

# Euler 型梁-柱结构的非线性 稳定性和后屈曲分析\*

朱媛媛<sup>1</sup>, 胡育佳<sup>2</sup>, 程昌钧<sup>3</sup>

- (1. 上海师范大学 计算机科学与技术系, 上海 200234;
2. 上海理工大学 机械工程学院, 上海 200093;
3. 上海大学 理学院 力学系, 上海 200072)

(我刊编委程昌钧来稿)

**摘要:** 在有限变形的假设下,建立了位于非线性弹性基础上非线性弹性 Euler 型梁-柱结构的广义 Hamilton 变分原理,并由此导出了任意变截面 Euler 型梁-柱结构的 3 维非线性数学模型,其中考虑了转动惯性、几何非线性、材料非线性等因素的影响.作为模型的应用,分析了弹性基础上一端完全固支另一端部分固支,并受轴力作用的均质等截面线性弹性 Euler 型梁的非线性稳定性和后屈曲;结合打靶法和 Newton 法,给出了一种计算平凡解(前屈曲状态)、分叉点(临界载荷)和分叉解(后屈曲状态)的数值方法,对前两个分支点和相应分支解,成功地实现了数值计算,并考虑了基础反力和惯性矩对分支点的影响.

**关键词:** 梁-柱结构; 广义 Hamilton 原理; 非线性稳定性; 打靶法和 Newton 法; 后屈曲分析

**中图分类号:** O342      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.06.004

## 引 言

梁-柱结构在科学和技术中具有广泛的应用.随着高科技的发展,结构变轻、变细、变长,结构大变形和材料的非线性等要求人们对结构的非线性问题进行更精细地分析,以提供更适当的设计理论基础.与线性系统相比,非线性系统具有更复杂的性质.而要揭示梁-柱结构的非线性现象,解释其机理,最关键的问题是建立合理的数学模型.利用不同的方法,人们已建立了梁-柱型结构非线性分析的若干理论,如陈至达<sup>[1]</sup>, Antman<sup>[2]</sup>等利用弧长和方向子理论建立的弹性细杆的大变形理论等.这些理论的优点是精致、优美,对一些简单的问题能够得到解析解,并能够解释非线性现象的机理.但是,它们的主要缺陷是难以应用于复杂结构和复杂加载的情况.朱正佑、朱媛媛等<sup>[3-4]</sup>以弧长为参数建立了具有初始位移和间断性条件的梁-柱型结构大变

\* 收稿日期: 2010-12-24; 修订日期: 2011-01-14

**基金项目:** 国家自然科学基金青年基金资助项目(11002084);上海市浦江人才计划资助项目(07pj14073)

**作者简介:** 朱媛媛(1971—),女,上海人,副教授,博士(联系人. Tel: +86-21-56380560; E-mail: yuanyuan\_zhu@hotmail.com).

形分析的数学模型,并用以求解了结构的大变形和稳定性问题,得到了很好的结果.胡育佳、朱媛媛等<sup>[5]</sup>把这种模型应用于具有不连续性条件和初始转角的框架结构大变形静动力学分析中,并发展了微分求积单元法(DQEM),同时提出了求解非线性微分-代数方程组的一种方法,求解了受集中力和分布力作用的框架和组合框架的大变形动力学问题.

不过,在工程技术中,一般遇到的梁-柱型结构的大变形往往是中等程度的,即和轴向位移相比,挠度是比较大的,而且挠度与截面的宽度或者厚度是同量级的,所以应该考虑挠度引起的转动对轴向变形的影响,因此建立相应的非线性理论是需要的.

本文在保守力和有限变形的假设下,首先建立了位于非线性弹性基础上具有3次非线性弹性 Euler 型梁-柱结构的广义 Hamilton 变分原理,并由此导出了相应的3维非线性数学模型.作为模型的退化和推广,可以得到许多不同类型的数学模型以适合工程技术的不同需要.作为模型的应用,分析了位于弹性基础上均质等截面梁的非线性稳定性和后屈曲问题,并结合打靶法和 Newton 法,给出了一种通过计算原问题的摄动问题的正常解的方法,来计算原问题分支解的新的数值计算方法,并对一些给定的参数,成功地实现了一端完全固支一端部分固支并受轴力作用的线性弹性梁的非线性稳定性计算,包括前屈曲状态(平凡解)、临界载荷(分支点)和后屈曲状态(分叉解).可以看到,虽然在本文中求解的常微分方程组是以一个特定的问题为背景,但是所给出的数值计算方法对其他类似问题也是适当的.

## 1 数学模型

考察置于非线性弹性基础上承受任意横向载荷作用的均质弹性梁-柱结构(图1所示).取  $Ox$  轴为截面的中性轴,  $Oy$ 、 $Oz$  为截面的惯性主轴.假设截面关于惯性主轴  $y$  和  $z$  都是对称的,但是可变的,截面面积为  $A$ ,长度为  $l$ ,密度为  $\rho$ .并假设在  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向作用于结构上的载荷分别为  $q_u(x, t)$ 、 $q_v(x, t)$  和  $q_w(x, t)$ ,同时,在端部  $x = l$  可以受轴力  $N$ 、剪切力  $\bar{T}_v$ 、 $\bar{T}_w$  和力矩  $\bar{M}_y$ 、 $\bar{M}_z$  的作用.假设  $u$ 、 $v$ 、 $w$  是中性轴的位移, $y$ 、 $z$  是到中性轴的距离,则 Euler 型梁-柱结构的位移模式为

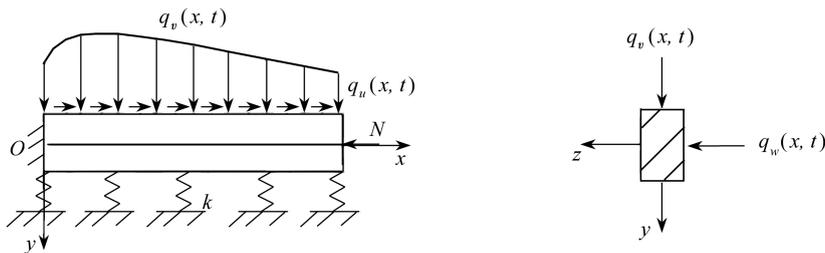


图1 梁-柱结构的物理模型

Fig. 1 Physical model

$$u_1 = u(x, t) - y \frac{\partial v}{\partial x} - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v_1 = v(x, t), \quad w_1 = w(x, t). \quad (1)$$

在有限变形的框架下,弯曲应变和位移的关系为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2)$$

假设结构的材料是一种3次非线性弹性材料,弯曲应力和弯曲应变之间的关系为

$$\sigma_x = E_1 \varepsilon_x + E_2 \varepsilon_x^2 + E_3 \varepsilon_x^3, \quad (3)$$

式中,  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $E_3$  分别是材料的线性和广义非线性弹性模量,它们可以是  $x$  的函数.

假设基础的材料也是 3 次非线性弹性材料,则沿坐标轴方向基础对结构的反力可表示为

$$p_s = k_{s1}s + k_{s2}s^2 + k_{s3}s^3, \quad s = u, v, w, \quad (4)$$

其中,  $k_{s1}, k_{s2}, k_{s3}$  是基础的相应线性和非线性刚度系数,这里  $s = u, v, w$  分别表示  $x, y$  和  $z$  方向。

对于图 1 所示的梁-柱结构,可定义结构的动能  $T$ ,应变能  $U$  和外力的功  $W$  为

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} \rho \left\{ A \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + I_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right)^2 + I_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right)^2 \right\} dx, \quad (5a)$$

$$U = \iiint_A \int_0^l \left[ \frac{1}{2} E_1 \varepsilon_x^2 + \frac{1}{3} E_2 \varepsilon_x^3 + \frac{1}{4} E_3 \varepsilon_x^4 \right] dx dy dz, \quad (5b)$$

$$W = \int_0^l \sum_{s=u,v,w} q_s s dx + \frac{N}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \int_0^l \sum_{s=u,v,w} \left( \frac{1}{2} k_{s1} s + \frac{1}{3} k_{s2} s^2 + \frac{1}{4} k_{s3} s^3 \right) s dx + \bar{T}_v v(l) + \bar{T}_w w(l) + \bar{M}_z \frac{\partial v}{\partial x}(l) + \bar{M}_y \frac{\partial w}{\partial x}(l). \quad (5c)$$

式(5a)中的第 4 项和第 5 项分别为考虑中面转动惯性影响引起的动能,

$$I_y = \iint_A z^2 dA, \quad I_z = \iint_A y^2 dA$$

为横截面对  $y$  轴和  $z$  轴的惯性矩。

**Hamilton 变分原理** 在满足几何约束和位移边界条件,并在初始和终止时刻具有指定运动的一切可能位移中,真实的位移  $u, v, w$  使泛函

$$\Pi = \int_0^T H dt = \int_0^T - (U - W - T) dt \quad (6)$$

取驻值,式中  $H = - (U - W - T)$  为 Hamilton 函数,其中  $T, U$  和  $W$  由式(5)给定。

对式(5)中的  $T, U$  和  $W$  进行变分,并将所得结果代入变分方程  $\delta \Pi = 0$  中(为了节省篇幅,这里略去了推导过程和所得的表达式),注意到在初始和终止时刻结构具有指定的运动,同时注意到在梁的内部  $\delta u, \delta v, \delta w$  的任意性,在力端处  $\delta u, \delta v, \delta w, \delta(\partial v/\partial x), \delta(\partial w/\partial x)$  的任意性,则可推得梁-柱结构的位移  $u, v, w$  满足的 3 维非线性运动微分方程和力端的边界条件。对于均质等截面非线性弹性 Euler 型梁-柱结构,式(5)中的系数与  $x$  无关,这时,运动微分方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E_1 A \frac{\partial}{\partial x} A_1 - E_2 A \frac{\partial}{\partial x} [(A_1)^2] - E_3 A \frac{\partial}{\partial x} [(A_1)^3] - E_2 \frac{\partial}{\partial x} B - 3E_3 \frac{\partial}{\partial x} [A_1 B] + p_u(u) - q_u = 0, \quad (7a)$$

$$\rho \left[ A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_z \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] + E_1 I_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - E_1 A \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_1 \frac{\partial v}{\partial x} \right] - E_2 A \frac{\partial}{\partial x} \left[ (A_1)^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right] - E_3 A \frac{\partial}{\partial x} \left[ (A_1)^3 \frac{\partial v}{\partial x} \right] - E_2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ B \frac{\partial v}{\partial x} \right] + 2E_2 I_z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ A_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + 3E_3 I_z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (A_1)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + E_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_1 - 3E_3 \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_1 B \frac{\partial v}{\partial x} \right] + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + p_v(v) - q_v = 0, \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left[ A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_y \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + E_1 I_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - E_1 A \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right] - E_2 A \frac{\partial}{\partial x} \left[ (A_1)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \\ & E_3 A \frac{\partial}{\partial x} \left[ (A_1)^3 \frac{\partial w}{\partial x} \right] - E_2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ B \frac{\partial w}{\partial x} \right] + 2E_2 I_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \\ & 3E_3 I_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (A_1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + E_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} C_2 - 3E_3 \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_1 B \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \\ & N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_w(w) - q_w = 0, \end{aligned} \quad (7c)$$

式中,  $A_1(u, v, w)$ ,  $B(v, w)$ ,  $C_1(v, w)$ ,  $C_2(v, w)$  是与位移有关的非线性微分算子, 它们的定义为

$$\begin{cases} A_1(u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ B(v, w) = I_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + I_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2, \\ C_1(v, w) = \bar{I}_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^3 + 3\bar{I}_{yz} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2, \\ C_2(v, w) = 3\bar{I}_{yz} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{I}_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3. \end{cases} \quad (8)$$

另外, 式(7b)和(7c)中

$$\rho I_z \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \rho I_y \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

项是考虑截面转动惯性的结果。而

$$\bar{I}_y = \iint_A z^4 dA, \bar{I}_z = \iint_A y^4 dA, \bar{I}_{yz} = \iint_A y^2 z^2 dA$$

分别为横截面对  $y$  轴和  $z$  轴的高阶惯性矩。

将运动微分方程(7)代入变分方程  $\delta\Pi = 0$ , 则得到边界虚功方程, 由此可得到力端的边界条件。如果结构的两端均为完全固定的, 则当  $x = 0, l$  时,  $\delta u = \delta v = \delta w = \delta(\partial v/\partial x) = \delta(\partial w/\partial x) = 0$ , 因此, 边界虚功方程自动成立。如  $x = 0$  或  $x = l$  端自由或给定力和力矩, 将得到力端的边界条件。例如, 对于图1所示的均质等截面线弹性梁-柱结构(即令式(3)中的  $E_1 = E, E_2 = E_3 = 0$ ), 力端  $x = l$  的边界条件为

$$\begin{cases} EAA_1 = 0, \\ EAA_1 \frac{\partial v}{\partial x} - EI_z \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) + N \frac{\partial v}{\partial x} - \bar{T}_v = 0, \\ EAA_1 \frac{\partial w}{\partial x} - EI_y \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) + N \frac{\partial w}{\partial x} - \bar{T}_w = 0, \\ EI_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \bar{M}_z = 0, \\ EI_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \bar{M}_y = 0, \end{cases}$$

这里,  $N$  为轴力,  $\bar{T}_v, \bar{T}_w$  为端部剪力,  $\bar{M}_z, \bar{M}_y$  为端部力矩, 另外注意到功的表达式(5c), 轴力  $N$  对结构的功为

$$\frac{N}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx,$$

因此轴力  $N$  已直接进入运动微分方程(7)中了. 同时, 注意到力端的边界条件中包括非线性微分算子  $A_1(u, v, w)$ , 因此, 力端的边界条件一般是非线性的.

初始条件: 设梁-柱结构在  $t < 0$  处于自然状态, 且当  $t = 0$  时满足如下初始条件:

$$u|_{t=0} = u^0, \dot{u}|_{t=0} = \dot{u}^0; v|_{t=0} = v^0, \dot{v}|_{t=0} = \dot{v}^0; w|_{t=0} = w^0, \dot{w}|_{t=0} = \dot{w}^0, \quad (9)$$

其中,  $u^0, \dot{u}^0, v^0, \dot{v}^0, w^0, \dot{w}^0$  是仅与坐标  $x$  有关的已知函数, 当初始时刻结构处于静止时, 这些函数为 0.

这样, 在初始条件(9)和适当的边界条件下的非线性偏微分方程组(7a) ~ (7c) 构成了在有限变形条件下分析非线性弹性 Euler 型梁-柱结构的力学行为的一般数学模型.

## 2 梁-柱结构的非线性稳定性分析

下面考察在  $x = 0$  端完全固支, 在  $x = l$  端部分固支, 并受轴力  $N$  作用的线弹性梁的静态非线性稳定性问题, 这时所有的量与时间无关, 令  $E_1 = E$ . 引入无量纲变量和参数如下:

$$\begin{cases} X = \frac{x}{l}, U = \frac{u}{l}, V = \frac{v}{l}, W = \frac{w}{l}, \beta_z = \frac{I_z}{Al^2}, \beta_y = \frac{I_y}{Al^2}, \lambda = \frac{N}{EA}, \\ K_{s1} = \frac{k_{s1}l^2}{EA}, K_{s2} = \frac{k_{s2}l^3}{EA}, K_{s3} = \frac{k_{s3}l^4}{EA}, Q_s = \frac{q_s l}{EA}, \quad s = u, v, w, \end{cases} \quad (10)$$

则由式(10), 无量纲形式的控制方程和边界条件为

$$\begin{cases} \frac{d}{dX} \bar{A}_1 - P_u + Q_u = 0, \bar{A}_1 = \frac{dU}{dX} + \frac{1}{2} \left( \frac{dV}{dX} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{dX} \right)^2, \\ \beta_z \frac{d^4 V}{dX^4} - \frac{d}{dX} \left[ \bar{A}_1 \frac{dV}{dX} \right] + \lambda \frac{d^2 V}{dX^2} + P_v - Q_v = 0, \\ \beta_y \frac{d^4 W}{dX^4} - \frac{d}{dX} \left[ \bar{A}_1 \frac{dW}{dX} \right] + \lambda \frac{d^2 W}{dX^2} + P_w - Q_w = 0, \\ U = V = W = \frac{dV}{dX} = \frac{dW}{dX} = 0 \quad (\text{当 } X = 0), \\ \bar{A}_1 = V = W = \frac{dV}{dX} = \frac{dW}{dX} = 0 \quad (\text{当 } X = 1). \end{cases} \quad (11)$$

为了便于讨论, 引进如下新的未知函数:

$$\begin{cases} y_1 = U, y_2 = y_1' + \frac{1}{2} y_4^2 + \frac{1}{2} y_8^2, y_3 = V, y_4 = y_3', y_5 = y_4', \\ y_6 = y_5', y_7 = W, y_8 = y_7', y_9 = y_8', y_{10} = y_9', \end{cases} \quad (12)$$

将式(12)代入方程(11), 控制微分方程(11)转化为一组等价的一阶非线性常微分方程组, 可简写成

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(X, \mathbf{y}, \lambda), \quad 0 \leq X \leq 1, \\ y_1(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_7(0) = y_8(0) = 0, \\ y_2(1) = y_3(1) = y_4(1) = y_7(1) = y_8(1) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

其中  $\mathbf{y}(X) = (y_1(X), y_2(X), \dots, y_{10}(X))^T$ ,  $\mathbf{f}(X, \mathbf{y}, \lambda) = (f_1, f_2, \dots, f_{10})^T$ , 并且

$$\left\{ \begin{aligned} f_1 &= y_2 - \frac{1}{2}(y_4)^2 - \frac{1}{2}(y_8)^2, \\ f_2 &= K_{u1}y_1 + K_{u2}y_1^2 + K_{u3}y_1^3 - Q_u, \\ f_3 &= y_4, f_4 = y_5, f_5 = y_6, \\ f_6 &= \frac{K_{u1}}{\beta_z}y_1y_4 + \frac{K_{u2}}{\beta_z}y_1^2y_4 + \frac{K_{u3}}{\beta_z}y_1^3y_4 + \frac{1}{\beta_z}y_2y_5 - \frac{\lambda}{\beta_z}y_5 - \\ &\quad \frac{K_{v1}}{\beta_z}y_3 - \frac{K_{v2}}{\beta_z}y_3^2 - \frac{K_{v3}}{\beta_z}y_3^3 + \frac{Q_v}{\beta_z} - \frac{Q_u}{\beta_z}y_4, \\ f_7 &= y_8, f_8 = y_9, f_9 = y_{10}, \\ f_{10} &= \frac{K_{u1}}{\beta_y}y_1y_8 + \frac{K_{u2}}{\beta_y}y_1^2y_8 + \frac{K_{u3}}{\beta_y}y_1^3y_8 + \frac{1}{\beta_y}y_2y_9 - \frac{\lambda}{\beta_y}y_9 - \\ &\quad \frac{K_{w1}}{\beta_y}y_7 - \frac{K_{w2}}{\beta_y}y_7^2 - \frac{K_{w3}}{\beta_y}y_7^3 + \frac{Q_w}{\beta_y} - \frac{Q_u}{\beta_y}y_8. \end{aligned} \right.$$

这样,一端完全固支一端部分固支,并受轴力  $N$  作用,且位于弹性基础上的线弹性 Euler 型梁-柱结构非线性稳定性分析的控制微分方程(11)被转化为常微分方程的两点边值问题(13),这就是本文最后要讨论的控制微分方程.下面提出的方法虽然是针对计算问题(13)的平凡解、分支点和分叉解提出的数值方法,但是它也具有一般性.

### 3 数值计算方法和计算结果

为了对以无量纲轴力  $\lambda$  为分支参数的两点边值问题(13)进行分叉解的计算和分析,本文将联合采用打靶法和 Newton 迭代法.为此考察如下初值问题:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{f}(X, \mathbf{y}, \lambda) \quad 0 \leq X \leq 1, \\ y_1(0) &= y_3(0) = y_4(0) = y_7(0) = y_8(0) = 0, \\ (y_2(0), y_5(0), y_6(0), y_9(0), y_{10}(0))^T &= \boldsymbol{\beta}, \end{aligned} \right. \quad (14)$$

其中  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)^T$  是矢量值参数.

对固定的  $\lambda$  和  $\boldsymbol{\beta}$ ,记初值问题(14)的解为  $\mathbf{y}(X, \lambda, \boldsymbol{\beta})$ .显然,它是问题(13)的解的充要条件是  $\boldsymbol{\beta}$  满足下列方程:

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\beta}, \lambda) \equiv (y_2(1, \lambda, \boldsymbol{\beta}), y_3(1, \lambda, \boldsymbol{\beta}), y_4(1, \lambda, \boldsymbol{\beta}), y_7(1, \lambda, \boldsymbol{\beta}), y_8(1, \lambda, \boldsymbol{\beta}))^T = \mathbf{0}. \quad (15)$$

尽管不能得到  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\beta}, \lambda)$  的表达式,但显然求边值问题(13)的解等价于求有限维方程(15)的解.

设当  $\lambda = \lambda^*$  时,  $\mathbf{y}(X)$  是边值问题(13)的解,令  $\boldsymbol{\beta}^* = (y_2(0), y_5(0), y_6(0), y_9(0), y_{10}(0))^T$ ,则  $\mathbf{y}(X) = \mathbf{y}(X, \lambda^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ ,并且  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\beta}^*, \lambda^*) = \mathbf{0}$ .这时如果  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\beta}, \lambda)$  的 Jacobi 矩阵  $\mathbf{G}_\beta(\boldsymbol{\beta}^*, \lambda^*)$  非奇异,则称  $\mathbf{y}(X)$  为边值问题(13)的正常解,反之,则称为奇异解.

为了求边值问题(13)的正常解,可对式(15)采用 Newton 迭代法,其迭代步骤是:选取适当的初值  $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ ,若第  $k$  次迭代值  $\boldsymbol{\beta}^{(k)}$  已知,则  $k+1$  次迭代值  $\boldsymbol{\beta}^{(k+1)}$  可由下式确定:

$$\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(k)} - \mathbf{G}_\beta(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*)^{-1} \cdot \mathbf{G}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*). \quad (16)$$

在式(16)的具体计算中,需要得到  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*)$  和  $\mathbf{G}_\beta(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*)$ .为了求得  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*)$ ,需要计算  $\mathbf{y}(1, \lambda^*, \boldsymbol{\beta}^{(k)})$ .它可以通过求解常微分方程的初值问题(14)来完成,其中令  $\lambda = \lambda^*$ ,  $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{(k)}$ .

为了求得  $\mathbf{G}_\beta(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*)$ , 将初值问题(14) 在  $\lambda = \lambda^*$ ,  $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{(k)}$  处对  $\beta_j$  求导, 可得  $\partial \mathbf{y} / \partial \beta_j$  是下面初值问题的解:

$$\begin{cases} \mathbf{z}' = \mathbf{f}_y(X, \mathbf{y}(X, \boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*), \lambda^*) \cdot \mathbf{z}, & 0 < X < 1, \\ z_1(0) = z_3(0) = z_4(0) = z_7(0) = z_8(0) = 0, \\ (z_2(0), z_5(0), z_6(0), z_9(0), z_{10}(0))^T = \mathbf{e}_j, \end{cases} \quad (17)$$

其中  $\mathbf{e}_j = (\underbrace{0, \dots, 1, \dots, 0}_j)^T$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ .

记式(17)的解为

$$\mathbf{Z}_j(X, \boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*) = (Z_{j1}(X, \boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*), Z_{j2}(X, \boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*), \dots, Z_{j10}(X, \boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*))^T,$$

则由式(16)可知

$$\mathbf{G}_\beta(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*) = (Z_{ji}(1)) = \left( \frac{\partial y_i}{\partial \beta_j}(1) \right), \quad i = 2, 3, 4, 7, 8; j = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (18)$$

因此, 迭代公式(16)中 Jacobi 矩阵  $\mathbf{G}_\beta(\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*)$  可以通过计算初值问题(17)中 5 个常微分方程组的解得到. 由于式(17)中出现了由式(14)确定的函数  $\mathbf{y}(X, \lambda^*, \boldsymbol{\beta}^{(k)})$ , 所以在计算  $\mathbf{y}(X, \lambda^*, \boldsymbol{\beta}^{(k)})$  及  $\mathbf{Z}_j(X, \boldsymbol{\beta}^{(k)}, \lambda^*)$  时, 应该同时对式(14)和(17)进行联立计算.

1) 平凡解支的计算 设当  $\lambda \geq 0$  时,  $\mathbf{y}(X, \lambda)$  是边值问题(13)的一个平凡解, 如果平凡解支上的解  $\mathbf{y}(X, \lambda_c)$  是奇异解, 则称  $\lambda_c$  是平凡解支上的分支点或特征值. 可以证明, 平凡解支上除了一些孤立的特征值以外都是正常解, 所以可采用如下方法实现平凡解支的数值计算: 给定步长  $h$ , 令  $\lambda_k = kh$ , 如果当  $\lambda = \lambda_{k-1}, \lambda_k$  时, 边值问题(13)的正常解  $\mathbf{y}(X, \lambda_{k-1}), \mathbf{y}(X, \lambda_k)$  已经求出, 则为求  $\lambda = \lambda_{k+1}$  时的正常解  $\mathbf{y}(X, \lambda_{k+1})$ , 可首先令初值

$$\boldsymbol{\beta}^{(0)} = \mathbf{y}(0, \lambda_{k-1}) + \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k-1} - \lambda_k} (\mathbf{y}(0, \lambda_{k-1}) - \mathbf{y}(0, \lambda_k)),$$

然后按照 Newton 迭代公式(16)计算, 直到满足条件  $|\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\beta}^{(k)}| < \varepsilon$  时, 则  $\mathbf{y}(X, \boldsymbol{\beta}^{(k+1)})$ ,  $\lambda_{k+1}$  就是当  $\lambda = \lambda_{k+1}$  时, 我们要求的边值问题(13)的解  $\mathbf{y}(X, \lambda_{k+1})$ ;

2) 分支点的确定 为了确定平凡解支上分支点的位置, 可以在计算平凡解支  $\mathbf{y}(X, \lambda)$  的同时, 采用二分法求解方程  $\Delta(\lambda) = \det \mathbf{G}_\beta = 0$  的根来实现. 为此在计算平凡解支  $\mathbf{y}(X, \lambda_k)$  的同时, 监控  $\Delta(\lambda_k) = \det \mathbf{G}_\beta$  的正负号, 当发现有两个相邻的平凡解  $\mathbf{y}(X, \lambda_\xi)$  和  $\mathbf{y}(X, \lambda_{\xi+1})$  使得  $\Delta(\lambda)$  的符号发生变化时, 即  $\Delta(\lambda_\xi) \cdot \Delta(\lambda_{\xi+1}) < 0$ , 则在区间  $[\lambda_\xi, \lambda_{\xi+1}]$  上必有一个分支点(特征值), 这时对区间  $[\lambda_\xi, \lambda_{\xi+1}]$  采用二分法迭代计算, 直到求得  $\lambda_c$ , 使得  $\Delta(\lambda_c) \approx 0$ , 这时  $\lambda_c$  就是所要求的近似特征值.

3) 分叉解支的计算 由于不能得到有限维方程(15)的解析表达式, 所以现有计算有限维分支方程的分叉解的方法不再适用<sup>[6]</sup>. 本文仍将采用 Newton 迭代法来计算分叉解, 这里的关键是如何成功获得边值问题(13)的一个分叉解支上某个正常解的近似值. 为了获得这样一个近似值, 对给定边值问题(13)作小摄动. 设  $\hat{\mathbf{y}}(X, \hat{\lambda})$  是平凡解支上接近于奇点的一个已知的正常解, 其中  $\hat{\lambda}$  接近于特征值  $\lambda_c$ , 而且  $\hat{\lambda} < \lambda_c$ . 作如下边值问题:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(X, \mathbf{y}, \lambda) + \hat{\mathbf{y}}' - \mathbf{f}(X, \hat{\mathbf{y}} + \theta \boldsymbol{\delta}, \hat{\lambda}), & 0 \leq X \leq 1, \\ \{y_1(0), y_3(0), y_4(0), y_7(0), y_8(0), y_2(1), y_3(1), y_4(1), y_7(1), y_8(1)\}^T = \theta \boldsymbol{\delta}, \end{cases} \quad (19)$$

其中,  $\boldsymbol{\delta}$  是一个给定的非零向量,  $\theta$  是一个小参数. 显然  $\theta = 0$  时, 边值问题(19)退化成(13), 所以当  $\theta$  很小时, 边值问题(19)是式(13)的一个摄动问题. 按照奇点理论<sup>[7]</sup>, 经过摄动后的边值问题(19)在原问题的奇点附近没有奇点, 并且摄动问题的解支是原问题解支的一个近似, 从

而可以从摄动问题(19)的正常解  $\lambda = \hat{\lambda}, y = \hat{y} + \theta \delta$  出发,按正常解支的延拓方法计算式(19)的解支  $\bar{y}(X, \lambda)$ ,直到求得  $\bar{y}(X, \bar{\lambda})$ ,其中  $\bar{\lambda} > \lambda_c$ .然后再利用  $\bar{y}(X, \bar{\lambda})$  作为 Newton 迭代法(16)的初值,就可求得原边值问题(13)的一个分支解支上的正常解  $z(X, \bar{\lambda})$ .

利用上述方法和过程,成功地进行了数值计算,得到了当梁结构不受分布力,且基础为各向同性线性弹性材料时,前两个分支点和相应的分支解.表1和表2列出了基础反力和惯性矩对前两个分支点的影响.

表1 分支点

Table 1 Bifurcation points

$\beta_z$	$\beta_y$	$K_{u1}$	$K_{v1}$	$K_{w1}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
0.01	0.01	0	0	0	0.26	0.53
0.01	0.01	0.1	0.1	0.1	0.27	0.54
0.01	0.01	1	1	1	0.35	0.60
0.01	0.01	10	10	10	0.98	1.71

表2 分支点

Table 2 Bifurcation points

$\beta_z$	$\beta_y$	$K_{u1}$	$K_{v1}$	$K_{w1}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
0.01	0.01	1	1	1	0.35	0.60
0.1	0.1	1	1	1	3.00	5.90
0.5	0.5	1	1	1	14.77	29.37
1	1	1	1	1	29.47	58.72

图2和图3分别为  $\beta_z = \beta_y = 0.01, K_{u1} = K_{v1} = K_{w1} = 1$  时,第一分支点  $\lambda_1 = 0.35$  和第二分支点  $\lambda_2 = 0.60$  处的平凡解支和分支解支.

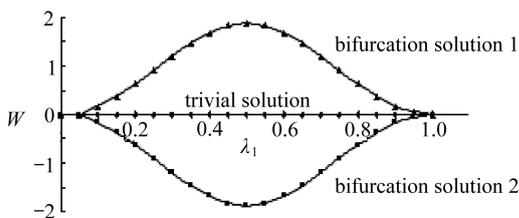


图2  $\lambda_1$  对应的平凡解和分支解

Fig. 2 Trivial solution and bifurcation solutions for  $\lambda_1$

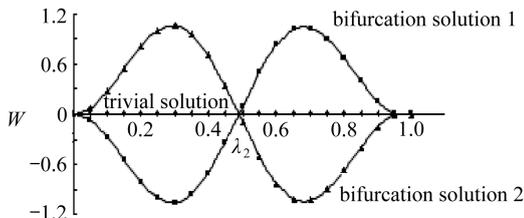


图3  $\lambda_2$  对应的平凡解和分支解

Fig. 3 Trivial solution and bifurcation solutions for  $\lambda_2$

## 4 结 论

在有限变形的假设下,建立了位于3次非线性弹性基础上,3次非线性弹性 Euler 型梁-柱结构的广义 Hamilton 变分原理,并由此导出了相应的3维非线性数学模型.作为应用,研究了均质等截面线性 Euler 型梁-柱结构的非线性稳定性和后屈曲.引入新的变量之后,将原问题转化为常微分方程的两点边值问题,并利用打靶法将此两点边值问题化为相应的初值问题.根据奇点理论,并结合 Newton 法和打靶法,提出了一种数值计算平凡解支、分支点和分叉解支的新方法,并成功地实现了均质等截面线性 Euler 型梁-柱结构的非线性稳定性和后屈曲分析,给出了相应的数值结果和分支解.

致谢 感谢上海师范大学科研项目(SK201032)对本文的资助.

### 参考文献:

[1] 陈至达. 杆、板、壳大变形理论[M]. 北京:科学出版社,1994. ( CHEN Zhi-da. *Finite Deformation Theory for Rods, Plates and Shells*[M]. Beijing: Science Press, 1994. (in Chinese))

[2] Antman S S. *The Theory of Rods*[M]. Handbuch der Physik, Vol VI a/2. Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1972.

[3] 朱媛媛, 三浦纪, 朱正佑. 弹性地基 HDAJ 接头桩的非线性稳定性分析[J]. 力学季刊, 2005,

- 26(2): 216-223. (ZHU Yuan-yuan, Miura Fusanori, ZHU Zheng-you. Non-linear stability analysis for HDAJ spliced piles in elastic ground [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2005, 26(2): 216-223. (in Chinese))
- [4] 高杉, 朱媛媛, 朱正佑. 具有初始弯曲的桩基稳定性分析[J]. 上海大学学报(自然科学版), 2009, 15(3):290-295. (GAO Shan, ZHU Yuan-yuan, ZHU Zheng-you. Analysis of stability of pile with initial bending [J]. *Journal of Shanghai University (Natural Science)*, 2009, 15(3): 290-295. (in Chinese))
- [5] 胡育佳, 朱媛媛, 程昌钧. 在动载荷作用下框架结构大变形分析的微分代数方法[J]. 应用数学和力学, 2008, 29(4):398-408. (HU Yu-jia, ZHU Yuan-yuan, CHENG Chang-jun. Differential-algebraic approach to large deformation analysis of frame structures subjected to dynamic loads[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2008, 29(4):441-452. )
- [6] 朱正佑, 程昌钧. 分支问题的数值计算方法[M]. 兰州:兰州大学出版社, 1989. (ZHU Zheng-you, CHENG Chang-jun. *Numerical Methods for Bifurcation Problems*[M]. Lanzhou: Press of Lanzhou University, 1989. (in Chinese))
- [7] Arnold V I. *Dynamical Systems VI, Singularity Theory I: Local and Global Theory*[M]. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

## Analysis of Non-Linear Stability and Post-Buckling for the Euler-Type Beam-Column Structure

ZHU Yuan-yuan<sup>1</sup>, HU Yu-jia<sup>2</sup>, CHENG Chang-jun<sup>3</sup>

(1. *Department of Computer Science and Technology, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P. R. China;*

2. *School of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, P. R. China;*

3. *Department of Mechanics, School of Science, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)*

**Abstract:** Based on the assumption of finite deformation, the Hamilton variational principle was extended to a nonlinear elastic Euler-type beam-column structure located on a nonlinear elastic foundation, and the corresponding 3-dimension mathematical model for analyzing the non-linear mechanical behaviors of structures was established, in which the effects of rotation inertia, non-linearity of material and geometry were considered. As application, the non-linear stability and the post-buckling for a linear elastic beam with equal cross-section and located on an elastic foundation were analyzed, here, one end of beam was fully fixed, and the other was partially fixed and subjected to an axial force. A new numerical technique was proposed to calculate the trivial solution, bifurcation points and bifurcation solutions by the shooting method and Newton-Raphson interactive method. The first and the second bifurcation points and the corresponding bifurcation solutions were calculated successfully. The effects of foundation resistances and inertia moments on the bifurcation points were considered.

**Key words:** beam-column structure; Hamilton variational principle; nonlinear stability; shooting method and Newton-Raphson interactive method; post-bulking