

# 半无限平面裂纹构型横向应力的 Green 函数\*

崔元庆<sup>1</sup>, 杨 卫<sup>2</sup>, 仲 政<sup>1</sup>

(1. 同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092;

2. 浙江大学 校长办公室, 杭州 310058)

**摘要:** 针对各向同性弹性无限大板中半无限裂纹,用解析函数方法求解了裂尖处横向应力的 Green 函数.加载情况为一任意集中力作用于任意一内点处.用叠加法求解了复势,它给出该平面问题的弹性解.通过渐近分析抽取复势的非奇异部分.基于该非奇异部分,用一种直接方法求解了横向应力的 Green 函数.进一步,用叠加法得到了一对对称和反对称集中力加载时的 Green 函数.然后,用得到的 Green 函数来预测铁电材料双悬臂梁试验中畴变引起的横向应力.用力电联合加载引起的横向应力来判断试验中所观察到的稳定和 unstable 裂纹扩展行为.预测结果和试验数据基本吻合.

**关键词:** Green 函数; 横向应力; 复变函数; 半无限裂纹; 断裂力学

**中图分类号:** O174.5;O343 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.08.002

## 引 言

对 Williams 展开级数<sup>[1]</sup>的渐近分析表明,裂尖附近平面应力场可由下式表示(参见文献[2]):

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{ij}(\theta) + \sigma_T \delta_{1i} \delta_{1j} + O(\sqrt{r}) \quad (i, j = 1, 2), \quad (1)$$

其中,直角坐标系定义如下: $x$ -轴沿裂纹延长线方向; $y$ -轴垂直于该方向, $K$ 是应力强度因子(SIF), $r$ 和 $\theta$ 是原点位于裂尖的极坐标系, $\Sigma(\theta)$ 是裂尖奇异应力场的普适角分布函数, $\delta_{1i}$ 和 $\delta_{1j}$ 是 Kronecker  $\delta$  函数, $\sigma_T$ 为横向应力,即首项非奇异项,它在裂尖处可以有非零值.

在断裂力学中,横向应力非常重要,对断裂行为有显著的影响.Sih 报道了 Westergaard 函数中<sup>[3]</sup>忽略了一项非零常数,该常数与横向应力有关<sup>[4]</sup>.Larsson 和 Carlsson 发现不同试件裂尖塑性区的形状和尺寸之间存在很大的差别<sup>[5]</sup>,这些差别被归因于在不同试件中横向应力的不同<sup>[6]</sup>.除了对过程区的影响,横向应力还会影响裂纹扩展行为.Cotterell 和 Rice 发现在 I 型

\* 收稿日期: 2010-07-21; 修订日期: 2011-05-16

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(10702071;11090334);中国博士后科学基金资助项目(201003281);上海博士后科学基金资助项目(10R21415800);上海市重点学科计划资助项目(B302);中德科学中心项目“Crack Growth in Ferroelectrics Driven by Cyclic Electric Loading”资助

**作者简介:** 崔元庆(1973—),男,陕西富平人,副教授,博士(联系人.Tel:+86-21-65982591;E-mail:cuiyuanqing@gmail.com).

加载条件下,横向应力掌控着裂纹扩展的稳定性<sup>[7]</sup>. Tvergaard 在混合 I-III 型加载条件下分析了横向应力对裂纹扩展的影响<sup>[8]</sup>. Li 等用位错堆积模型和奇异积分方程研究了弹性横向应力对两个平行裂纹扩展方向的影响<sup>[9]</sup>.

Larsson 和 Carlsson 通过两种有限元计算结果的平均差值来确定弹性横向应力. 利用数值分析, Leever 和 Radon 计算了几种试件无量纲的双轴应力比值, 该比值取决于横向应力<sup>[10]</sup>. 基于有限元分析, Kfoury 利用  $J$ -积分估算了横向应力<sup>[11]</sup>. 在功共轭积分基础上, Sham 利用高阶权函数方法计算了横向应力<sup>[12]</sup>. Wang 利用有限元方法计算了单边缺口、双边缺口和中心裂纹板的横向应力<sup>[13]</sup>. Broberg 利用位错组方法来计算横向应力, 得到了一个 Fredholm 方程, 它可以被精确求解<sup>[14]</sup>. Li 用奇异积分方程求解了交叉型裂纹裂尖附近的横向应力<sup>[15]</sup>. Fett 等综合了 Wigglesworth 方法和级数展开得到了应力强度因子、横向应力和权函数<sup>[16]</sup>. 针对薄壁圆柱体中圆周方向不同尺寸组合的穿透裂纹, Lewis 和 Wang 利用有限元方法得到了横向应力解<sup>[17]</sup>. Chen 等用解析函数和奇异积分方程方法调查了不同裂纹构型的横向应力<sup>[18-20]</sup>. 另外, 文献[21-22]也报道了一些断裂试件的横向应力解.

不同裂纹构型的应力强度因子解已经比较成熟, 并被收集在相关的手册中, 见文献[23-24]. 然而, 对于横向应力而言, 现有的结果还是非常有限的. 本文意在求解弹性各向同性无限大板中半无限裂纹尖端处横向应力的 Green 函数. 裂纹与负水平轴重合, 受集中力加载. 本文采用 Kolosov-Muskhelishvili 发展的复势方法来求解该平面弹性问题<sup>[25]</sup>.

## 1 在内点处作用一集中力时横向应力的 Green 函数

### 1.1 复势

根据叠加原理, 中心穿透裂纹构型在集中力加载时的复势解由 Erdogan<sup>[26]</sup> 和 Sih<sup>[27]</sup> 给出. 根据复势  $\phi(z)$  和  $\Omega(z)$ , 应力分量可表示为

$$\begin{cases} \sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 2[\phi(z) + \overline{\phi(z)}], \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[(\bar{z} - z)\phi'(z) - \phi(z) + \bar{\Omega}(z)]. \end{cases} \quad (2)$$

由上式可得

$$\sigma_{xx} = \text{Re}[-(\bar{z} - z)\phi'(z) + 3\phi(z) - \bar{\Omega}(z)], \quad (3)$$

其中 Re 表示实部.

正如 Erdogan 和 Sih 所展示的那样, 全场解可由集中载荷作用下无限大板的无裂纹解和裂纹面抵消面力解的叠加来构造. 分别用下标“1”和“2”来标记这两部分, 复势  $[\phi(z), \Omega(z)]$  可以分解为

$$[\phi(z), \Omega(z)] = [\phi_1(z), \Omega_1(z)] + [\phi_2(z), \Omega_2(z)]. \quad (4)$$

对于无裂纹时的情形, 若一集中力  $q + ip$  作用在点  $z_0$ , 则对应的解为<sup>[25]</sup>

$$\begin{cases} \phi_1(z) = -\frac{F}{z - z_0}, \\ \Omega_1(z) = \frac{\kappa F}{z - \bar{z}_0} + \frac{\bar{F}(\bar{z}_0 - z_0)}{(z - \bar{z}_0)^2}, \end{cases} \quad (5)$$

其中

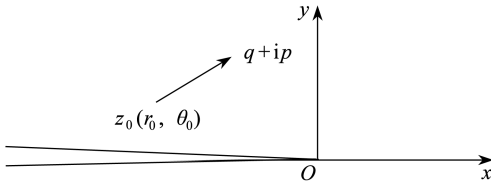


图1 作用在内点处的集中力

Fig. 1 Concentrated force acting at interior point

$$\left\{ \begin{aligned} F &= \frac{q + ip}{2\pi(1 + \kappa)}, \\ \kappa &= \begin{cases} 3 - 4\nu & (\text{平面应变}), \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & (\text{平面应力}). \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

基于文献[26-27]中的相应复势,通过抵消综合方程(2)和(5)求得的面力,对于如图1所示的半无限平面裂纹问题的复势,可得如下表达式:

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_2(z) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{F}{z - z_0} \left( 1 - \sqrt{\frac{z_0}{z}} \right) - \frac{\kappa F}{z - \bar{z}_0} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{z}_0}{z}} \right) - \right. \\ &\quad \left. \bar{F}(\bar{z}_0 - z_0) \left[ \frac{1}{(z - \bar{z}_0)^2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{z}_0}{z}} \right) - \frac{1}{z - \bar{z}_0} \frac{1}{2\sqrt{z\bar{z}_0}} \right] \right\}, \\ \Omega_2(z) &= \phi_2(z), \end{aligned} \right. \quad (7)$$

其中  $(r_0, \theta_0)$  是点  $z_0$  的极坐标,把方程(5)和(7)代入方程(4),即得该裂纹问题的复势,另外,还可以根据文献[23]中的应力强度因子来验证该复势。

## 1.2 单个集中力作用时的 Green 函数

根据方程(1)中横向应力的定义,即应力分量  $\sigma_{xx}$  的首项非奇异项,可得

$$\sigma_T \triangleq \lim_{z \rightarrow 0} \sigma_{xx} |_{\text{reg}}, \quad (8)$$

其中下标“reg”表示从渐近分析中提取的非奇异部分.综合方程(3)和(8),求解横向应力的问题退化为推导复势的非奇异项.由方程(7)的渐近分析,可得

$$\begin{aligned} \phi_2(z) |_{\text{reg}} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{F}{z - z_0} \left( 1 - \sqrt{\frac{z}{z_0}} \right) - \frac{\kappa F}{z - \bar{z}_0} \left( 1 - \sqrt{\frac{z}{\bar{z}_0}} \right) \right] - \\ &\quad \frac{1}{2} \bar{F}(\bar{z}_0 - z_0) \left\{ \frac{1}{(z - \bar{z}_0)^2} \left[ 1 - \left( 2 - \frac{z}{\bar{z}_0} \right) \sqrt{\frac{z}{\bar{z}_0}} \right] - \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{z}_0(z - \bar{z}_0)} \sqrt{\frac{z}{\bar{z}_0}} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

因此,联合方程(3)、(4)、(5)、(7)、(8)、(9),可得

$$\sigma_T = 2\text{Re} \left[ \kappa \frac{Fz_0}{z_0\bar{z}_0} + \frac{\bar{F}z_0^3}{(z_0\bar{z}_0)^2} \right], \quad (10)$$

由上式,可以确定图1中裂纹问题的 Green 函数为

$$\left\{ \begin{aligned} G_1^{\text{single}} \\ G_2^{\text{single}} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\pi(\kappa + 1)r_0} \begin{Bmatrix} \cos 3\theta_0 + \kappa \cos \theta_0 \\ \sin 3\theta_0 - \kappa \sin \theta_0 \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

基于复势理论,Chen 用不同于本文的方法求得了横向应力的表达式<sup>[18]</sup>.Chen 利用“基本场”的概念来求解横向应力,基本场被定义为外加载荷引起的无裂纹板的应力场.由基本场,可得

$$\sigma_T = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^{\text{un-cracked}} |_{z=0}. \quad (12)$$

上式表明,含裂纹板的横向应力可以由无缺陷板的应力场来获得.综合方程(2)、(5)、(12),可以求得与方程(10)同样的结论.这种一致性也为本文的推导提供了直接的支持。

## 1.3 两个特例

有两种特殊情况值得讨论.首先,如果集中力沿正  $x$ -轴作用,则对于  $\theta_0 = 0$ ,可得

$$\begin{Bmatrix} G_1^{\text{single}} \\ G_2^{\text{single}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi r_0} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

即只有点力的水平分量会引起横向应力,并且横向应力与点力水平分量的符号相同。

其次,如果集中力沿  $y$ -轴作用,则对于  $\theta_0 = \pi/2$ ,可得

$$\begin{Bmatrix} G_1^{\text{single}} \\ G_2^{\text{single}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi r_0} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

上式表明纵向拉伸应力引起压缩横向应力.同时,对于  $\theta_0 = -\pi/2$ ,可得

$$\begin{Bmatrix} G_1^{\text{single}} \\ G_2^{\text{single}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi r_0} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

上式表明纵向压缩应力引起拉伸横向应力.另一方面,在这种加载模式下,点力的水平分量对横向应力无影响。

## 2 在内点处分别作用一对对称和反对称集中力时的 Green 函数

### 2.1 对称集中力作用时的 Green 函数

如图 2(a) 所示,这部分讨论一对对称集中力  $q + ip$  和  $q - ip$  分别作用在任意点  $z_0$  和其共轭点  $\bar{z}_0$  的加载情形.由对称性,对应图 2(a) 中问题的复势可由方程(5)和(7)中的复势分别叠加它们的共轭得到

$$\begin{cases} \phi(z) = \phi_1(F, z_0, z) + \phi_1(\bar{F}, \bar{z}_0, z) + \phi_2(F, z_0, z) + \phi_2(\bar{F}, \bar{z}_0, z), \\ \Omega(z) = \Omega_1(F, z_0, z) + \Omega_1(\bar{F}, \bar{z}_0, z) + \Omega_2(F, z_0, z) + \Omega_2(\bar{F}, \bar{z}_0, z). \end{cases} \quad (16)$$

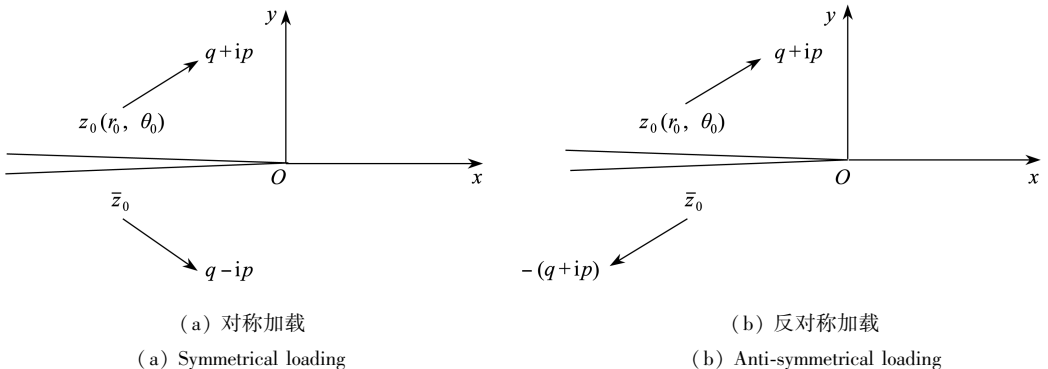


图 2 作用在内点处的一对集中力

Fig. 2 A pair of concentrated forces acting at interior point

把方程(3)、(5)、(7)、(16)代入方程(8)中,可得

$$\sigma_T = 4\text{Re} \left[ \kappa \frac{Fz_0}{z_0\bar{z}_0} + \frac{\bar{F}z_0^3}{(z_0\bar{z}_0)^2} \right], \quad (17)$$

由上式,可得

$$\begin{Bmatrix} G_1^{\text{sym}} \\ G_2^{\text{sym}} \end{Bmatrix} = \frac{2}{\pi(\kappa + 1)r_0} \begin{Bmatrix} \cos 3\theta_0 + \kappa \cos \theta_0 \\ \sin 3\theta_0 - \kappa \sin \theta_0 \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

### 2.2 反对称集中力作用时的 Green 函数

如图 2(b) 所示,这部分讨论一对反对称集中力  $q + ip$  和  $-(q + ip)$  分别作用在任意点  $z_0$

和其共轭点  $\bar{z}_0$  的加载情形. 由叠加原理, 可得

$$\begin{cases} \phi(z) = \phi_1(F, z_0, z) + \phi_1(-F, \bar{z}_0, z) + \phi_2(F, z_0, z) + \phi_2(-F, \bar{z}_0, z), \\ \Omega(z) = \Omega_1(F, z_0, z) + \Omega_1(-F, \bar{z}_0, z) + \Omega_2(F, z_0, z) + \Omega_2(-F, \bar{z}_0, z). \end{cases} \quad (19)$$

与对称加载情形类似, 可得

$$\sigma_T = 2\text{Re} \left[ \kappa \frac{F(z_0 - \bar{z}_0)}{z_0 \bar{z}_0} + \frac{\bar{F}(z_0^3 - \bar{z}_0^3)}{(z_0 \bar{z}_0)^2} \right], \quad (20)$$

由此, 可导出图 2(b) 中反对称加载时 Green 函数的表达式为

$$\begin{cases} G_1^{\text{asym}} \\ G_2^{\text{asym}} \end{cases} = \frac{2}{\pi(\kappa + 1)r_0} \begin{cases} 0 \\ \sin 3\theta_0 - \kappa \sin \theta_0 \end{cases}. \quad (21)$$

### 3 应用

Westram 等试验研究了力电联合加载的铁电陶瓷双悬臂梁 (DCB) 试验<sup>[28]</sup>, 其结果如图 3 所示. 根据应力强度因子和电场强度组合的不同, 可以观察到裂纹扩展分为 3 个不同的区域. 这 3 个区域分别是无裂纹扩展、直 (稳定) 裂纹扩展和弯曲 (不稳定) 裂纹扩展, 它们分别对应图 3 中的实心圆、三角形和五角星.

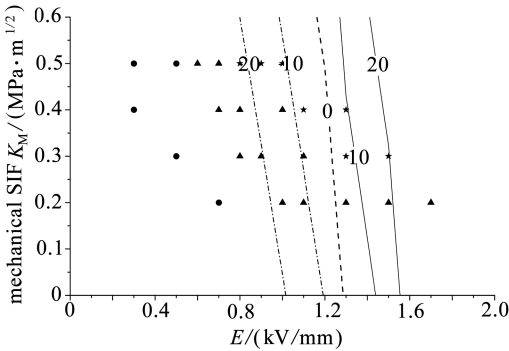


图 3 理论预测的横向应力等值线与 Rödel 和 Westram 得到的试验结果的比较 (参见文献 [29])

Fig. 3 Contours of  $T$ -stress from theoretical prediction in comparison with the experimental data of Rödel and Westram, see Ref. [29]

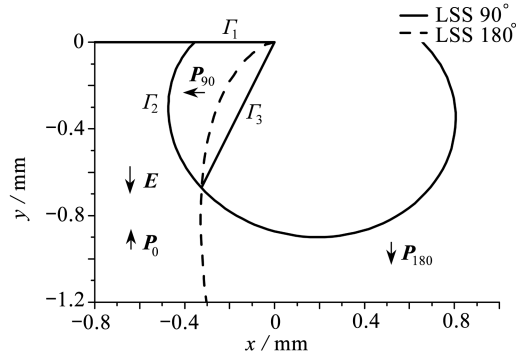


图 4 静止裂纹裂尖处  $90^\circ$  畴变区的畴界<sup>[29]</sup>

Fig. 4 Borders of the  $90^\circ$  domain switching zone around the tip of a stationary crack<sup>[29]</sup>

为了解释该试验数据, 我们提出了一个“大范围畴变” (LSS) 模型<sup>[30]</sup>. 根据 LSS 模型, 得到了静止裂纹尖端附近的畴变区, 如图 4 所示<sup>[29]</sup>, 其中  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  和  $\Gamma_3$  组成了整个  $90^\circ$  畴变区,  $E$  表示外加电场,  $P_0$  表示自发极化矢量的初始取向,  $P_{90}$  和  $P_{180}$  分别表示发生  $90^\circ$  和  $180^\circ$  畴变后的自发极化矢量. 实线代表  $90^\circ$  畴变区, 虚线代表  $180^\circ$  畴变区. 由于对称性, 图中只示出了下半部分畴变区.

畴变时, 沿  $90^\circ$  畴界会产生约束力  $T_i$ . 以对称加载时求得的 Green 函数为权函数来加权积分该约束力, 就可以得到畴变引起的横向应力  $T_{DS}$ :

$$T_{DS} = \oint_{\Gamma_i} T_i G_i d\Gamma_i. \quad (22)$$

在计算畴变引起的横向应力时, 为简单起见, 利用理想的半无限裂纹构型来近似 DCB 试件; 并且假设铁电材料是各向同性, 不考虑其压电效应. 值得注意的是, 我们根据方程 (18) 来计算  $\Gamma_2$

和  $T_3$  引起的横向应力,根据其它权函数来计算  $T_1$  引起的横向应力,详情可参见文献[29]。对于 DCB 试验,总的横向应力由两部分组成:

$$T = T_{DS} + T_M, \quad (23)$$

其中  $T_M$  表示力加载引起的横向应力,它可以由一个经验公式来确定<sup>[29]</sup>。图3示出了总的横向应力的等值线。

前已提及,横向应力可以作为一个准则的参数来判断裂纹扩展稳定性<sup>[7]</sup>。具体而言,当  $T < 0$ , 一个直的 I 型裂纹扩展是稳定的;而当  $T > 0$  时,它是不稳定的。综合加载引起的横向应力和该准则,我们可以判断不同力电加载组合下不同的裂纹扩展行为。在图3中,点虚线代表负横向应力的等值线;实线代表正横向应力等值线;虚线代表横向应力为0的等值线,它同时也作为稳定和不稳定裂纹扩展的分界线。容易看到,无裂纹扩展和稳定裂纹扩展的大部分区域和负横向应力区域一致。正如 Cotterell 和 Rice 指出的那样<sup>[7]</sup>, 横向应力的等值线图清楚表明了裂纹扩展的不稳定性是由正横向应力引起的。

## 4 结 论

利用复势方法,本文求解了弹性各向同性无限大板中半无限裂纹裂尖附近横向应力的 Green 函数。加载方式为一任意集中力作用在内点处。利用叠加法来求解该平面弹性问题的复势。由渐近分析,提取复势的非奇异项,基于该非奇异项,可以直接推导横向应力的 Green 函数。由叠加法,可以得到一对对称和反对称集中力作用下横向应力的 Green 函数。作为例子,我们应用对称加载时的 Green 函数作为权函数来计算力电联合加载下双悬臂梁试验中畸变引起的横向应力。利用得到的横向应力来区分不同力、电载荷组合下稳定和 unstable 裂纹扩展。所得预测结果和试验结果大致吻合。

**致谢** 本文作者感谢德国 Darmstadt 技术大学的 Jürgen Rüdell 教授和 Ilona Westram 博士富有启发性的试验结果。

## 参考文献:

- [1] Williams M L. On the stress distribution at the base of a stationary crack[J]. *Journal of Applied Mechanics—Transactions of the ASME*, 1957, **24**: 111-114.
- [2] 杨卫. 宏观断裂力学[M]. 北京:国防工业出版社, 1995. (YANG Wei. *Macroscopic and Microscopic Fracture Mechanics*[M]. Beijing: National Defence Press, 1995. (in Chinese))
- [3] Westergaard H M. Bearing pressures and cracks[J]. *Journal of Applied Mechanics—Transactions of the ASME*, 1939, **6**: 49-53.
- [4] Sih G C. On the Westergaard method of crack analysis[J]. *International Journal of Fracture Mechanics*, 1966, **2**(4): 628-631.
- [5] Larsson S G, Carlsson A J. Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1973, **21**(4): 263-277.
- [6] Rice J R. Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1974, **22**(1): 17-26.
- [7] Cotterell B, Rice J R. Slightly curved or kinked cracks[J]. *International Journal of Fracture*, 1980, **16**(2): 155-169.
- [8] Tvergaard V. Effect of  $T$ -stress on crack growth under mixed mode I - III loading[J]. *Inter-*

- national Journal of Solids and Structures*, 2008, **45**(18/19): 5181-5188.
- [9] Li X F, Tang B Q, Peng X L, Huang Y. Influence of elastic  $T$ -stress on the growth direction of two parallel cracks[J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2010, **34**(3): 377-390.
- [10] Leever P S, Radon J C. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries [J]. *International Journal of Fracture*, 1982, **19**(4): 311-325.
- [11] Kfoury A P. Some evaluations of the elastic  $T$ -term using Eshelby's method[J]. *International Journal of Fracture*, 1986, **30**(4): 301-315.
- [12] Sham T L. The determination of the elastic  $T$ -term using higher order weight functions[J]. *International Journal of Fracture*, 1991, **48**(2): 81-102.
- [13] Wang X. Elastic  $T$ -stress solutions for semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, **70**(6): 731-756.
- [14] Broberg K. A note on  $T$ -stress determination using dislocation arrays[J]. *International Journal of Fracture*, 2005, **131**(1): 1-14.
- [15] Li X.  $T$ -stress near the tips of a cruciform crack with unequal arms[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, **73**(6): 671-683.
- [16] Fett T, Rizzi G, Bahr H A, Bahr U, Pham V B, Balke H. Analytical solutions for stress intensity factor,  $T$ -stress and weight function for the edge-cracked half-space[J]. *International Journal of Fracture*, 2007, **146**(3): 189-195.
- [17] Lewis T, Wang X. The  $T$ -stress solutions for through-wall circumferential cracks in cylinders subjected to general loading conditions[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, **75**(10): 3206-3225.
- [18] Chen Y Z. Closed form solutions of  $T$ -stress in plane elasticity crack problems[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, **37**(11): 1629-1637.
- [19] Chen Y Z, Wang Z X, Lin X Y. Evaluation of the  $T$ -stress for interacting cracks[J]. *Computational Materials Science*, 2009, **45**(2): 349-357.
- [20] Chen Y Z, Lin X Y. Evaluation of the  $T$ -stress in branch crack problem[J]. *International Journal of Fracture*, 2010, **161**(2): 175-185.
- [21] Sherry A H, France C C, Goldthorpe M R. Compendium of  $T$ -stress solutions for two and three dimensional cracked geometries[J]. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 1995, **18**(1): 141-155.
- [22] Fett T. *A Compendium of T-Stress Solutions*[M]. FZKA-6057. Wissenschaftliche Berichte, Karlsruhe: Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, 1998.
- [23] Tada H, Paris P C, Irwin G R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*[M]. 3rd ed. New York: ASM International, 2000.
- [24] Murakami Y. *Stress Intensity Factors Handbook*[M]. Oxford: Pergamon Press, 1987.
- [25] Muskhelishvili N. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*[M]. Groningen: Noordhoff, 1954.
- [26] Erdogan F. On the stress distribution in plates with collinear cuts under arbitrary loads[C]// Rosenberg R M, Barton M V, Bisplinghoff R L. *Proceedings of the Fourth US National Congress of Applied Mechanics*. Oxford: Pergamon Press, 1962, 547-553.
- [27] Sih G C. Application of Muskhelishvili's method to fracture mechanics[J]. *Transactions, the Chinese Association for Advanced Studies*, 1962, **25**: 25-35.
- [28] Westram I, Ricoeur A, Emrich A, Rödel J, Kuna M. Fatigue crack growth law for ferroelectrics under cyclic electrical and combined electromechanical loading[J]. *Journal of the Euro-*

*pean Ceramic Society*, 2007, **27**(6): 2485-2494.

- [29] Cui Y Q, Yang W. Electromechanical cracking in ferroelectrics driven by large scale domain switching[J]. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2011, **54**(5): 957-965.
- [30] Cui Y Q, Zhong Z. Large scale domain switching around the tip of an impermeable stationary crack in ferroelectric ceramics driven by near-coercive electric field[J]. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2011, **54**(1): 121-126.

## Green's Function for $T$ -Stress of a Semi-Infinite Plane Crack

CUI Yuan-qing<sup>1</sup>, YANG Wei<sup>2</sup>, ZHONG Zheng<sup>1</sup>

(1. *School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;*

2. *University Office, Zhejiang University, Hangzhou 310058, P. R. China*)

**Abstract:** Green's function for the  $T$ -stress near a crack tip was addressed by an analytic function method for a semi-infinite crack lying in an elastical, isotropic, and infinite plate. The cracked plate was loaded by single inclined concentrated force at interior point. The complex potentials were obtained by a superposition principle, which provide the solutions to the plane problems of elasticity. The regular parts of the potentials were extracted by an asymptotic analysis. Based on the regular parts, Green's function for the  $T$ -stress was obtained in a straightforward manner. Furthermore, Green's functions were derived for a pair of symmetrically and anti-symmetrically concentrated forces by the superimposing method. Then Green's function was used to predict the domain-switch-induced  $T$ -stress in a ferroelectric double cantilever beam (DCB) test. The  $T$ -stress induced by the electromechanical loading was used to judge the stable and unstable crack growth behaviors observed in the test. The prediction results roughly agree with the experimental data.

**Key words:** Green's function;  $T$ -stress; complex variable function; semi-infinite crack; fracture mechanics