1 是 Struve 函数, l_j 是单元 j 的长度.

每个单元中 $\varphi(\mathbf{z})$ 和 $q(\mathbf{z})$ 必有一个已知, 将已知的 N 个边界条件代入, 并交换式(9)中的行和列, 得到如下—标准线性方程组:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \text{ 或 } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (13)$$

其中, \mathbf{A} 为一满的且非对称系数矩阵; \mathbf{x} 是由未知量 φ 和 q 组成向量, \mathbf{b} 是由已知边界条件求出的方程右边向量.

在传统边界元中, 矩阵 \mathbf{A} 的构造需要 $O(N^2)$ 的算术运算. 因为矩阵 \mathbf{A} 是满的和非对称的, 存储需要的内存大小为 $O(N^2)$. 使用迭代求解器, 如广义最小残差算法 (GMRES)^[24] 和共轭梯度法 (CGS)^[25], 以传统的方法计算矩阵-向量乘积需要 $O(N^2)$ 算术运算. 使用直接求解器求解, 如 Gauss 消去法, 需要 $O(N^3)$ 算术运算. 这使得传统边界元无法进行大型模型的计算求解.

2 核函数多极子展开

快速多极子方法可以加速方程(13)在迭代求解中矩阵-向量乘积的运算. FMM 的主要思想是将核函数进行多极子展开, 从而将场点和源点之间的联系分开, 进而单元与单元之间的联系被块与块之间的联系所代替.

核函数 H_0^1 的展开理论可以在文献 [10, 26] 等中找到. 基于 Graf 加法公式和一型整数阶 Bessel 积分恒等式, 当 $\|(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_L) - (\mathbf{z} - \mathbf{z}_c)\| < \|\mathbf{z}_c - \mathbf{z}_L\|$, 二维声学问题自由空间 Green 函数可以表示成如下多极展开式:

$$G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i) \approx \frac{i}{4L} \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_L) \mathbf{T}_k(\mathbf{z}_L, \mathbf{z}_c) \mathbf{g}_k(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}), \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{f}_k = [f_k^0 \quad \cdots \quad f_k^{L-1}], \quad \mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} T_k^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_k^{L-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_k = \begin{bmatrix} g_k^0 \\ \vdots \\ g_k^{L-1} \end{bmatrix},$$

他们的元素分别为

$$f_k^l(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_L) = e^{ik(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_L) \cdot \mathbf{s}(\beta_l)}, \quad (15)$$

$$g_k^l(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}) = e^{-ik(\mathbf{z} - \mathbf{z}_c) \cdot \mathbf{s}(\beta_l)}, \quad (16)$$

$$T_k^l(\mathbf{z}_L, \mathbf{z}_c) = \sum_{m=-M}^M i^{-m} H_m^1(u) e^{im(\theta_u - \beta_l)}, \quad (17)$$

其中, $l = 0, 1, \dots, L-1$, $\beta_l = 2\pi l/L$, $\mathbf{s}(\beta_l) = [\cos \beta_l, \sin \beta_l]$, θ_u 为向量 \mathbf{u} 的极角. \mathbf{f}_k 与源点矩有关, \mathbf{g}_k 是本地展开系数, 矩阵 \mathbf{T}_k 源点矩为转移到本地展开式的传递函数.

方程(14)和(17)中整数 L 和 M 分别为 Graf 加法公式的截断项数和使用梯形积分公式计算 Bessel 积分恒等式所使用的点数. 整数 M 和 L 随层变化, 对对角形式 FMBEM 的内存大小、精度、效率及数值稳定性至关重要. 文献[15]给出了数值计算误差的直观解释及如何选择截断项数的建议. 二维声学问题对角展开误差分析及截断项数 M 的自动选取在文献[9, 27]得到详细的描述. 文献[9-10]中选择 $L = 2M + 1$, 这样可以使用快速 Fourier 变化来计算传递矩阵. 我们在文献[28]给出在这种选择下 Bessel 积分恒等式的积分误差. 文献[29]给出了一种“半经验”公式来选取截断项数, $M = y + 5 \lg(y + \pi)$, 其中 y 为某层栅格的最大半径与波数的乘积.

3 快速多极子方法

本节对源点矩(M)、源点矩转移(M2M)、源点矩至本地转移(M2L)及本地转移(L2L)计算公式进行总结和重写. 考虑式(6)积分中包含核函数 H_0^1 的积分

$$\lambda_{ij} = \int_{\Gamma_j} G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i) q_j(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}), \quad (18)$$

其中, Γ_j 是远离场点 \mathbf{z}_i 的一段边界, 如图 2 所示.

3.1 源点矩(M)

将式(14)代入式(18), 得到

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &\approx \frac{i}{4L} \int_{\Gamma_j} \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_L) \mathbf{T}_k(\mathbf{z}_L, \mathbf{z}_c) \mathbf{g}_k(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}) q_j(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}) = \\ &\frac{i}{4L} \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_L) \mathbf{T}_k(\mathbf{z}_L, \mathbf{z}_c) \mathbf{M}_k(\mathbf{z}_c), \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{M}_k(\mathbf{z}_c) = \int_{\Gamma_j} \mathbf{g}_k(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}) q_j(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}) \quad (20)$$

是独立于场点 \mathbf{z}_i 关于点 \mathbf{z}_c 的源点矩, 只需要被计算一次. 向量 $\mathbf{M}_k(\mathbf{z}_c)$ 的元素为

$$M_k^l(\mathbf{z}_c) = \int_{\Gamma_j} e^{-ik(\mathbf{z} - \mathbf{z}_c) \cdot \mathbf{s}(\beta_l)} q_j(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}). \quad (21)$$

当源点矩被计算完成以后, 任意远离线段 Γ_j 的场点 \mathbf{z}_i 之间的积分 λ_{ij} 可以直接通过式(19)计算, 其中场点 \mathbf{z}_i 和线段 Γ_j 应包含在两个分别以 $\mathbf{z}_L, \mathbf{z}_c$ 为圆心的分离圆盘内.

3.2 源点矩转移(M2M)

如果点 z_c 移到一个新的位置 $z_{c'}$ (图2), 对源点矩如下方程成立:

$$\mathbf{M}_k^l(z_{c'}) = e^{ik(z_{c'}-z_c) \cdot \mathbf{s}(\beta_l)} \mathbf{M}_k^l(z_c), \quad (22)$$

因此

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &\approx \frac{i}{4L} \mathbf{f}_k(z_i, z_L) \mathbf{T}_k(z_L, z_c) \mathbf{M}_k(z_c) \approx \\ &\frac{i}{4L} \mathbf{f}_k(z_i, z_L) \mathbf{T}_k(z_L, z_{c'}) \mathbf{M}_k(z_{c'}). \end{aligned} \quad (23)$$

关于点 $z_{c'}$ 的源点矩可以写为

$$\mathbf{M}_k(z_{c'}) = \mathbf{B}(z_{c'}, z_c) \mathbf{M}_k(z_c), \quad (24)$$

其中, $\mathbf{B}(z_{c'}, z_c)$ 为一对角矩阵, 对角元素为 $B_k^l(z_{c'}) = e^{ik(z_{c'}-z_c) \cdot \mathbf{s}(\beta_l)}$, 是当点 z_c 移到的 $z_{c'}$ 的源点矩转移公式. 值得注意的是以点 $z_{c'}$ 为中心的圆盘应该包含线段 Γ_j 且远离包含场点 z_i 的圆盘. 这是方程(24)成立的前提条件.

3.3 源点矩到本地展开转移(M2L)

将方程(23)右边两项合并, 式(23)可以表示为

$$\lambda_{ij} \approx \frac{i}{4L} \mathbf{f}_k(z_i, z_L) L_k(z_L), \quad (25)$$

其中

$$L_k(z_L) = \mathbf{T}_k(z_L, z_{c'}) \mathbf{M}_k(z_{c'}) \quad (26)$$

被称为源点矩至本地展开转移式(M2L). M2L将源点圆盘内的源点贡献转移到场点圆盘内.

3.4 本地展开转移(L2L)

假设点 $z_{L'}$ 是圆盘的中心, 它包含在被以点 z_L 为圆心的一圆盘内, 对 f_k^l 有如下等式:

$$f_k^l(z_i, z_L) = f_k^l(z_i, z_{L'}) e^{ik(z_{L'}-z_L) \cdot \mathbf{s}(\beta_l)}. \quad (27)$$

从而

$$\lambda_{ij} \approx \frac{i}{4L} \mathbf{f}_k(z_i, z_L) L_k(z_L) = \frac{i}{4L} \mathbf{f}_k(z_i, z_{L'}) L_k(z_{L'}), \quad (28)$$

其中

$$L_k(z_{L'}) = \mathbf{D}_k(z_{L'}, z_L) L_k(z_L), \quad (29)$$

$\mathbf{D}_k(z_{L'}, z_L)$ 为一对角矩阵, 其对角元素为 $D_k^l(z_{L'}, z_L) = e^{ik(z_{L'}-z_L) \cdot \mathbf{s}(\beta_l)}$ 是当点 z_L 移到点 $z_{L'}$ 时的本地展开转移公式.

3.5 包含导数核函数的积分展开式

考虑式(6)中如下包含导数核函数的积分:

$$\mathfrak{R}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} q_j(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}), \quad (30)$$

$$\mathfrak{R}_{ij}' = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_i)} q_j(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}), \quad (31)$$

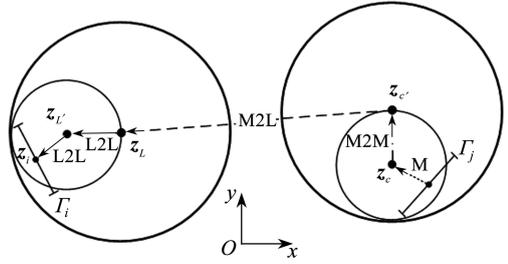


图2 FMM算法的步骤:M, M2M, M2L及L2L

Fig. 2 Geometry of FMM building blocks: M, M2M, M2L and L2L

$$N_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial^2 G(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_i) \partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} \varphi(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}), \quad (32)$$

其中 Γ_j 也是远离场点 \mathbf{z}_i 的一段边界, 如图 2 所示.

将式(14)代入式(30) ~ (32), 得到

$$\mathfrak{R}_{ij} \approx \frac{i}{4L} \int_{\Gamma_j} \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_L) \mathbf{T}_k(\mathbf{z}_L, \mathbf{z}_c) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} \mathbf{g}_k(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}) q_j(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}), \quad (33)$$

$$\mathfrak{R}'_{ij} \approx \frac{i}{4L} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_i)} \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_L) \mathbf{T}_k(\mathbf{z}_L, \mathbf{z}_c) \mathbf{g}_k(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}) q_j(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}), \quad (34)$$

$$N_{ij} \approx \frac{i}{4L} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_i)} \mathbf{f}_k(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_L) \mathbf{T}_k(\mathbf{z}_L, \mathbf{z}_c) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} \mathbf{g}_k(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}) q_j(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}). \quad (35)$$

向量 \mathbf{g}_k 和 \mathbf{f}_k 很容易对其求导, 求导后其元素分别为

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z})} \mathbf{g}_k^l(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}) = -ik \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{s}(\beta_l) \mathbf{g}_k^l(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}), \quad (36)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{z}_i)} \mathbf{f}_k^l(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}) = ik \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{s}(\beta_l) \mathbf{f}_k^l(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}), \quad (37)$$

其中, $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{z})$ 是在场点 \mathbf{z} 处的单位法向导数. 从而, 积分 \mathfrak{R}'_{ij} 的源点矩与积分 λ_{ij} 的源点矩相同. 积分 \mathfrak{R}_{ij} 和 N_{ij} 具有相同的源点矩

$$M'_k(\mathbf{z}_c) = -ik \int_{\Gamma_j} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{s}(\beta_l) e^{-ik(\mathbf{z}-\mathbf{z}_c) \cdot \mathbf{s}(\beta_l)} \varphi_j(\mathbf{z}) d\tau(\mathbf{z}). \quad (38)$$

可以证明这 4 个积分的 M2M、M2L 和 L2L 相同, 只是积分 \mathfrak{R}_{ij} 和 N_{ij} 的源点矩需要用式(38)来计算, 且积分 \mathfrak{R}'_{ij} 和 N_{ij} 的最终计算需要乘上因子 $ik \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{s}(\beta_l)$.

4 FMBEM 的程序实现

本节首先介绍一种树状结构建立的数据结构, 它可以简化 FMBEM 程序的实现. 随后, 一种解析源点矩计算方法被提出. 最后, 讨论了一些程序实现过程中的技术问题.

4.1 数据结构

首先, 我们介绍如何对正方形进行二叉树分隔. 如图 3 所示, 包含整个边界的最大正方形为树状结构的根, 也叫做 0 级栅格 (边长相等的正方形). 四等分 0 级栅格得到 4 个 1 级子栅格, 其边长为父级栅格的一半, 按照从左下到右上的顺序编号为 0, 1, 2, 3. 按照这种方法继续进行划分, 即将 L 级栅格所有栅格四等分成相等的栅格, 在 $L+1$ 级得到 $2^{2(L+1)}$ 个栅格, 并将其编号为 $0, 1, \dots, 2^{2(L+1)} - 1$. 满足一定条件的栅格停止划分. 不包含子栅格的栅格叫叶子栅格.

如此划分完成后, 一种能从叶子向根部和从根部向叶子进行双向搜索的四叉树结构可以由栅格编号建立. 定义整数 a 被自然数 b 除为 $a/b = [a/b] + (a/b)$, 其中 $[a/b]$ 为商, (a/b) 为余数. 对一编号为 m 的 L 级栅格, 其在 $L-1$ 级的父栅格编号 p_m 为

$$p_m = [[m/2^L]/2] \cdot 2^{L-1} + [(m/2^L)/2]. \quad (39)$$

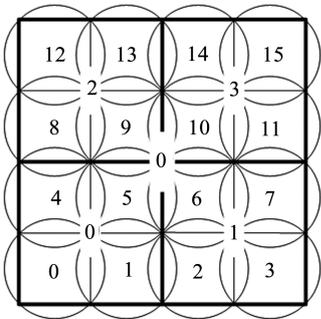


图 3 四叉树离散

Fig. 3 Quad tree discretization

而其在 $L + 1$ 级子栅格的起始编号 c_m^s 和结束编号 c_m^e 分别表示为

$$c_m^s = [m/2^L] \cdot 2^{L+2} + (m/2^L) \cdot 2, \quad (40)$$

$$c_m^e = [m/2^L] \cdot 2^{L+2} + 2^{L+1} + (m/2^L) \cdot 2 + 1. \quad (41)$$

因此,此四叉树结构在计算机中可由一数组表示,如图 4 所示.

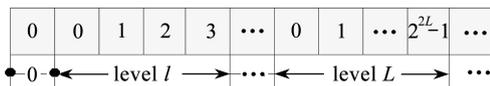


图 4 数组——四叉树数据结构

Fig. 4 An array—data structure for quad tree

4.2 解析源点矩

源点矩实质上为一线积分,许多数值方法,如 Gauss 积分,可用来直接计算它.但是我们发现,对于常单元源点矩可以使用解析的方法进行计算,从而在一定程度上可以提高对角形式 FMBEM 的性能.因为常单元的单位法向也是一常数,所以只需要推导积分 λ_{ij} 和 \mathfrak{R}'_{ij} 的解析源点矩,积分 \mathfrak{R}_{ij} 和 N_{ij} 的源点矩与 λ_{ij} 和 \mathfrak{R}'_{ij} 的相似,只相差一因子 $-ik\hat{n}(z) \cdot s(\beta_l)$ 并用 $\varphi(z)$ 替代 $q(z)$.

为了得到解析源点矩,首先我们需要定义一种将全局坐标系转化到单元上的局部坐标系方法.假设单元 j 的两个端点分别为 z_j 和 z_{j+1} . 使用局部坐标系,单元 j 上的点 $z = [x, y]$ 的坐标可以表示为

$$z = [x_{j+1} - x_j, y_{j+1} - y_j] \xi + [x_j, y_j] = \mathfrak{N} \xi + z_j, \quad (42)$$

其中, \mathfrak{N} 为由式(42) 定义的二维向量, $\xi = \|z - z_j\| / L_j$, L_j 为单元的长度定义为

$$L_j = \|z_{j+1} - z_j\|.$$

将式(42)代入式(21),得到

$$M_k^l(z_c) = L_j q_j e^{ik(z_c - z_j) \cdot s(\beta_l)} \int_0^1 e^{-ik \mathfrak{N} s(\beta_l) \xi} d\xi. \quad (43)$$

如果 $\mathfrak{N} \cdot s(\beta_l)$ 不为 0,即向量 \mathfrak{N} 不垂直向量 $s(\beta_l)$, 得到

$$M_k^l(z_c) = \frac{L_j q_j}{ik \mathfrak{N} \cdot s(\beta_l)} (1 - e^{-ik \mathfrak{N} \cdot s(\beta_l)}) e^{ik(z_c - z_j) \cdot s(\beta_l)}. \quad (44)$$

如果 $\mathfrak{N} \cdot s(\beta_l)$ 为 0,有

$$M_k^l(z_c) = L_j q_j e^{ik(z_c - z_j) \cdot s(\beta_l)}. \quad (45)$$

解析源点矩的推导是直接的没有任何精度损失.毫无疑问使用解析法计算源点矩比数值积分更精确、稳定和高效.尽管这里仅对常单元解析源点矩进行了推导,线性单元的解析源点矩也很容易得到.

4.3 插值

因为梯形积分点数 L 与树状结构栅格大小有关,随上行传递增加、下行传递减少.在计算低层源点矩时需要已求得的高层源点矩进行插值,本地展开同样也需要进行插值计算,其插值运算与源点矩的相反.由式(21)可以很容易看出,对角形式 FMBEM 的源点矩实际上为定义在 0 到 2π 之间角度 β 的函数.使用 Jacobi-Anger 展开式,源点矩可以表示为

$$M_k(z_c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\beta}, \quad (46)$$

其中

$$a_n = \int_{\Gamma} i^n J_n(k \|z - z_c\|) e^{-in\beta} d\tau(z).$$

因为当 x 固定后, $|J_n(x)|$ 是关于 $|n|$ 的严格减函数. 如果 $|n| > x$, 当 $|n| > N$ 时 $|J_n(x)| \approx 0$, 其中 N 为 n 的足够大截断项数. 这意味着源点矩在可接受的误差范围内可以被视为有限带宽函数. 为了得到系数 $a_n (|n| \leq N)$, 对已得源点矩进行 Fourier 变换. 一旦系数求出 $a_n (|n| \leq N)$ 以后, 任意其它点 β' 处的源点矩可以很容易地由式(46) 求出, 下标取 $|n| \leq N$. 这就是统一分辨率插值方法的思想^[30], 也是本文所用的插值方法. 因为传递函数是关于角度 β 的有限带宽函数, 且本地展开是源点矩和传递函数的乘积, 统一分辨率插值法也被用于下行传递的插值计算.

4.4 预处理及系数存储

尖角、高频等等可能会导致 BEM 线性方程组产生病态. 因此, 预处理在迭代求解器 (GMRES) 求解时非常必要. 本文采用块对角预处理方法, 即使用叶子栅格内包含的单元产生的系数矩阵作为预处理矩阵. 因为预处理矩阵是稀疏的, 我们将其计算一次并存储下来供迭代求解预处理使用. 这样在下行传递直接 BEM 系数计算时可以重复使用这些系数^[12-14].

5 数值算例

算法使用 Fortran 90 编写, 并在双核 2.2G 中应处理器和 2G 内存的电脑进行测试. 所有算例都采用常单元, 这样奇异积分可以解析求解. 使用 GMRES 求解器对 FMBEM 进行求解, 误差设为 10^{-4} .

5.1 刚硬圆柱体散射

作为验证程序正确性的算例, 我们对无限长刚硬圆柱体散射声场进行了计算. 圆柱体半径为 a , 单位幅值平面入射波垂直于圆柱体轴向沿正 $x (\theta = 0)$ 方向传播. 模型特征长度 (k_a) 定义为波数与包含模型的最小正方边长之积. 此模型的 k_a 为 5. 场点均匀地分布在半径为 $r = 2a$ 的圆上, 如图 5 所示. 场点 (r, θ) 处的精确解为

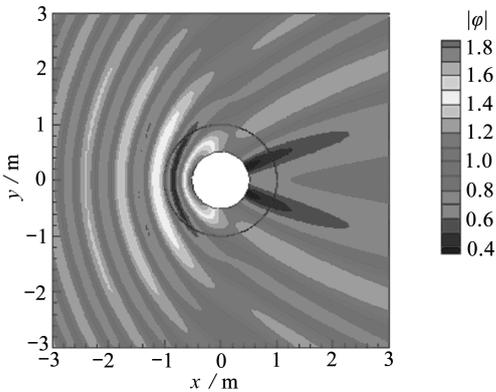


图5 刚硬圆柱体散射的场点声压云图

Fig. 5 Field pressure contour plot for scattering of a rigid cylinder

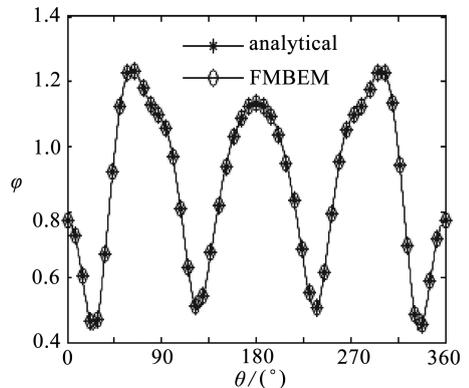


图6 解析及 FMBEM 求解的场点声压

Fig. 6 Field pressure given by analytical and FMBEM

$$\varphi(r, \theta) = - \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} H_m^1(kr) \cos(m\theta), \quad (47)$$

其中, ε_m 为 Neumann 常数, “'” 表示对宗量 k_a 求导, J_m 是一型 m 阶 Bessel 函数. 图 6 给出了场点计算声压及其精确解, 显示了程序的正确性.

因为声学散射问题是与频率有关的, 为了进一步验证算法对较宽频带都是精确的, 对刚硬圆柱体的随频率变化散射声场的计算. 模型的 k_a 从 6 增加到 60, 相应的边界单元在表 1 中给出. 比较了由 FMBEM 求解的边界值与解析解计算的边界值, 相对误差 ε 定义为 2 范数意义下相对于解析解的误差, 列于表 1 中. 在表 1 中, N 表示边界离散单元数, L_{tree} 表示树状结构的深度, N_{iter} 表示迭代求解次数, RPD 和 NPD 分别表示迭代求解中采用右预处理方法和没有采用预处理方法.

表 1 变频率刚硬圆柱体散射计算结果

Table 1 Results of rigid cylinder scattering with varying frequency

k_a	N	L_{tree}	N_{iter}		ε
			RPD	NPD	
6	4 000	4	6	15	2.593 0E-4
12	12 700	6	9	21	5.439 3E-4
18	22 400	6	12	24	1.692 7E-4
24	32 100	6	16	31	6.916 5E-4
30	51 500	7	21	41	7.856 9E-4
36	61 200	7	24	44	2.799 6E-4
42	70 900	7	27	55	3.092 2E-4
48	80 600	7	28	57	1.683 3E-4
54	90 300	7	30	70	3.070 8E-4
60	100 000	8	34	79	1.651 3E-4

5.2 多圆柱体散射

如图 7 所示, 单位幅值平面波沿正 x 方向传播, 使用右预处理方法的 FMBEM 被用于多圆柱体散射声场的计算. 散射模型包含 300 随机分布在正方形内的圆柱体. 模型的 k_a 为 40, 叶子栅格所允许的最多单元个数设为 70. 边界解和场点声压均采用 FMBEM 进行计算. 对此模型, 解析的场点声压无法得到. 理论上, 细化边界网格可以使解收敛到精确解. 边界离散成 210 000 个单元时求得的场点声压云图在图 7 中给出, 并作为基准解用以研究算法在复杂模型求解中的正确性. 相对于基准解的 2 范数相对误差在图 8 中被给出. 图 8 展示了细化网格的收敛性, 并侧面验证了算法的正确性. 图 9 给出了使用快速多极子方法求解边界解 (FMBEM) 及场点声压 (FMFE) 的计算时间, 及场点声压直接计算时间 (DFE), 显示了 FMBEM 在大型模型计算上的高效性.

5.3 轨道声辐射

轨道交通进入了高速时代. 在高速段, 轮轨和轨道之间冲击产生的噪声非常重要. 在一定假设下, 1) 在同一频率下轨道中的波长远大于空气中的波长; 2) 沿轨道长度方向上的衰减非常小, 轨道声辐射可以用二维模型进行预测. 当条件 2) 不能满足时, 二维模型仍然可以使用只要边界值选在力的作用点处. 为了简化起见, 我们模拟简谐响应下的声辐射. 作用在轨道上

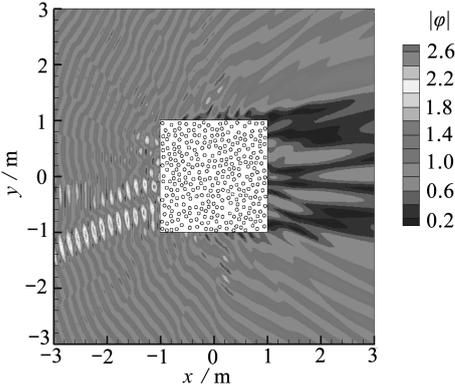


图 7 多圆柱体散射声场场点声压云图

Fig. 7 Field pressure contour plot of multi cylinders scattering

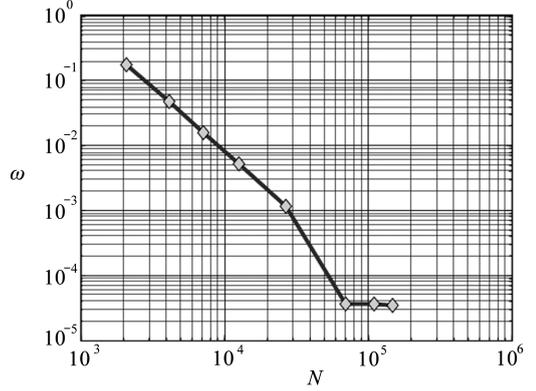


图 8 相对于基准解不同网格划分下的相对误差

Fig. 8 Relative errors of different discretization with respect to benchmark solution

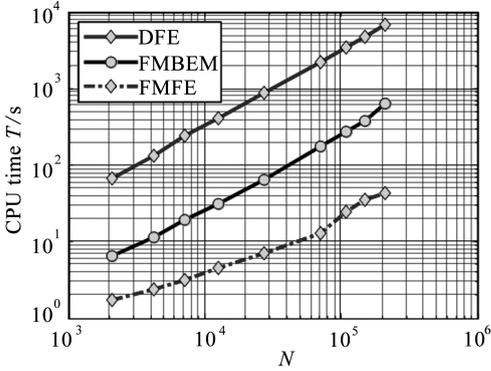


图 9 不同网格划分下边界求解及场点声压计算时间

Fig. 9 CPU time used in boundary solution and field evaluation of different discretization

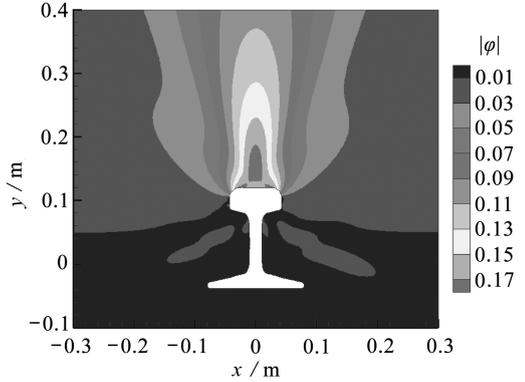


图 10 轨道声辐射

Fig. 10 Radiation of vibration rail

部边线上的简谐力所产生的边界条件由第三方 CAD 软件计算得到,随后在已得边界条件下使用 FMBEM 计算轨道的声辐射,其结果如图 10 所示,轨道模型的 k_a 为 25,离散成 22 956 个线段,声场由 32 817 个三角形单元组成,边界求解和场点声压计算共耗时 88.83 s。模拟计算的结果汇总列于表 2 中,其中 T_{FMBEM} 表示使用 FMBEM 求解所用时间, T_{FMFE} 、 T_{DFE} 分别表示使用快速多极子方法和直接边界积分方法计算场点声压所用时间,单位为 s。

表 2 模拟计算结果

Table 2 Results of simulation

case	k_a	N	model L_{tree}	RPD		NPD		field N	field L_{tree}	$T_{\text{FMFE}} / \text{s}$	$T_{\text{EFE}} / \text{s}$
				N_{iter}	$T_{\text{FMBEM}} / \text{s}$	N_{iter}	$T_{\text{FMBEM}} / \text{s}$				
rail radiation	25	22 956	6	55	42.62	122	92.87	32 817	7	46.21	1 962.26

6 结 论

本文发展了二维声学散射问题的 FMBEM,总结了核函数展开理论,推导了一种更精确、稳

定和高效的解析源点矩表达式,提出了一种有利于四叉树建立的数据结构,提供了详细的公式和程序实现的细节,有助于读者更好地理解二维声学 FMBEM。

无限长刚硬圆柱体在平面波入射下的散射声场计算验证了算法的精确性。应用 FMBEM 求解多圆柱体散射及轨道辐射进一步展示了算法的高效性及精确性。因为 k_a 越大或模型越复杂,相应的线性方程组越病态,预处理在迭代求解中非常重要。本文采用块对角右预处理方法,计算结构表明预处理方法可以显著提高 FMBEM 的效率。虽然预处理方法可以减少 FMBEM 在求解中的迭代次数,但是每次迭代需要进行求逆运算,因此单次迭代所需的时间大于不使用预处理方法所使用的时间。

因为对角形式 FMBEM 对于小 k_a 具有数值不稳定性,当 k_a 固定后叶子栅格包含的单元数应随模型单元数增加而增加。从而存储直接 BEM 系数的内存和预处理所需的时间也将增加。一种将自适应 FMBEM 与宽频段 FMBEM 相结合的,适用于全频段的算法正在发展中。

致谢 感谢上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室自主研究课题拟 (MSVMS201105) 对本文的资助。

参考文献:

- [1] Copley L G. Integral equation method for radiation from vibrating bodies[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1967, **41**(4A):807-816.
- [2] Schenck H A. Improved integral formulation for acoustic radiation problems[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1968, **44**(1):41-48.
- [3] Meyer W L, Bell W A, Zinn B T, Stallybrass M P. Boundary integral solutions of three dimensional acoustic radiation problems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1978, **59**(2):245-262.
- [4] Terai T. On calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1980, **69**(1):71-100.
- [5] Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory[J]. *Journal of Computational Physics*, 1985, **60**(2):187-207.
- [6] Greengard L, Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **73**(2):325-348.
- [7] Greengard L F. *The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems*[M]. USA: the MIT Press, 1988.
- [8] Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions[J]. *Journal of Computational Physics*, 1990, **86**(2):414-439.
- [9] Amini S, Profit A T J. Analysis of a diagonal form of the fast multipole algorithm for scattering theory[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 1999, **39**(4):585-602.
- [10] Amini S, Profit A T J. Multi-level fast multipole solution of the scattering problem[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2003, **27**(5):547-564.
- [11] Chen J T, Chen K H. Applications of the dual integral formulation in conjunction with fast multipole method in large-scale problems for 2D exterior acoustics[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2004, **28**(6):685-709.
- [12] Shen L, Liu Y J. An adaptive fast multipole boundary element method for three-dimensional acoustic wave problems based on the Burton-Miller formulation[J]. *Computational Mechan-*

- ics*, 2007, **40**(3):461-472.
- [13] Bapat M S, Shen L, Liu Y J. Adaptive fast multipole boundary element method for three-dimensional half-space acoustic wave problems[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2009, **33**(8/9):1113-1123.
- [14] Liu Y J. *Fast Multipole Boundary Element Method: Theory and Applications in Engineering* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [15] Crutchfield W, Gimbutas Z, Greengard L, Huang J, Rokhlin V, Yarvin N, Zhao J. Remarks on the implementation of wideband FMM for the Helmholtz equation in two dimensions[J]. *Contemporary Mathematics*, 2006, **408**:99-110.
- [16] Cheng H, Crutchfield W Y, Gimbutas Z, Greengard L F, Ethridge J F, Huang J, Rokhlin V, Yarvin N, Zhao J. A wideband fast multipole method for the Helmholtz equation in three dimensions[J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, **216**(1):300-325.
- [17] Gumerov N A, Duraiswami R. A broadband fast multipole accelerated boundary element method for the three dimensional Helmholtz equation[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2009, **125**(1):191-205.
- [18] Liu Y J, Nishimura N. The fast multipole boundary element method for potential problems: a tutorial[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2006, **30**(5):371-381.
- [19] Ciskowski R D, Brebbia C A. *Boundary Element Methods in Acoustics* [M]. New York: Springer, 1991.
- [20] Burton A J, Miller G F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems[J]. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1971, **323**(1553):201-210.
- [21] Kress R. Minimizing the condition number of boundary integral operators in acoustic and electromagnetic scattering[J]. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1985, **38**(2):323-341.
- [22] Colton D, Kress R. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*[M]. New York: Wiley, 1983.
- [23] Abramowitz M, Stegun I A. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*[M]. Washington: US Govt Print Off, 1964.
- [24] Saad Y, Schultz M H. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems[J]. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1986, **7**(3):856-869.
- [25] Sonneveld P. GGS: a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems [J]. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1989, **10**:36-52.
- [26] Labreuche C. A convergence theorem for the fast multipole method for 2 dimensional scattering problems[J]. *Mathematics of Computation*, 1998, **67**(222):553-591.
- [27] Amini S, Profit A. Analysis of the truncation errors in the fast multipole method for scattering problems[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, **115**(1/2):23-33.
- [28] Wu H J, Jiang W K, Liu Y J. Analysis of numerical integration error for Bessel integral identity in fast multipole method for 2D Helmholtz equation[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University (Science)*, 2010, **15**(6):690-693.
- [29] Coifman R, Rokhlin V, Wandzura S. The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription[J]. *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, 1993, **35**(3):7-12.
- [30] Jakob-Chien R, Alpert B K. A fast spherical filter with uniform resolution[J]. *Journal of*

Computational Physics, 1997, 136(2):580-584.

Diagonal Form Fast Multipole Boundary Element Method for 2D Acoustic Problems Based on Burton-Miller BIE Formulation and Its Applications

WU Hai-jun¹, JIANG Wei-kang¹, LIU Yi-jun²

(1. *State Key Laboratory of Machinery System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, P. R. China;*

2. *Mechanical Engineering, University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio 45221-0072, USA*)

Abstract: The formulations and implementation of the fast multipole BEM (FMBEM) for 2D acoustic problems were described in detail. The kernel function expansion theory was summarized, and the four building blocks of the FMBEM— moment calculation, moment to moment translation, moment to local translation, and local to local translation, were described in detail. A data structure for the quad-tree construction was proposed which can facilitate the implementation. An analytical moment expression was derived which was more accurate, stable and efficient than direct numerical computation. Numerical examples were presented to demonstrate the accuracy and efficiency of the FMBEM, and the radiation of a 2D vibration rail mode was simulated using FMBEM.

Key words: 2D acoustic wave problems; Helmholtz equation; fast multipole method; boundary element method