文章编号:1000-0887(2011)06-0746-08

粘滑混合边界条件下平面边界前的 Stokes 流动*

N·阿克塔[1], G·A·H·乔杜里[1], S·K·森[2]

(1. 沙赫加拉尔科技大学 数学系, 锡尔赫特 3114, 孟加拉;
2. 吉大港大学 数学和物理科学研究中心,吉大港 4331,孟加拉)

摘要: 对具有粘滑混合边界条件的平面边界,建立一个 Stokes 流动的一般性定理,利用双调和函数 A 与调和函数 B, 表示了 3 维 Stokes 流动的速度场和压力场. 关于无滑动平面边界前 Stokes 流动的早期定理,成为该一般性定理的一个特例. 进一步地,从一般性定理导出了一个推论,根据该 Stokes 流函数,给出了粘滑边界条件时刚性平面轴对称 Stokes 流动问题的解,得到了流体作用在边界上的牵引力和扭矩公式. 给出了一个说明性的例子.

关 键 词: Stokes 流动; Stokes 流函数; 粘滑边界条件; 调和函数; 双调和函数
中图分类号: O351.2 **文献标志码:** A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.06.012

引 言

最近,文献[1]给出了 Stokes 流动中速度场和压力场的表示方法,比 Happel 和 Brenner 在文献[2]中的结果更为普遍;利用该表示方法陈述并证明了,无滑动平面边界前稳态 Stokes 流动的一般性定理. 此外,文献[3]所给出的平面边界前轴对称 Stokes 流动的 Colllins 定理,正是该定理的一个特殊情况. 另外可以注意到,同样的一般定理求解低速粘性运动诱导的奇异性问题;边界无滑动刚性平面前半无限粘性流体的运动,是一般性定理的又一个特例,Aderogba[4] 提出了在两个互不相溶的半无限不可压缩粘性流体中,运动在其中一个流体中出现的奇异性. 相关地,Padmavathi 等[5]在一般的非轴对称 Stokes 流动中,使用另一种速度场和压力场的表示方法[6],对一个具有粘滑混合边界条件的球体问题,给出了其解的公式. 在这方面,Schmitz 和 Felderhof 在文献[7]中的研究值得关注:低速粘性流体流过具有相同边界条件球体时的运动. Raja Sekhar 等[8]及 Palaniappan 和 Daripa[9-10] 就一个具有粘滑混合边界条件的圆形边界,考虑了其 2 维低速粘性流体的运动. 本文,我们使用文献[1]的表示法导出一般性定理,就具有粘滑混合边界条件的平面边界,求解其 3 维低速粘性流体的运动问题.

1 基 本 理 论

不可压缩粘性流体作低速运动时的 Stokes 方程为

* 收稿日期: 2010-07-09; 修订日期: 2011-04-11
作者简介: Nazneen Akhtar(联系人. E-mail: gahc_mat@yahoo.com).
本文原文为英文,黄雅意 译,张禄坤 校.

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{q}=\operatorname{grad}p,\ \operatorname{div}\boldsymbol{q}=0,\tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{q}$ 为流体速度，p 为流体压力，μ 为粘性系数，∇^2 为 Laplace 算子.

根据 Akhtar，Rahman 和 Sen[1] 的建议，在柱面坐标系 (ρ,ϕ,z) 中，Stokes 方程(1)的通解可以表达如下：

$$\boldsymbol{q}=\operatorname{curl}\operatorname{curl}(\boldsymbol{e}_zA)+\operatorname{curl}(\boldsymbol{e}_zB),\tag{2}$$

$$p=p_0+\mu\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2A),\tag{3}$$

这里　$\nabla^4A=0,\ \nabla^2B=0.$　(4)

其中，$\boldsymbol{e}_z$ 为 z 轴正方向的单位矢量，p_0 为一常数. 为了保持分析结果的连贯性，下面给出流体速度(2)的分量表示：

$$q_\rho=\frac{\partial^2A}{\partial\rho\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial B}{\partial\phi},\tag{5}$$

$$q_\phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2A}{\partial\phi\partial z}-\frac{\partial B}{\partial\rho},\tag{6}$$

$$q_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A}{\partial\rho}\right)-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2A}{\partial\phi^2},\tag{7}$$

其中，A 为双调和函数，B 为调和函数.

Basset[11] 首先提出了粘滑混合边界条件理论，使流体在刚体表面滑过这样一类感兴趣课题的研究成为可能. 多数作了如下似乎合理的假设：垂直于刚体表面任意点流体的速度分量，等于同一刚体、同一点速度的法向分量；至于固体表面一点上流体的切向速度，与同一点上产生的切向应力成比例. 在 Lamb 的水动力学教材中[12]，已经提出了刚体表面的滑动理论. 因此，在一个可移动的不可压缩粘性流体中，当刚性平面边界 $z=0$ 静止时，根据上述的假设，边界条件可写为

$$q_z(\rho,\phi,0)=0,\tag{8}$$

$$q_\phi(\rho,\phi,0)=\frac{\lambda}{\mu}\sigma_{z\phi}(\rho,\phi,0),\tag{9}$$

$$q_\rho(\rho,\phi,0)=\frac{\lambda}{\mu}\sigma_{z\rho}(\rho,\phi,0),\tag{10}$$

其中，λ 为滑动摩擦因数；$\sigma_{z\phi}$ 和 $\sigma_{z\rho}$ 为剪应力，根据 Batchelor 的文献[13]，它们可取如下形式：

$$\sigma_{z\phi}=\mu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_z}{\partial\phi}+\frac{\partial q_\phi}{\partial z}\right),\ \sigma_{z\rho}=\mu\left(\frac{\partial q_\rho}{\partial z}+\frac{\partial q_z}{\partial\rho}\right).\tag{11}$$

由速度分量(5)～(7)和应力(11)，$z=0$ 平面上的边界条件(8)～(10)，用 A 和 B 表示为

$$A=0,\ \frac{\partial A}{\partial z}=\lambda\frac{\partial^2A}{\partial z^2},\ B=\lambda\frac{\partial B}{\partial z}.\tag{12}$$

出于第 3 节中使用的考虑，我们现在感兴趣的是，与 Stokes 方程的解(2)和(3)相容的，关于 Laplace 方程 $\nabla^2B=0$ 与双调和方程 $\nabla^4A=0$ 有关的解. 根据 Sneddon 的文献[14]，方程 $\nabla^2B=0$ 的通解，在轴 $\rho=0$ 上有限，据此

$$B=\sum_m\sum_n(\alpha_{mn}e^{nz}+\beta_{mn}e^{-nz})J_m(n\rho)S_n(m\phi),\tag{13}$$

其中

$$\mathrm{J}_m(n\rho)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\ \Gamma(m+r+1)}\left(\frac{n\rho}{2}\right)^{m+2r} \tag{14}$$

为 m 阶的第一类 Bessel 函数，且

$$S_n(m\phi)=\gamma_{mn}\cos(m\phi)+\delta_{mn}\sin(m\phi), \tag{15}$$

又根据 Stimson 和 Jeffery 的文献[15]可知，若 $A_1=A_1(\rho,\phi,z)$ 是 Laplace 方程 $\nabla^2 A_1=0$ 的一个解，则 $A_2(\rho,\phi,z)=zA_1(\rho,\phi,z)$ 是双调和方程 $\nabla^4 A_2=0$ 的一个解.

2 定 理

假定在一个无界的不可压缩粘性流体中，双调和函数 $A_0(\rho,\phi,z)$ 与调和函数 $B_0(\rho,\phi,z)$ 表示 3 维的低速运动，且其奇异性出现在 $z\geqslant 0$ 区域. 若平面 $z=0$ 为粘滑边界，在相同区域上一个新的流动，可以用下面的双调和函数与调和函数来描绘：

$$A=A_0(\rho,\phi,z)-A_0(\rho,\phi,-z)+\frac{1}{2\lambda}z\mathrm{e}^{z/(2\lambda)}\int_z^{\infty}\mathrm{e}^{-z/(2\lambda)}\left(2\frac{\partial}{\partial z}A_0(\rho,\phi,-z)-z\nabla^2A_0(\rho,\phi,-z)\right)\mathrm{d}z, \tag{16}$$

$$B=B_0(\rho,\phi,z)+B_0(\rho,\phi,-z)-\frac{2}{\lambda}\mathrm{e}^{z/\lambda}\int_z^{\infty}\mathrm{e}^{-z/\lambda}B_0(\rho,\phi,-z)\mathrm{d}z. \tag{17}$$

证明 假设不考虑刚性边界时，初始流动为

$$A_0=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\mathrm{e}^{nz}+b_nz\mathrm{e}^{nz})w_n(\rho,\phi), \tag{18}$$

$$B_0=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{nz}s_n(\rho,\phi), \tag{19}$$

其中

$$w_n(\rho,\phi)=\sum_{m=0}^{n}\mathrm{J}_m(n\rho)(A_{mn}\cos(m\phi)+B_{mn}\sin(m\phi)), \tag{20}$$

$$s_n(\rho,\phi)=\sum_{m=0}^{n}\mathrm{J}_m(n\rho)(C_{mn}\cos(m\phi)+D_{mn}\sin(m\phi)). \tag{21}$$

假定存在粘滑平面 $z=0$ 的新流场取如下形式：

$$A=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\mathrm{e}^{-nz}+b_n'z\mathrm{e}^{-nz})w_n(\rho,\phi), \tag{22}$$

$$B=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n'\mathrm{e}^{-nz}s_n(\rho,\phi), \tag{23}$$

其中求和表达式中，带有未知常数 a_n' 和 b_n' 的摄动项需要确定. 若

$$a_n'=-a_n, \tag{24}$$

$$b_n'=-\frac{2n}{1+2n\lambda}a_n-\frac{1-2n\lambda}{1+2n\lambda}b_n, \tag{25}$$

$$c_n'=\frac{n\lambda-1}{n\lambda+1}c_n, \tag{26}$$

则双调和函数 A 与调和函数 B 满足粘滑混合边界条件(12).

将式(24)和(25)代入式(22)，得到

$$A=A_0(\rho,\phi,z)-A_0(\rho,\phi,-z)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(na_n+b_n)}{1+2\lambda n}z\mathrm{e}^{-nz}w_n(\rho,\phi), \tag{27}$$

则下面可以给出一个闭式的双调和函数. 由双调和函数基(18),导出如下两个重要的结果:

$$\nabla^2 A_0(\rho,\phi,-z)=\sum_{n=1}^{\infty}2nb_n\mathrm{e}^{-nz}w_n(\rho,\phi), \tag{28}$$

$$2\frac{\partial}{\partial z}A_0(\rho,\phi-z)-z\nabla^2 A_0(\rho,\phi,-z)=-\sum_{n=1}^{\infty}2(na_n+b_n)\mathrm{e}^{-nz}w_n(\rho,\phi). \tag{29}$$

对式(29)两边乘以 $\mathrm{e}^{-z/(2\lambda)}$,然后在区间$(z,\infty)$上对 z 进行积分,得

$$\int_z^{\infty}\mathrm{e}^{-z/(2\lambda)}\left(2\frac{\partial}{\partial z}A_0(\rho,\phi,-z)-z\nabla^2 A_0(\rho,\phi,-z)\right)\mathrm{d}z=$$

$$-4\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_n+b_n}{1+2\lambda n}\mathrm{e}^{-(1+2\lambda n)z/(2\lambda)}w_n(\rho,\phi). \tag{30}$$

将式(30)代入式(27),得到一个闭式的双调和函数(22):

$$A=A_0(\rho,\phi,z)-A_0(\rho,\phi,-z)+$$

$$\frac{1}{2\lambda}z\mathrm{e}^{z/(2\lambda)}\int_z^{\infty}\mathrm{e}^{-z/(2\lambda)}\left(2\frac{\partial}{\partial z}A_0(\rho,\phi,-z)-z\nabla^2 A_0(\rho,\phi,-z)\right)\mathrm{d}z. \tag{31}$$

现在我们来求闭式的调和函数(23). 将式(26)代入式(23)得到

$$B=B_0(\rho,\phi,z)+B_0(\rho,\phi,-z)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1+\lambda n}c_n\mathrm{e}^{-nz}s_n(\rho,\phi). \tag{32}$$

由调和函数基(19),立即得到

$$B_0(\rho,\phi,-z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-nz}s_n(\rho,\phi), \tag{33}$$

对式(33)两边乘以 $\mathrm{e}^{-z/\lambda}$,然后在区间(z,∞)上对 z 进行积分,得

$$\int_z^{\infty}\mathrm{e}^{-z/\lambda}B_0(\rho,\phi,-z)\mathrm{d}z=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda n}\mathrm{e}^{-(n\lambda+1)z/\lambda}s_n(\rho,\phi). \tag{34}$$

将上述结果用于式(32),得到闭式的调和函数(23):

$$B=B_0(\rho,\phi,z)+B_0(\rho,\phi,-z)-\frac{2}{\lambda}\mathrm{e}^{z/\lambda}\int_z^{\infty}\mathrm{e}^{-z/\lambda}B_0(\rho,\phi,-z)\mathrm{d}z. \tag{35}$$

因此,当存在粘滑平面 $z=0$ 时,双调和函数(31)与调和函数(35)组成了 $z\geqslant 0$ 区域中新流场的解,流场基由 $A_0(\rho,\phi,z)$ 和 $B_0(\rho,\phi,z)$ 表示. 注意到,式(31)和(35)的奇异性,分别就是同一区域中 $A_0(\rho,\phi,z)$ 和 $B_0(\rho,\phi,z)$ 的奇异性. 定理证毕.

推论 1　对于以 z 轴为轴对称的 Stokes 流动,取

$$A(\rho,\phi,z)\equiv A(\rho,z),\ B(\rho,\phi,z)\equiv 0,\ \psi=\rho\frac{\partial A}{\partial\rho},$$

其中 ψ 为 Stokes 流函数. 然后得到关系式

$$\Lambda^2\psi=\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\nabla^2 A),$$

其中算子

$$\Lambda\equiv\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

为 Collins 在文献[16]讨论轴对称流动中用到的. 因此由式(31),就可以得到平面 $z=0$ 前为粘滑混合边界条件时,轴对称流动的一个 Stokes 流函数公式,

$$\psi=\psi_0(\rho,z)-\psi_0(\rho,-z)+$$

$$\frac{1}{2\lambda}z\mathrm{e}^{z/(2\lambda)}\int_z^\infty \mathrm{e}^{-z/(2\lambda)}\left(2\frac{\partial}{\partial z}\psi_0(\rho,z)-z\Lambda^2\psi_0(\rho,-z)\right)\mathrm{d}z. \tag{36}$$

推论 2 对于参数 $\lambda=0$，边界条件(12)即简化为无滑动条件。因此，对于这种情况，由式(27)和(29)得到

$$A=A_0(\rho,\phi,z)-A_0(\rho,\phi,-z)+2z\frac{\partial}{\partial z}A_0(\rho,\phi,-z)-z^2\nabla^2A_0(\rho,\phi,-z), \tag{37}$$

同样地，由式(32)和(33)得到

$$B=B_0(\rho,\phi,z)-B_0(\rho,\phi,-z). \tag{38}$$

公式(37)和(38)的结果，与 Akhtar 等[1]得到的无滑动平面边界时，粘性流动的通解公式相一致。

推论 3 当参数 $\lambda\to\infty$，边界条件(12) 变成平面 $z=0$ 上无剪应力的条件，即

$$A=0,\ \frac{\partial^2A}{\partial z^2}=0,\ \frac{\partial B}{\partial z}=0. \tag{39}$$

对于这种情况，式(27)和(32)可分别变为

$$A=A_0(\rho,\phi,z)-A_0(\rho,\phi,-z), \tag{40}$$

$$B=B_0(\rho,\phi,z)+B_0(\rho,\phi,-z), \tag{41}$$

它们表示无剪力边界 $z=0$ 前的一个 Stokes 流动。

3 平面边界上的牵引力和扭矩

流体作用在平面边界 $z=0$ 上的牵引力 $\boldsymbol{F}$ 和扭矩 $\boldsymbol{T}$，可以由下面的基本公式得到

$$\boldsymbol{F}=\int_{\rho=0}^{\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}(\sigma_{z\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\sigma_{z\phi}\boldsymbol{e}_\phi+\sigma_{zz}\boldsymbol{e}_z)_{z=0}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi, \tag{42}$$

$$\boldsymbol{T}=\int_{\rho=0}^{\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}(\sigma_{z\phi}\boldsymbol{e}_z-\sigma_{zz}\boldsymbol{e}_\phi)_{z=0}\,\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi, \tag{43}$$

其中 $\sigma_{zz}=-p+2\mu\partial q_z/\partial z$[13] 为垂直于 z 平面上的法向应力。

由边界条件(8)~(10)、双调和函数(16)与调和函数(17)，上述的牵引力和扭矩公式可以写成如下的标准形式：

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mu}{\lambda}\int_{\rho=0}^{\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\Big\{(\boldsymbol{i}\cos\phi+\boldsymbol{j}\sin\phi)q_\rho(\rho,\phi,0)+$$
$$(-\boldsymbol{i}\sin\phi+\boldsymbol{j}\cos\phi)q_\phi(\rho,\phi,0)+\boldsymbol{k}\lambda\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(2\frac{\partial^2A}{\partial z^2}-3\nabla^2A\right)\right)_{z=0}\Big\}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho, \tag{44}$$

$$\boldsymbol{T}=\frac{\mu}{\lambda}\int_{\rho=0}^{\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\Big\{\boldsymbol{k}q_\phi(\rho,\phi,0)+$$
$$\lambda(\boldsymbol{i}\sin\phi-\boldsymbol{j}\cos\phi)\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(2\frac{\partial^2A}{\partial z^2}-3\nabla^2A\right)\right)_{z=0}\Big\}\rho^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho. \tag{45}$$

特别地，如果 $A_0=A_0(\rho,\phi,z)$ 是一个调和函数，则式(44)和(45)可简化为

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mu}{\lambda}\int_{\rho=0}^{\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\Big\{(\boldsymbol{i}\cos\phi+\boldsymbol{j}\sin\phi)q_\rho(\rho,\phi,0)+$$
$$(-\boldsymbol{i}\sin\phi+\boldsymbol{j}\cos\phi)q_\phi(\rho,\phi,0)+\boldsymbol{k}4\lambda\left(\frac{\partial^3}{\partial z^3}A_0(\rho,\phi,z)\right)_{z=0}\Big\}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{T}=\frac{\mu}{\lambda}\int_{\rho=0}^{\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\Big\{\boldsymbol{k}q_\phi(\rho,\phi,0)+$$

$$4\lambda(\boldsymbol{i}\sin\phi-\boldsymbol{j}\cos\phi)\left(\frac{\partial^3}{\partial z^3}A_0(\rho,\phi,z)\right)_{z=0}\Bigg\}\rho^2\mathrm{d}\,\phi\mathrm{d}\,\rho. \tag{47}$$

4 一个说明性的例子:在平面边界前的旋转子

考虑无边界不可压缩粘性流体,在直角坐标为 $(0,0,c)$ 的一点上,有强度为 $\hat{\alpha}=(\alpha/(8\pi\mu))\boldsymbol{i}$ 的旋转子,其中 $\boldsymbol{i}$(沿 x 轴正向的单位向量)为旋转子的轴线方向. 然后,按照 Akhtar 等[1]的方法,双调和函数 A_0 与调和函数 B_0 的相应的表达式,取为

$$A_0=\frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{1}{\rho}R_1\sin\phi,\ B_0=-\frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{1}{\rho R_1}(z-c)\cos\phi, \tag{48}$$

其中 $R_1=(\rho^2+(z-c)^2)^{1/2}$. 显然,由 A_0 和 B_0 描绘的奇异性(旋转子)出现在 $z\geqslant 0$ 区域;因此,利用上述定理,得到以平面 $z=0$ 为边界,在 $z\geqslant 0$ 区域中作低速粘性流动时的双调和函数 $A(\rho,\phi,z)$ 与调和函数 $B(\rho,\phi,z)$ 为

$$A=\frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{1}{\rho}\left\{R_1-R_2+\frac{1}{\lambda}z\mathrm{e}^{z/(2\lambda)}\int_z^{\infty}\mathrm{e}^{-z/(2\lambda)}\frac{z+c}{R_2}\mathrm{d}z\right\}\sin\phi, \tag{49}$$

$$B=\frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{1}{\rho}\left\{-\frac{z-c}{R_1}+\frac{z+c}{R_2}-\frac{2}{\lambda}\mathrm{e}^{z/\lambda}\int_z^{\infty}\mathrm{e}^{-z/\lambda}\frac{z+c}{R_2}\mathrm{d}z\right\}\cos\phi, \tag{50}$$

其中 $R_2=(\rho^2+(z+c)^2)^{1/2}$. 通过对比测试[17]很容易地发现,对于 λ 的有限值,出现在式(49)和(50)中的广义积分是收敛的;基于上述分析,式(49)和(50)改写为

$$A=\frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{1}{\rho}\left\{R_1-R_2+z\sum_{n=1}^{\infty}2^n\lambda^{n-1}\frac{\partial^n}{\partial z^n}R_2\right\}\sin\phi, \tag{51}$$

$$B=\frac{\alpha}{8\pi\mu}\frac{1}{\rho}\left\{-\frac{z-c}{R_1}+\frac{z+c}{R_2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}\frac{\partial^n}{\partial z^n}R_2\right\}\cos\phi. \tag{52}$$

注意到,式(51)和(52)中含 R_2 的项,组成了 $z\leqslant 0$ 区域的映象系统.

最后,分析 $z=0$ 平面上的牵引力和扭矩. 为此,需要知道在 $z=0$ 上的速度分量 q_ρ,q_ϕ 的表达式,以及函数 A_0 对 z 的 3 阶导数的表达式;对于 λ 的小值,在区间[0,1)上给出如下:

$$\begin{aligned}q_\rho(\rho,\phi,0)=\frac{\alpha}{8\pi\mu}\Bigg\{&\lambda\left(-6\frac{1}{R_0^3}+12c^2\frac{1}{R_0^5}\right)+\lambda^2\left(90c\frac{1}{R_0^5}-120c^3\frac{1}{R_0^7}\right)+\\&\lambda^3\left(186\frac{1}{R_0^5}-1\,650c^2\frac{1}{R_0^7}+1\,680c^4\frac{1}{R_0^9}\right)+o(\lambda^4)\Bigg\}\sin\phi,\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}q_\phi(\rho,\phi,0)=\frac{\alpha}{8\pi\mu}\Bigg\{&\lambda 6c^2\frac{1}{R_0^5}-\lambda^2 30c^3\frac{1}{R_0^7}+\\&\lambda^3\left(-24\frac{1}{R_0^5}+30c^2\frac{1}{R_0^7}+210c^4\frac{1}{R_0^9}\right)+o(\lambda^4)\Bigg\}\cos\phi,\end{aligned} \tag{54}$$

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial z^3}A_0(\rho,\phi,z)\right)_{z=0}=\frac{\alpha}{8\pi\mu}3c\rho\frac{1}{R_0^5}\sin\phi, \tag{55}$$

其中　$R_0=(\rho^2+c^2)^{1/2}$.

利用这些结果,显然可以由式(46)和(47),得到平面 $z=0$ 上的牵引力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ 和扭矩 $\boldsymbol{T}=\alpha\boldsymbol{i}$.

5 结　论

根据调和函数与双调和函数,对于具有粘滑混合边界条件的刚性平面边界,作低速粘性流

体运动问题,求得以 Stokes 方程解为基础的一般性定理.在一般性定理的公式中,与这些函数有关的边界条件,相当方便地简化为所包含的参数 λ .特别地,注意到当 $\lambda=0$,得到平面边界无滑动时著名的 Stokes 流动公式;当 $\lambda\to\infty$,得到平面边界无剪应力时的 Stokes 流动.进一步地,从一般性定理导出了推论 1,给出了刚性平面前具有粘滑边界条件时的低速轴对称粘性流动,值得注意是所用到的 Stokes 流函数.通过平面边界前旋转子所产生的粘性流体运动问题的求解,论证了该定理的有效性.

致谢 作者对孟加拉吉大港大学数学和物理科学研究中心的 Islam J N 博士和 Emeritus 教授所给予的帮助和鼓励及有用的建议表示感谢.

参考文献:

[1] 阿克塔 N,冉赫曼 F,森 S K. 平面边界前 Stokes 流动基本的奇异性[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(7): 729-734. (Akhtar N, Rahman F, Sen S K. Stokes flow due to fundamental singularities before a plane boundary[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(*English Edition*), 2004, **25**(7): 799-805.)

[2] Happel J, Brenner H. *Low Reynolds Number Hydrodynamics*[M]. 4th print. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1986: 71-77.

[3] Collins W D. Note on a sphere theorem for the axisymmetric Stokes flow of a viscous fluid [J]. *Mathematika*, 1958, **5**(2): 118-121.

[4] Aderogba K. On Stokeslets in a two-fluid space[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 1976, **10**(2): 143-151.

[5] Padmavathi B S, Amaranath T, Nigam S D. Stokes flow past a sphere with mixed slip-stick boundary conditions[J]. *Fluid Dynamics Research*, 1993, **11**(5): 229-234.

[6] Palaniappan D, Nigam S D, Amaranath T, Usha R. Lamb's solution of Stokes's equations: a sphere theorem[J]. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1992, **45**(1): 47-56.

[7] Schmitz R, Felderhof B U. Creeping flow about a sphere[J]. *Physica A*, 1978, **92**(3/4): 423-437.

[8] Raja Sekhar G P, Tejeswara Rao K, Padmavathi B S, Amaranath T. Two-dimensional Stokes flows with slip-stick boundary conditions[J]. *Mechanics Research Communications*, 1995, **22**(5): 491- 501.

[9] Palaniappan D, Daripa P. Interior Stokes flows with stick-slip boundary conditions[J]. *Physica A*, 2001, **297**(1/2): 37-63.

[10] Palaniappan D, Daripa P. Exterior Stokes flows with stick-slip boundary conditions[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2002, **53**(2): 281-307.

[11] Basset A B. *A Treatise on Hydrodynamics*[M]. Vol 2. New York: Dover, 1961: 271.

[12] Lamb H. *Hydrodynamics*[M]. 6th ed. New York, Dover: Dover Publications, 1945: 576, 597-604.

[13] Batchelor G K. *An Introduction to Fluid Dynamics*[M]. London, N W: Cambridge University Press, 1967, **1**: 600-602.

[14] Sneddon I N. *Elements of Partial Differential Equations*[M]. Singapore: McGraw-Hill Book Co, 1985: 159.

[15] Stimson M, Jeffery G B. The motion of two spheres in a viscous fluid[J]. *Proceedings of the Royal Society of London*, *Series A*, 1926, **111**(757): 110-116.

[16] Collins W D. A note on Stokes's stream function for the slow steady motion of viscous fluid before plane and spherical boundaries[J]. *Mathematika*, 1954, **1**(2): 125-130.

[17] Spiegel M R. *Theory and Problems of Advanced Calculus*[M]. McGraw Hill, Inc, 1963: 260-261.

Stokes Flow Before a Plane Boundary With Mixed Stick-Slip Boundary Conditions

N. Akhtar[1], G. A. H. Chowdhury[1], S. K. Sen[2]

(1. *Department of Mathematics*, *Shahjalal University of Science and Technology*, *Sylhet*-3114, *Bangladesh*;

2. *Research Centre for Mathematical and Physical Sciences*, *University of Chittagong*, *Chittagong*-4331, *Bangladesh*)

Abstract: A general theorem for Stokes flow about a plane boundary with mixed stick-slip boundary conditions was established. This was done by making use of a representation for the velocity and pressure fields in three-dimensional Stokes flow, in terms of a biharmonic function A and a harmonic function B. The earlier theorem on Stokes flow before a no-slip plane boundary was shown to be a special case of the present theorem. Furthermore, a corollary of the theorem was also derived which offers the solution to a problem of axisymmetric Stokes flow about a rigid plane with stick-slip boundary conditions, in terms of the Stokes stream function. The formulae for the drag and torque exerted by the fluid on the boundary were found. An illustrative example was given.

Key words: Stokes flow; Stokes's stream function; stick-slip boundary conditions; harmonic function; biharmonic function