文章编号:1000-0887(2011)05-0623-12

非-Archimedean 随机空间中混合型泛函方程的解及稳定性*

张石生[1], R·萨达提[2], G·萨德基[2]

(1. 宜宾学院 数学系, 四川 宜宾 644007;
2. 伊斯兰阿萨德大学 数学系, 科学研究所, 14778, 阿史拉非 尔斯法哈尼大道,德黑兰, 伊朗)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 在非-Archimedean 随机赋范空间的框架下,证明了 Euler-Lagrange 二次映象的广义稳定性. 另外,文中还介绍了 随机空间理论、非-Archimedean 空间理论、以及泛函方程理论之间的联系.

关 键 词: 广义 Hyers-Ulam 稳定性; Euler-Lagrange 泛函方程; 非-Archimedean 赋范空间; p-adic 域

中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.05.012

1 引言及预备知识

泛函方程理论之一的经典问题是:“一个近似满足泛函方程 ε 的函数, 必然接近于方程 ε 的准确解,这一结论何时为正确?” 如果这一问题的答案是肯定的,则称方程 ε 是稳定的[1]. 在过去的数 10 年,泛函方程的一些稳定性问题被许多数学家研究过. 建议读者参考综述性文章[1-3]和专著[4-7]及其参考文献.

最近, Alsina[8], Mirmostafaee 等[9-10], Miheţ 和 Radu[11], Miheţ 等[12], Baktash 等[13]以及 Saadati 等[14-20]在模糊、概率及随机赋范空间的框架下,研究过的稳定性问题.

2 解及稳定性结果

泛函方程

$$f(x+y)+f(x+z)+f(y+z)=f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y+z) \tag{1}$$

称为二次的加性型的泛函方程.

引理 1 如果一偶函数 $f: X\rightarrow Y$ 满足泛函方程(1),则 f 是二次的.

证明 在泛函方程(1)中令 $x=y=z=0$,则有 $f(0)=0$. 在式(1) 中代 z 以 $-y$,于是对一切的 $x,y\in X$ 有

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)+f(-y). \tag{2}$$

因为 f 是一偶函数,由式(2) 得知 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$. 故 f 是一二次函数.

* **收稿日期:** 2011-01-11; **修订日期:** 2011-03-14

作者简介: 张石生(1934—),男,云南曲靖人,教授(E-mail: changss@yahoo.cn);
R. Saadati,教授,博士(联系人. E-mail: rsaadati@eml.cc).

引理 2 如果一奇函数 $f: X \to Y$ 满足 泛函方程(1),则 f 是加性的.

证明 在式(2)中,令 $x+y=u, x-y=v$,即得 $f(u)+f(v)=2f((u+v)/2)$,因为 $f(0)=0$,故对所有的 $x,y \in X$, f 是一加性函数.

定理 1 一函数 $f: X \to Y$ 对所有的 $x,y \in X$ 满足方程(1),当且仅当存在一对称的双加性函数 $B: X \times X \to Y$ 及一加性函数 $A: X \to Y$ 使得 $f(x) = B(x,x) + A(x)$ 对所有的 $x \in X$ 成立.

证明 设函数 f 满足方程(1),我们可以把 f 分解成如下的奇部和偶部:

$$f_e(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \; f_o(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

易于证明,函数 f_e 和 f_o 满足方程(1). 于是由引理 1 和引理 2,函数 f_o 和 f_e 分别是加性的和二次的函数. 于是存在一对称的、双加性的函数 $B: X \times X \to Y$ 使得 $f_e(x) = B(x,x)$ 及一加性函数 $A: X \to Y$ 使得 $f_o(x) = A(x)$. 从而对所有的 $x \in X$ 有

$$f(x) = f_o(x) + f_e(x) = B(x,x) + A(x).$$

反之,设对每一 $x \in X$, $f(x) = B(x,x) + A(x)$,其中函数 B 是对称的双加性的,而 A 是加性的. 易于证明

$$\begin{aligned} & f(x+y) + f(x+z) + f(y+z) = \\ & \quad B(x,x) + A(x) + B(y,y) + A(y) + B(z,z) + A(z) + \\ & \quad B(x+y+z, x+y+z) + A(x+y+z) = \\ & \quad f(x) + f(y) + f(z) + f(x+y+z). \end{aligned}$$

故函数 f 满足方程(1). □

3 非-Archimedean 随机赋范空间

与在文献[11,21-23]中一样,下面我们采用非-Archimedean 随机赋范空间理论中常用的术语、符号及约定. 在本文中处处用 $\boldsymbol{\Delta}^+$ 表一切概率分布函数的空间,即:所有这样的的映象 $F: \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \to [0,1]$ 所构成的空间,其中每一 F 在 $\mathbf{R}$ 上是左 - 连续的、不减的, $F(0) = 0$ 而且 $F(+\infty) = 1$. D^+ 是 $\boldsymbol{\Delta}^+$ 的一子集,其由 $l^- F(+\infty) = 1$ 的这样的函数 $F \in \boldsymbol{\Delta}^+$ 所组成,其中 $l^- f(x)$ 表函数 f 在点 x 处的左极限,即, $l^- f(x) = \lim_{t \to x^-} f(t)$. 空间 $\boldsymbol{\Delta}^+$ 按函数的通常的点态序是偏序的,即, $F \leqslant G$ 当且仅当 $F(t) \leqslant G(t)$ 对所有的 $t \in \mathbf{R}$ 成立. 按这一序, $\boldsymbol{\Delta}^+$ 的极大元就是由下式给出的分布函数 ε_0:

$$\varepsilon_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } t \leqslant 0, \\ 1, & \text{如果 } t > 0. \end{cases}$$

三角范数(简称为 t- 范数)是这样的一个二元运算 $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, 它是交换的、结合的、单调的而且以 1 为其单位元. 基本的例子是 Lukasiewicz t- 范数 T_L : $T_L(a,b) = \max(a+b-1, 0)$, $\forall a,b \in [0,1]$ 及 t- 范数 T_P, T_M, T_D, 其中

$$T_P(a,b) := ab, \; T_M(a,b) := \min\{a,b\},$$

$$T_D(a,b) := \begin{cases} \min(x,y), & \text{如果 } \max(x,y) = 1, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

如果 T 是一 t- 范数,则 $x_T^{(n)}$ 定义为:对每一 $x \in [0,1]$

$$x_T^{(n)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } n = 0, \\ T(x_T^{(n-1)}, x), & \text{如果 } n \geqslant 1. \end{cases}$$

一 t- 范数 T 称为 Hadžić-型的(记之以 $T \in H$),如果函数族 $(x_T^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ 在 $x = 1$ 处是等度连

续的. 例如 $T_M \in H$,这里 $T_M(a,b)=\min\{a,b\}$ (参见文献[24]).

其它重要的三角范数是(参见文献[25]):

(i) Sugeno-Weber 族 $\{T_\lambda^{SW}\}_{\lambda\in[-1,\infty]}$ 其由下式定义:

$$T_\lambda^{SW}(x,y)=\begin{cases}T_D(x,y), & \text{如果 } \lambda=-1,\\ T_P(x,y), & \text{如果 } \lambda=\infty,\\ \max\left(0,\dfrac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda}\right), & \text{如果 } \lambda\in(-1,\infty).\end{cases}$$

(ii) Domby 族 $\{T_\lambda^{D}\}_{\lambda\in[0,\infty]}$ 其由下式定义:如果 $\lambda=0$,则等于 T_D; 如果 $\lambda=\infty$,则等于 T_M, 如果 $\lambda\in(0,\infty)$, 则

$$T_\lambda^{D}(x,y)=\frac{1}{1+(((1-x)/x)^\lambda+((1-y)/y)^\lambda)^{1/\lambda}}.$$

(iii) Aczel-Alsina 族 $\{T_\lambda^{AA}\}_{\lambda\in[0,\infty]}$ 其由下式定义:如果 $\lambda=0$,则等于 T_D;如果 $\lambda=\infty$,则等于 T_M;如果 $\lambda\in(0,\infty)$, 则

$$T_\lambda^{AA}(x,y)=e^{-(|\lg x|^\lambda+|\lg y|^\lambda)^{1/\lambda}}.$$

一 t-范数 T (借助结合性) 用唯一的一种方式可扩充为 n-元运算, 即对 $(x_1,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$,定义 $T(x_1,\cdots,x_n)$ 如下:

$$\mathrm{T}_{i=1}^{0}x_i=1,\ \mathrm{T}_{i=1}^{n}x_i=T(\mathrm{T}_{i=1}^{n-1}x_i,x_n)=T(x_1,\cdots,x_n).$$

T 也可以扩充为可数元运算,即对$[0,1]$中的任一序列$(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, 定义

$$\mathrm{T}_{i=1}^{\infty}x_i=\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_{i=1}^{n}x_i.$$

命题 1[25]

(i) 当 $T\geqslant T_L$ 时,下面的关系式成立:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_{i=1}^{\infty}x_{n+i}=1\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(1-x_n)<\infty;$$

(ii) 如果 T 是 Hadžić-型的,则对$[0,1]$中的每一满足 $\lim_{n\to\infty}x_n=1$ 的序列$\{x_n\}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_{i=1}^{\infty}x_{n+i}=1;$$

(iii) 如果 $T\in\{T_\lambda^{AA}\}_{\lambda\in(0,\infty)}\cup\{T_\lambda^{D}\}_{\lambda\in(0,\infty)}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_{i=1}^{\infty}x_{n+i}=1\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(1-x_n)^\alpha<\infty;$$

(iv) 如 $T\in\{T_\lambda^{SW}\}_{\lambda\in[-1,\infty)}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_{i=1}^{\infty}x_{n+i}=1\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(1-x_n)<\infty.$$

一域 K 称为非-Archimedean 域,如果在 K 中赋予一函数$|\cdot|:K\to[0,\infty)$使得$|r|=0$ 当且仅当 $r=0$, $|rs|=|r||s|$而且 $|r+s|\leqslant\max\{|r|,|s|\}$, $\forall r,s\in K$.

显然$|1|=|-1|=1$ 而且 $|n|\leqslant 1$, $\forall n\in\mathbf{N}$. 映象$|\cdot|$ 称为取平凡值的,如果$|r|=1$, $\forall r\in K$, $r\neq 0$,且$|0|=0$. 设 X 是域 K 上的一向量空间,其具有一取非平凡值的非-Archimedean 的映象$|\cdot|$. 函数 $\|\cdot\|:X\to[0,\infty)$ 称为非-Archimedean 范数,如果其满足下面的条件:

(i) $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$;

(ii) 对任意的 $r\in K$, $x\in X$, $\|rx\|=|r|\|x\|$;

(iii) 强三角不等式(超度量); 即

$$\|x+y\| \leqslant \max\{\|x\|, \|y\|\} \qquad (x,y \in X).$$

则 $(X, \|\cdot\|)$ 称为非-Archimedean 赋范空间. 由于

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \max\{\|x_{j+1} - x_j\| : m \leqslant j \leqslant n-1\} \qquad (n > m),$$

故一序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 的,当且仅当 $\{x_{n+1} - x_n\}$ 收敛于某一非-Archimedean 赋范空间中的零点. 一非-Archimedean 赋范空间是完备的,如果其中每一 Cauchy 序列都是收敛的.

1897 年,Hensel[26] 发现了 p-adic 数(理论类比于复分析中幂级数的数). 给定一素数 p,对任意的非零的有理数 x,存在唯一的整数 $n_x \in \mathbf{Z}$ 使得 $x = (a/b)p^{n_x}$,其中 a 和 b 为不能被 p 除尽的整数. 则 $|x|_p := p^{-n_x}$ 在 $\mathbf{Q}$ 上定义一 非-Archimedean 范数. $\mathbf{Q}$ 关于度量 $d(x,y) = |x-y|_p$ 的完备化记为 $\mathbf{Q}_p$,并称之为 p -adic 数域.

在文献[27]中,作者们研究了近似加性映象 $f: \mathbf{Q}_p \to \mathbf{R}$ 的稳定性. 在文献[28-29]中,在非-Archimedean 赋范空间的框架下,研究了 Cauchy、二次和三次泛函方程的稳定性. 在本文中,借助文献[28-30]中的某些思想,我们在 非-Archimedean 赋范空间的框架下,建立了 Eule-Lagrange 方程的稳定性.

本文中处处假定 X 是一向量空间,而 Y 是一完备的非-Archimedean 赋范空间.

定义 1 一 非-Archimedean 随机赋范空间(简称为非-Archimedean RN-空间)是一三元组 (X, μ, T),其中 X 是一非-Archimedean 域 K 上的线性空间,T 是一连续的 t- 范数,而 μ 是一由 X 到 D^+ 的映象,其满足下面的条件:

(NA-RN1) $\mu_x(t) = \varepsilon_0(t)$ 对所有的 $t > 0$,当且仅当 $x = 0$;

(NA-RN2) $\mu_{\alpha x}(t) = \mu_x(t/|\alpha|)$ 对所有的 $x \in X, t > 0, \alpha \neq 0$;

(NA-RN3) $\mu_{x+y}(\max\{t,s\}) \geqslant T(\mu_x(t), \mu_y(s))$ 对所有的 $x,y,z \in X, t,s \geqslant 0$.

易知,如果(NA-RN3)成立,则下式亦成立:

(RN3) $\mu_{x+y}(t+s) \geqslant T(\mu_x(t), \mu_y(s))$.

作为经典的例子,如果 $(X, \|\cdot\|)$ 是一非-Archimedean 赋范线性空间,则三元组 (X, μ, T_{M}) 是一非-Archimedean RN-空间,其中

$$\mu_x(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant \|x\|, \\ 1, & t > \|x\|. \end{cases}$$

例 1 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一非-Archimedean 赋范线性空间. 定义

$$\mu_x(t) = \frac{t}{t + \|x\|}, \qquad \forall x \in X,\ t > 0,$$

则 (X, μ, T_{M}) 是一非-Archimedean RN-空间.

定义 2 设 (X, μ, T) 是一非-Archimedean RN-空间. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中之一序列,则 $\{x_n\}$ 称为收敛的,如果存在 $x \in X$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{x_n - x}(t) = 1$$

对所有的 $t > 0$ 成立. 此时,称 x 为序列 $\{x_n\}$ 的极限.

X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为 Cauchy 的,如果对每一 $\varepsilon > 0$ 及每一 $t > 0$,存在 n_0 使得对所有的 $n \geqslant n_0$ 及所有的 $p > 0$ 有 $\mu_{x_{n+p} - x_n}(t) > 1 - \varepsilon$.

注 1[31] 设 (X, μ, T_{M}) 是一非-Archimedean RN-空间,则

$$\mu_{x_{n+p} - x_n}(t) \geqslant \min\{\mu_{x_{n+j+1} - x_{n+j}}(t) : j = 0,1,2,\cdots,p-1\}.$$

从而,序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 的,如果对每一 $\varepsilon > 0$ 及 $t > 0$,存在 n_0 使得对所有的 $n \geqslant n_0$ 有

$\mu_{x_{n+1}-x_n}(t) > 1-\varepsilon$.

如果每一 Cauchy 序列是收敛的，则随机范数称为完备的，而且非-Archimedean RN-空间称为非-Archimedean 随机 Banach 空间.

4 随机 Hyers-Ulam 稳定性（偶函数情形）

设 K 是一非-Archimedean 域，X 是 K 上的向量空间，(Y,μ,T) 是 K 上的非-Archimedean 随机 Banach 空间.

我们研究下面的加性的二次泛函方程的稳定性：

$$f(x+y)+f(x+z)+f(y+z)=f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y+z),$$

其中，f 是 X 到 Y 的映象且 $f(0)=0$.

下面我们定义一随机的近似加性的二次映象. 设 Ψ 是 $X\times X\times X\times[0,\infty)$ 上的分布函数，使得 $\Psi(x,y,z,\cdot)$ 是不减的，而且

$$\Psi(cx,cx,cx,t)\geqslant\Psi(x,x,x,t/|c|)\qquad(x\in X,c\neq 0).$$

定义 3 $f:X\to Y$ 称为 Ψ- 近似加性的二次映象，如果

$$\mu_{f(x+y)+f(x+z)+f(y+z)-f(x)-f(y)-f(z)-f(x+y+z)}(t)\geqslant \Psi(x,y,z,t)\qquad(x,y,z\in X,t>0).\tag{3}$$

本节的主要结果如下：

定理 2 设 K 是一非-Archimedean 域，X 是 K 上的一向量空间，而 (Y,μ,T) 是 K 上的一非-Archimedean 随机 Banach 空间. 设 $f:X\to Y$ 是一偶的 Ψ- 近似加性的二次函数，且 $f(0)=0$. 如果对某一 $\alpha\in\mathbf{R},\alpha>0$，及某一整数 $k,k\geqslant 2$ 且 $|4^k|<\alpha$，

$$\Psi(2^{-k}x,2^{-k}y,2^{-k}z,t)\geqslant\Psi(x,y,z,\alpha t)\qquad(x\in X,\ t>0),\tag{4}$$

而且

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_{j=n}^{\infty}M\left(x,\frac{\alpha^j t}{|4|^{kj}}\right)=1\qquad(x\in X,\ t>0),\tag{5}$$

则存在唯一的二次映象 $Q:X\to Y$ 使得

$$\mu_{f(x)-Q(x)}(t)\geqslant\mathrm{T}_{i=1}^{\infty}M\left(x,\frac{\alpha^{i+1}t}{|4|^{ki}}\right)\tag{6}$$

对所有的 $x\in X$ 及 $t>0$ 成立，其中

$$M(x,t):=T(\Psi(x,x,-x,t),\Psi(2x,2x,-2x,t),\cdots,\Psi(2^{k-1}x,2^{k-1}x,-2^{k-1}x,t))\qquad(x\in X,\ t>0).$$

证明 首先，我们对 j 用归纳法证明：对每一 $x\in X,t>0$ 及 $j\geqslant 1$，

$$\mu_{f(2^jx)-4^jf(x)}(t)\geqslant M_j(x,t):=T(\Psi(x,x,-x,t),\cdots,\Psi(2^{j-1}x,2^{j-1}x,-2^{j-1}x,t)).\tag{7}$$

在式(3)中令 $y=x,z=-x$，即得

$$\mu_{f(2x)-4f(x)}(t)\geqslant\Psi(x,x,-x,t)\qquad(x\in X,t>0).\tag{8}$$

这就证明了式(7)对 $j=1$ 成立. 设式(7)对某一 $j\geqslant 2$ 成立. 在式(8)中代 x 以 2^jx，则有

$$\mu_{f(2^{j+1}x)-4f(2^jx)}(t)\geqslant\Psi(2^jx,2^jx,-2^jx,t)\qquad(x\in X,t>0).$$

因 $|4|\leqslant 1$，故

$$\mu_{f(2^{j+1}x)-4^{j+1}f(x)}(t)\geqslant T(\mu_{f(2^{j+1}x)-4f(2^jx)}(t),\mu_{4f(2^jx)-4^{j+1}f(x)}(t))=$$
$$T\left(\mu_{f(2^{j+1}x)-4f(2^jx)}(t),\mu_{f(2^jx)-4^jf(x)}\left(\frac{t}{|4|}\right)\right)\geqslant$$

$$T(\mu_{f(2^{j+1}x)-4f(2^jx)}(t),\mu_{f(2^jx)-4^jf(x)}(t))\geqslant$$
$$T(\Psi(2^jx,2^jx,-2^jx,t),M_j(x,t))=M_{j+1}(x,t)$$

对每一 $x\in X$ 成立. 于是式(7)对所有的 $j\geqslant 2$ 成立. 特别有

$$\mu_{f(2^kx)-4^kf(x)}(t)\geqslant M(x,t)\qquad(x\in X,t>0). \tag{9}$$

在式(9)中代 x 以 $2^{-(kn+k)}x$, 并使用不等式(4)即得

$$\mu_{f(x/2^{kn})-4^kf(x/2^{kn+k})}(t)\geqslant M\left(\frac{x}{2^{kn+k}},t\right)\geqslant$$
$$M(x,\alpha^{n+1}t)\qquad(x\in X,t>0,\ n=0,1,2,\cdots). \tag{10}$$

于是有

$$\mu_{(4^k)^nf(x/(2^k)^n)-(4^k)^{n+1}f(x/(2^k)^{n+1})}(t)\geqslant$$
$$M\left(x,\frac{\alpha^{n+1}}{|(4^k)^n|}t\right)\qquad(x\in X,t>0,\ n=0,1,2,\cdots).$$

从而

$$\mu_{(4^k)^nf(x/(2^k)^n)-(4^k)^{n+p}f(x/(2^k)^{n+p})}(t)\geqslant \mathrm{T}_{j=n}^{n+p}(\mu_{(4^k)^jf(x/(2^k)^j)-(4^k)^{j+p}f(x/(2^k)^{j+p})}(t))\geqslant$$
$$\mathrm{T}_{j=n}^{n+p}M\left(x,\frac{\alpha^{j+1}}{|(4^k)^j|}t\right)\qquad(x\in X,t>0,\ n=0,1,2,\cdots).$$

因为, $\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_{j=n}^{\infty}M(x,(\alpha^{j+1}/|(4^k)^j|)t)=1$ $(x\in X,\ t>0)$, 故 $\{(4^k)^nf(x/(2^k)^n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是非-Archimedean 随机 Banach 空间 (Y,μ,T) 中之一 Cauchy 序列. 于是我们可以定义一映象 $Q:X\to Y$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\mu_{(4^k)^nf(x/(2^k)^n)-Q(x)}(t)=1\qquad(x\in X,t>0). \tag{11}$$

其次, 对每一 $n\geqslant 1,x\in X$ 及 $t>0$,

$$\mu_{f(x)-(4^k)^nf(x/(2^k)^n)}(t)=\mu_{\sum_{i=0}^{n-1}(4^k)^if(x/(2^k)^i)-(4^k)^{i+1}f(x/(2^k)^{i+1})}(t)\geqslant$$
$$\mathrm{T}_{i=0}^{n-1}(\mu_{(4^k)^if(x/(2^k)^i)-(4^k)^{i+1}f(x/(2^k)^{i+1})}(t))\geqslant$$
$$\mathrm{T}_{i=0}^{n-1}M\left(x,\frac{\alpha^{i+1}t}{|4^k|^i}\right).$$

于是有

$$\mu_{f(x)-Q(x)}(t)\geqslant T(\mu_{f(x)-(4^k)^nf(x/(2^k)^n)}(t),\mu_{(4^k)^nf(x/(4^k)^n)-Q(x)}(t))\geqslant$$
$$T\left(\mathrm{T}_{i=0}^{n-1}M\left(x,\frac{\alpha^{i+1}t}{|4^k|^i}\right),\mu_{(4^k)^nf(x/(2^k)^n)-Q(x)}(t)\right).$$

让 $n\to\infty$ 即得

$$\mu_{f(x)-Q(x)}(t)\geqslant \mathrm{T}_{i=1}^{\infty}M\left(x,\frac{\alpha^{i+1}t}{|4^k|^i}\right).$$

式(6)得证.

因为 T 是连续的, 由概率度量空间理论的一已知结果(例如文献[24]第 12 章)得知, 对几乎所有的 $t>0$. 有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_{F_1}(t)=\mu_{Q(x+y)+Q(y+z)+Q(x+z)-Q(x)-Q(y)-Q(z)-Q(x+y+z)}(t),$$

其中

$$F_1=(4^k)^nf(2^{-kn}(x+y))+(4^k)^nf(2^{-kn}(x+z))+(4^k)^nf(2^{-kn}(y+z))-$$
$$(4^k)^nf(2^{-kn}(x))-(4^k)^nf(2^{-kn}(y))-$$
$$(4^k)^nf(2^{-kn}(z))-(4^k)^nf(2^{-kn}(x+y+z)).$$

另一方面，在式(3)中分别代 x,y 和 z，以 $2^{-kn}x,2^{-kn}y$ 及 $2^{-kn}z$，且应用(NA-RN2)和式(4)即得

$$\mu_{F_1}(t) \geqslant \Psi\left(2^{-kn}x,2^{-kn}y,2^{-kn}z,\frac{t}{|4^k|^n}\right) \geqslant \Psi\left(x,y,z,\frac{\alpha^n t}{|4^k|^n}\right),$$

对所有的 $x,y \in X$ 及所有的 $t > 0$ 成立。因 $\lim_{n\to\infty}\Psi(x,y,z,\alpha^n t/|4^k|^n) = 1$，由此即可断定 Q 是一个二次映象。

如果 $Q':X \to Y$ 是另一个二次映象，使得 $\mu_{Q'(x)-f(x)}(t) \geqslant M(x,t)$，$\forall x \in X,\ t > 0$，则对每一 $n \in \mathbf{N}$，$x \in X$ 及 $t > 0$ 有，

$$\mu_{Q(x)-Q'(x)}(t) \geqslant T(\mu_{Q(x)-(4^k)^n f(x/(2^k)^n)}(t),\ \mu_{(4^k)^n f(x/(2^k)^n)-Q'(x)}(t),t)).$$

于是由式(11)，可断定 $Q = Q'$。证毕。 □

推论 1 设 K 是一非-Archimedean 域，X 是 K 上的一向量空间，而 (Y,μ,T) 是 K 上的一完备的非-Archimedean RN-空间且具有一 t- 范数 $T \in H$。设 $f:X \to Y$ 是一偶的 Ψ- 近似加性的二次映象。如果存在 $\alpha \in \mathbf{R}(\alpha > 0)$ 及一整数 k，$k \geqslant 2$ 且 $|4^k| < \alpha$ 使得式(4)成立，则存在唯一的二次映象 $Q:X \to Y$ 使得式(5)成立。

证明 因为

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x,\frac{\alpha^n t}{|4|^{kn}}\right) = 1,\qquad (\forall x \in X,\ t > 0),$$

而且 T 是 Hadžić- 型的，由命题 1 知

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_{j=n}^{\infty} M\left(x,\frac{\alpha^j t}{|4|^{kj}}\right) = 1\qquad (x \in X,\ t > 0).$$

于是由定理 2，结论即得。

下面我们给出一例子，用以说明本文主要结果的有效性：

例 2 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一非-Archimedean Banach 空间，(X,μ,T_{M}) 是一非-Archimedean RN-空间，其中

$$\mu_x(t) = \frac{t}{t + \|x\|}\qquad (\forall x \in X,\ t > 0),$$

而且 (Y,μ,T_{M}) 是一完备的非-Archimedean RN-空间(见例 1)。定义

$$\Psi(x,y,z,t) = \frac{t}{1+t}.$$

易知当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时，式(4)成立。又因

$$M(x,t) = \frac{t}{1+t},$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x,\frac{\alpha^n t}{|4|^{kn}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n t}{|4|^{kn} + \alpha^n t} = 1,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_{M,\,j=n}^{\infty} M\left(x,\frac{\alpha^j t}{|4|^{kj}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\mathrm{T}_{M,\,j=n}^{m} M\left(x,\frac{\alpha^j t}{|4|^{kj}}\right)\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{\alpha^n t}{\alpha^n t + |4^k|^n} = 1\qquad (\forall x \in X,\ t > 0).$$

设 $f:X \to Y$ 是一偶的 Ψ- 近似加性的二次映象。因而定理 2 中所有的条件满足，故存在唯一的二次映象 $Q:X \to Y$ 使得

$$\mu_{f(x)-Q(x)}(t) \geqslant \frac{\alpha^2 t}{\alpha^2 t + |4^k|}.$$

5　随机 Hyers-Ulam 稳定性(奇函数情形)

定理 3　设 K 是一非-Archimedean 域, X 是 K 上的向量空间,(Y,μ,T) 是 K 上的非-Archimedean 随机 Banach 空间. 设 $f: X \to Y$ 是一奇的 Ψ- 近似加性的二次函数. 如果对某一 $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$,及某一整数 $k, k \geqslant 2$, $|2^k| < \alpha$, 使得

$$\Psi(2^{-k}x, 2^{-k}y, 2^{-k}z, t) \geqslant \Psi(x, y, z, \alpha t) \qquad (x \in X,\ t > 0), \tag{12}$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_{j=n}^{\infty} M\left(x, \frac{\alpha^j t}{|2|^{kj}}\right) = 1 \qquad (x \in X,\ t > 0), \tag{13}$$

则存在唯一的加性映象 $A: X \to Y$ 使得

$$\mu_{f(x)-A(x)}(t) \geqslant \mathrm{T}_{i=1}^{\infty} M\left(x, \frac{\alpha^{i+1} t}{|2|^{ki}}\right) \tag{14}$$

对所有的 $x \in X$ 及 $t > 0$ 成立,其中

$$M(x,t) := T(\Psi(x, x, -x, t), \Psi(2x, 2x, -2x, t), \cdots,$$
$$\Psi(2^{k-1}x, 2^{k-1}x, -2^{k-1}x, t)) \qquad (x \in X,\ t > 0).$$

证明　首先,我们对 j 用归纳法证明. 对每一 $x \in X, t > 0$, $j \geqslant 1$ 有

$$\mu_{f(2^j x)-2^j f(x)}(t) \geqslant M_j(x,t) :=$$
$$T(\Psi(x, x, -x, t), \cdots, \Psi(2^{j-1}x, 2^{j-1}x, -2^{j-1}x, t)). \tag{15}$$

在式(3)中令 $y = x, z = -x$ 即得

$$\mu_{f(2x)-2f(x)}(t) \geqslant \Psi(x, x, -x, t) \qquad (x \in X, t > 0). \tag{16}$$

这就证明了式(15)当 $j = 1$ 时成立. 设式(15)对某一 $j \geqslant 2$ 成立. 在式(16)中代 x 以 $2^j x$, 即得

$$\mu_{f(2^{j+1}x)-2f(2^j x)}(t) \geqslant \Psi(2^j x, 2^j x, -2^j x, t) \qquad (x \in X, t > 0).$$

因为$|2| \leqslant 1$,故有

$$\mu_{f(2^{j+1}x)-2^{j+1}f(x)}(t) \geqslant T(\mu_{f(2^{j+1}x)-2f(2^j x)}(t), \mu_{2f(2^j x)-2^{j+1}f(x)}(t)) =$$
$$T\left(\mu_{f(2^{j+1}x)-2f(2^j x)}(t), \mu_{f(2^j x)-2^j f(x)}\left(\frac{t}{|2|}\right)\right) \geqslant$$
$$T(\mu_{f(2^{j+1}x)-2f(2^j x)}(t), \mu_{f(2^j x)-2^j f(x)}(t)) \geqslant$$
$$T(\Psi(2^j x, 2^j x, -2^j x, t), M_j(x,t)) = M_{j+1}(x,t),$$

对每一 $x \in X$. 于是式(15)对所有的 $j \geqslant 2$ 成立. 特别有

$$\mu_{f(2^k x)-2^k f(x)}(t) \geqslant M(x,t) \qquad (x \in X, t > 0). \tag{17}$$

在式(17)中代 x 以 $2^{-(kn+k)}x$, 并引用不等式(12),即得

$$\mu_{f(x/2^{kn})-2^k f(x/2^{kn+k})}(t) \geqslant M\left(\frac{x}{2^{kn+k}} t\right) \geqslant$$
$$M(x, \alpha^{n+1} t) \qquad (x \in X,\ t > 0,\ n = 0,1,2,\cdots). \tag{18}$$

于是有

$$\mu_{(2^k)^n f(x/(2^k)^n)-(2^k)^{n+1} f(x/(2^k)^{n+1})}(t) \geqslant$$
$$M\left(x, \frac{\alpha^{n+1}}{|(2^k)^n|} t\right) \qquad (x \in X,\ t > 0,\ n = 0,1,2,\cdots).$$

故

$$\mu_{(2^k)^n f(x/(2^k)^n)-(2^k)^{n+p} f(x/(2^k)^{n+p})}(t) \geqslant$$
$$\mathrm{T}_{j=n}^{n+p}(\mu_{(2^k)^j f(x/(2^k)^j)-(2^k)^{j+p} f(x/(2^k)^{j+p})}(t)) \geqslant$$
$$\mathrm{T}_{j=n}^{n+p} M\left(x, \frac{\alpha^{j+1}}{|(2^k)^j|} t\right) \qquad (x \in X,\ t > 0,\ n = 0,1,2,\cdots).$$

因 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_{j=n}^{\infty} M(x,(\alpha^{j+1}/|2^k|^j)t) = 1$ $(x \in X,\ t > 0)$，故 $\{(2^k)^n f(x/(2^k)^n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是非-Archimedean 随机 Banach 空间 (Y, μ, T) 中之一 Cauchy 序列. 于是我们定义一映象 $A: X \to Y$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{(2^k)^n f(x/(2^k)^n)-A(x)}(t) = 1 \qquad (x \in X, t > 0). \tag{19}$$

其次，对每一 $n \geqslant 1, x \in X$ 及 $t > 0$ 有

$$\mu_{f(x)-(2^k)^n f(x/(2^k)^n)}(t) = \mu_{\sum_{i=0}^{n-1}(2^k)^i f(x/(2^k)^i)-(2^k)^{i+1} f(x/(2^k)^{i+1})}(t) \geqslant$$
$$\mathrm{T}_{i=0}^{n-1}(\mu_{(2^k)^i f(x/(2^k)^i)-(2^k)^{i+1} f(x/(2^k)^{i+1})}(t)) \geqslant$$
$$\mathrm{T}_{i=0}^{n-1} M\left(x, \frac{\alpha^{i+1} t}{|2^k|^i}\right).$$

从而有

$$\mu_{f(x)-A(x)}(t) \geqslant T(\mu_{f(x)-(2^k)^n f(x/(2^k)^n)}(t), \mu_{(2^k)^n f(x/(2^k)^n)-A(x)}(t)) \geqslant$$
$$T\left(\mathrm{T}_{i=0}^{n-1} M\left(x, \frac{\alpha^{i+1} t}{|2^k|^i}\right), \mu_{(2^k)^n f(x/(2^k)^n)-A(x)}(t)\right).$$

令 $n \to \infty$ 即得

$$\mu_{f(x)-A(x)}(t) \geqslant \mathrm{T}_{i=1}^{\infty} M\left(x, \frac{\alpha^{i+1} t}{|2^k|^i}\right).$$

这就证明了式(14).

因 T 是连续的，由概率度量空间理论的一个已知的结果(例如文献[24]第 12 章)得

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{F_2}(t) = \mu_{A(x+y)+A(y+z)+A(x+z)-A(x)-A(y)-A(z)-A(x+y+z)}(t),$$

其中

$$F_2 = (2^k)^n f(2^{-kn}(x+y)) + (2^k)^n f(2^{-kn}(x+z)) + (2^k)^n f(2^{-kn}(y+z)) -$$
$$(2^k)^n f(2^{-kn}(x)) - (2^k)^n f(2^{-kn}(y)) -$$
$$(2^k)^n f(2^{-kn}(z)) - (2^k)^n f(2^{-kn}(x+y+z)),$$

对几乎所有的 $t > 0$ 成立. 另一方面，在式(3)中分别代 x, y 以 $2^{-kn}x, 2^{-kn}y$，并引用(NA-RN2)及式(12)可得

$$\mu_{F_2}(t) \geqslant \Psi\left(2^{-kn}x, 2^{-kn}y, 2^{-kn}z, \frac{t}{|2^k|^n}\right) \geqslant \Psi\left(x, y, z, \frac{\alpha^n t}{|2^k|^n}\right),$$

对所有的 $x, y \in X$ 及所有的 $t > 0$ 成立. 因为 $\lim_{n\to\infty} \Psi(x, y, z, \alpha^n t/|2^k|^n) = 1$，故我们可以断定 A 是一加性映象.

如果 $A': X \to Y$ 是另一加性映象使得 $\mu_{A'(x)-f(x)}(t) \geqslant M(x,t)$ 对所有的 $x \in X$ 及 $t > 0$，则对每一 $n \in \mathbf{N}, x \in X$ 及 $t > 0$ 有

$$\mu_{A(x)-A'(x)}(t) \geqslant T(\mu_{A(x)-(2^k)^n f(x/(2^k)^n)}(t), \mu_{(2^k)^n f(x/(2^k)^n)-A'(x)}(t), t)).$$

故由式(19)得知 $A = A'$. 证毕. □

推论 2 设 K 是一非-Archimedean 域，X 是 K 上的向量空间，而 (Y, μ, T) 是 K 上的完备的非-Archimedean RN-空间且具有一 t- 范数 $T \in H$. 设 $f: X \to Y$ 是一奇的 Ψ- 近似加性的二次映象. 如果存在一 $\alpha \in \mathbf{R}(\alpha > 0)$ 及一整数 $k, k \geqslant 2$ 且 $|2^k| < \alpha$ 使得式(12)成立，则存在唯一

的加性映象 $A: X \to Y$ 使得式(13)成立.

证明 因

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x, \frac{\alpha^n t}{|2|^{kn}}\right) = 1, \quad \forall x \in X, t > 0,$$

而且 T 是 Hadžić型的,由命题 1 得知

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_{j=n}^{\infty} M\left(x, \frac{\alpha^j t}{|2|^{kj}}\right) = 1, \quad \forall x \in X, t > 0.$$

于是由定理 3,结论即得.

现在我们给出一个例子,用以说明我们的主要结果的正确性.

例 3 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一非-Archimedean Banach 空间,(X, μ, T_{M}) 是一非-Archimedean RN-空间,其中

$$\mu_x(t) = \frac{t}{t + \|x\|}, \quad \forall x \in X, t > 0,$$

而 (Y, μ, T_{M}) 是一完备的非-Archimedean RN-空间(见例 1).定义

$$\Psi(x, y, t) = \frac{t}{1 + t}.$$

易知式(12)对所有的 $0 < \alpha \leqslant 1$ 成立.另因

$$M(x, t) = \frac{t}{1 + t}.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_{M, j=n}^{\infty} M\left(x, \frac{\alpha^j t}{|2|^{kj}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} \mathrm{T}_{M, j=n}^{m} M\left(x, \frac{\alpha^j t}{|2|^{kj}}\right)\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \frac{\alpha^n t}{\alpha^n t + |2^k|^n} = 1, \quad \forall x \in X, t > 0.$$

设 $f: X \to Y$ 是一奇的 Ψ- 近似加性的二次映象.于是定理3 的所有条件满足,故存在唯一的加性映象 $A: X \to Y$ 使得

$$\mu_{f(x)-A(x)}(t) \geqslant \frac{\alpha^2 t}{\alpha^2 t + |2^k|}.$$

致谢 作者对审稿人为改进本文所提出的的宝贵意见表示衷心感谢.同时也感谢宜宾学院自然科学基金资助(2009Z03)对本文的资助.

参考文献:

[1] Forti G L. Hyers-Ulam stability of functional equations in several variables[J]. *Aequationes Math*, 1995, **50**(1/2): 143-190.

[2] Hyers D H, Rassias Th M. Approximate homomorphisms[J]. *Aequationes Mathematics*, 1992, **44**(2/3): 125-153.

[3] Rassias Th M. On the stability of functional equations and a problem of Ulam[J]. *Acta Appl Math*, 2000, **62**(1): 23-130.

[4] Czerwik S. *Stability of Functional Equations of Ulam-Hyers-Rassias Type*[M]. Florida: Hadronic Press, 2003.

[5] Hyers D H, Isac G, Rassias Th M. *Stability of Functional Equations in Several Variables*[M]. Basel: Birkhäuser Verlag, 1998.

[6] Jung S M. *Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Mathematical Analysis* [M]. Florida: Hadronic Press, Inc, 2001.

[7] Rassias Th M. *Functional Equations, Inequalities and Applications*[M]. Dordrecht, Boston and London: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[8] Alsina C. On the stability of a functional equation arising in probabilistic normed spaces[J]. *General Inequalities*. Vol **5**. Basel: Birkhäuser Verlag, 1987: 263-271.

[9] Mirmostafaee M, Mirzavaziri M, Moslehian M S. Fuzzy stability of the Jensen functional equation[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, **159**(6): 730-738.

[10] Mirzavaziri M, Moslehian M S. A fixed point approach to stability of a quadratic equation[J]. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 2006, **37**(3): 361-376.

[11] Miheţ D, Radu D. On the stability of the additive Cauchy functional equation in random normed spaces[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, **343**(1): 567-572.

[12] MiheţD, Saadati R, Vaezpour S M. The stability of the quartic functional equation in random normed spaces[J]. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2010, **110**(2):797-793.

[13] Baktash E, Cho Y J, Jalili M, Saadati R, Vaezpour S M. On the stability of cubic mappings and quadratic mappings in random normed spaces[J]. *J Inequal Appl*, **2008**. Article ID: 902187. doi:10. 1155/208/902187.

[14] Saadati R, Vaezpour S M, Cho Y J. A note on the "On the stability of cubic mappings and quadratic mappings in random normed spaces" [J]. *J Inequal Appl*, **2009**. Article ID: 214530, 6 pages.

[15] 张石生, J. M. 拉斯尔斯, R. 沙达提. 直观随机赋范空间中三次泛函方程的稳定性[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(1): 19-25. (ZHANG Shi-sheng, John Michael Rassias, Reza Saadati. The stability of a cubic functional equation in intuitionistic random normed spaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(*English Edition*) ,2010, **31**(1): 21-26.)

[16] Mohamadi M, Cho Y J, Park C, Vetro P, Saadati R. Random stability of an additive-quadratic-quartic functional equation[J]. *J Inequal Appl*, **2010**. Article ID 754210, 18 pages, doi:10. 1155/2010/754210.

[17] Eshaghi-Gordji M, Abbaszadeh S, Park C. On the stability of a generalized quadratic and quartic type functional equation in quasi-Banach spaces[J]. *J Inequal Appl*, Vol **2009**. Article ID 153084, 26 pages, 2009. doi. 10. 1155/2009/153084.

[18] Cho Y J, Park C, Saadati R. Functional inequalities in non-Archimedean Banach spaces[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2010, **23**(10): 1238-1242.

[19] Saadati R, Park C. Non-Archimedean L-fuzzy normed spaces and stability of functional equations[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2010, **60**(8): 2488-2496.

[20] Saadati R, Cho Y J, Vahidi J. The stability of the quartic functional equation in various spaces [J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2010, **60**(7): 1994-2002.

[21] Chang S S, Cho Y J, Kang S M. *Nonlinear Operator Theory in Probabilistic Metric Spaces* [M]. New York: Nova Science Publishers, Inc, 2001.

[22] Schweizer B, Sklar A. *Probabilistic Metric Spaces*[M]. North Holand, New York: Elsevier, 1983.

[23] Šerstnev A N. On the notion of a random normed space[J]. *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1963, **142**(2): 280-283. (in Russian).

[24] Hadžić O, Pap E. *Fixed Point Theory in PM-Spaces*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Pub-

lishers, 2001.

[25] Hadžić O, Pap E, Budincević M. Countable extension of triangular norms and their applications to the fixed point theory in probabilistic metric spaces[J]. *Kybernetica*, 2002, **38**(3): 363-381.

[26] Hensel K. Uber eine neue Begrundung der theorie der algebraischen Zahlen Jahres[J]. *Deutsch Math Verein*, 1897, **6**: 8388.

[27] Arriola L M, Beyer W A. Stability of the Cauchy functional equation over p-adic fields[J]. *Real Anal Exchange*, 2005, **31**(1): 125-132.

[28] Moslehian M S, Rassias Th M. Stability of functional equations in non-Archimedian spaces [J]. *Appl Anal Disc Math*, 2007, **1**(2): 325-334.

[29] Moslehian M S, Sadeghi Gh. Stability of tow type of cubic functional equations in non-Archimedian spaces[J]. *Real Anal Exchange*, 2008, **33**(2): 375-383.

[30] Kim H M, Rassias J M. Generalization of the Ulam stability problem for Euler-Lagrange quadratic mapping[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, **336**(1): 277-296.

[31] Mirmostafaee M, Moslehian M S. Fuzzy stability of additive mappings in non-Archimedean fuzzy normed spaces[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2009, **160**(11): 1643-1652.

Solution and Stability of a Mixed Type Functional Equation in Non-Archimedean Random Spaces

ZHANG Shi-sheng[1], R. Saadati[2], G. Sadeghi[2]

(1. *Department of Mathematics*, *Yibin University*, *Yibin*, *Sichuan* 644007, *P. R. China*;
2. *Department of Mathematics*, *Science and Research Branch*,
Islamic Azad University, 14778, *Tehran*, *I. R. Iran*)

Abstract: The generalized stability of the Euler-Lagrange quadratic mappings in the framework of non-Archimedean random normed spaces was proved. Furthermore, the interdisciplinary relation among the theory of random spaces, the theory of non-Archimedean spaces and the theory of functional equations were also presented.

Key words: generalized Hyers-Ulam stability; Euler-Lagrange functional equation; non-Archimedean normed space; p-adic field