文章编号:1000-0887(2011)05-0599-09　

竖直薄板浸没在表面覆盖冰层海水中时的水波散射*

P·马悌[1], P·拉克西特[2], S·巴内杰亚[1]

(1. 迦达浦大学 力学系,加尔各答 700032,印度;
2. Deshapran Birendranath BOYS 研究所,S. P. 玛克赫吉路 198-B,加尔各答 700026,印度)

摘要: 研究在一片均匀薄冰所覆盖的深水中,浸没其间的竖直平板引起的水波散射,冰层看作弹性薄板. 通过对障碍物前方的势函数微分,问题被归结为一个超奇异的积分方程,应用适当的 Green 积分定理,应用一个包含 Chebyshev 多项式的有限级数配置法,求解该积分方程. 得到反射系数和透射系数的数值结果,并在不同的波数和覆盖冰层参数下,用图形表示出来.

关 键 词: 散射问题; 冰层覆盖的表面; Green 积分定理; 超奇异积分方程; 反射系数和透射系数

中图分类号: O353.2;P731.22　　**文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.05.010

引　　言

一个有趣的课题:线性水波和浮动薄板的相互作用,或许成为 20 世纪早期最简单的防波堤模型. Dean[1] 对一个完全浸没在深水中并向下无限延伸的竖直薄板,研究其对水波的散射问题. 随后, Ursell[2] 使用奇异积分方程的方法,得到部分沉浸在深水中的竖直障碍物,对水波散射问题的闭式解. Evans[3] 应用复变函数理论,研究浸没在深水中的竖直板对水波的散射问题. 上面论述的工作,只有少数问题可以得到闭式解.

过去 10 年间,有关海洋波浪和海冰相互作用的话题,取得了极为重要的理论进展. 在极地地区,作为海洋和大气之间的边界,在全球气候的变化中,海冰的变化将扮演着风向标的角色. 海冰担当着双重作用:既是太阳光的屏幕,同时覆盖在海洋表面反射太阳光的光线,防止太阳光的辐射加热冰层下部的海水,同时防止海水的热量向大气上空逃逸,这个现象对于保护海洋生物有着重要意义. 因此,海冰作为地球的冷藏库冷却了地球,又防止从太阳光中吸收过多的热量而保护了地球. 极地遍布一大片连续覆盖的冰层,常常有波在冰层自由表面下方传播,水波的振幅导致覆盖冰层的弯曲,就是一个重要的研究课题. 覆盖冰层的弯曲归因于冰层的弹性性质,将连续一片的薄冰看作一块弹性薄板. 关于海洋波浪和海冰相互作用的课题,已经有许

* **收稿日期:** 2010-10-28; **修订日期:** 2011-02-18
基金项目: 印度科学与工业研究理事会 CSIR 资助项目;印度科技部 DST 基金资助项目(SR/SY/MS: 521/08)
作者简介: Sudeshna Banerjea(联系人. E-mail: zenkour@sci.kfs.edu.eg).
本文原文为英文,黄锋 译,张禄坤 校.

多重要研究(参见 Fox 和 Squire 的文献[4], Squire 的文献[5], Chung 和 Fox 的文献[6], Linton 和 Chung 的文献[7], Chakrabarti 的文献[8], Gayen 等人的文献[9]). 在数学上, 作为覆盖冰层的边值问题(BVP), 覆盖冰层条件中包括势函数的五阶导数, 控制方程是二阶的偏微分方程.

关于海洋波浪和覆盖冰层相互作用的研究文献,限制为一个浸没于冰层下方的物体,与深水中浮动的冰层之间的相互作用. 近年来, Das 和 Mandal[10] 在对海洋波浪和海冰相互作用问题的研究,存在一长排水平的圆柱体. 最近, Maiti 和 Mandal[11] 考虑了这样的问题,障碍物是一块竖直的薄板,按一个角度竖直向下无限延伸地浸没在覆盖冰层下方. 他们应用 Green 积分定理简化 BVP,根据障碍物引起的势函数的导数,归结为一个超奇异的积分方程. 接着, Parsons 和 Martin[12] 用一个有限项的 Chebyshev 级数近似满足未知函数后,用配置法求解超奇异积分方程.

本文将问题归结为一块竖直薄板浸没在覆盖冰层下的深水中,研究其对水波的散射. 应用 Green 积分理论,将边值问题简化为,障碍物引起的势函数未知导数的超奇异积分方程. 将未知函数所满足的积分方程,用一个有限的 Chebyshev 多项式近似后,超奇异积分方程应用配置法求解. 该简化方程为一线性方程组,可以通过标准的方法求解. 用超奇异积分方程的解,数值地评估反射系数和透射系数,并用图形描绘出波数的影响.

1 问题的公式表示

考虑被冰覆盖的不可压缩非粘性均匀流体,作二维的无旋转运动. 选取直角坐标系, y-轴向下垂直指向流体区域($y \geqslant 0$), x-轴沿着覆盖冰层下边缘线与 y-轴正交. 覆盖的冰层看作厚度为 h_i,密度为 ρ_i 的弹性薄板,在 $x=0$, $a<y<b$ 处有一刚性薄板,浸没在覆盖冰层下方. 一束速度势为 $\operatorname{Re}\{\phi^{\mathrm{inc}}(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma t}\}$ 的谐和波,从负无穷远处射向刚性薄板,其中

$$\phi^{\mathrm{inc}}(x,y)=\mathrm{e}^{-\lambda K y+\mathrm{i}\lambda K x}, \tag{1}$$

σ 为角频率, $k=\lambda K$ 为如下色散关系的唯一实根:

$$(Dk^4+1-\delta K)k-K=0, \tag{2}$$

其中, $K=\sigma^2/g$, g 为重力加速度, $D=L/(\rho g)$, $L=Eh_i^3/[12(1-\nu^2)]$ 为冰的弯曲刚度, E 和 ν 分别为覆盖冰层的弹性材料的弹性模量和 Poisson 比, ρ 为水的密度, $\delta=(\rho_i/\rho)h_i$.

方程(2)的其它各根为 $\lambda_1 K, \bar{\lambda}_1 K, \lambda_2 K$ 和 $\bar{\lambda}_2 K$, 且 $\operatorname{Re}\lambda_1>0$ 和 $\operatorname{Re}\lambda_2<0$. 根据线性理论, 速度势为 $\operatorname{Re}\{\phi(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma t}\}$ 时所描述的二维运动,其中 ϕ 应满足

$$\nabla^2\phi=0, \qquad y\geqslant 0, \tag{3}$$

$$\left(D\frac{\partial^4}{\partial x^4}+1-\delta K\right)\phi_y+K\phi=0, \qquad y=0, \tag{4}$$

$$\phi_x=0, \qquad x=0,\ a<y<b, \tag{5}$$

$$r=\{(x-a)^2+(y-b)^2\}^{1/2}\to 0 \text{ 时}, \ r^{1/2}\nabla\phi \text{ 有界}. \tag{6}$$

远场条件为

$$\phi(x,y)\to\begin{cases}\phi^{\mathrm{inc}}(x,y)+R\phi^{\mathrm{inc}}(-x,y), & x\to-\infty,\\ T\phi^{\mathrm{inc}}(x,y), & x\to\infty,\end{cases} \tag{7}$$

其中, R 和 T 分别为反射系数和透射系数.

考虑函数 $\psi(x,y)$:

$$\psi(x,y)=\phi(x,y)-\phi^{\mathrm{inc}}(x,y), \tag{8}$$

其中 ψ 满足

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2\psi = 0, \qquad y \geqslant 0, \\
&\left(D\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 - \delta K\right)\psi_y + K\psi = 0, \qquad y = 0, \\
&\psi_x = \frac{\partial}{\partial x}\phi^{\mathrm{inc}}(0,y), \qquad a < y < b, \\
&r \to 0 \text{ 时}, \ r^{1/2}\nabla\psi \text{ 有界}, \\
&y \to \infty \text{ 时}, \ \nabla\psi \to 0, \\
&\psi(x,y) \to \begin{cases} R\phi^{\mathrm{inc}}(-x,y), & x \to -\infty, \\ (T-1)\phi^{\mathrm{inc}}(x,y), & x \to \infty. \end{cases}
\end{aligned} \tag{9}
$$

设 (ξ,η) 处存在一线源，那么源势 $G(x,y;\xi,\eta)$ 描述了冰层覆盖下水的运动。根据文献[13]，$G(x,y;\xi,\eta)$ 的表达式为

$$
\begin{aligned}
G(x,y;\xi,\eta) = {}& \\
& -2\,⨍_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ky}\{(Dk^4 + 1 - \delta K)k\cosh k\eta - K\sinh k\eta\}}{k\{(Dk^4 + 1 - \delta K)k - K\}}\cos k(x-\xi)\,\mathrm{d}k = \\
& \ln\frac{r}{r'} - 2\,⨍_0^{\infty} \frac{(Dk^4 + 1 - \delta K)\mathrm{e}^{-k(y+\eta)}}{(Dk^4 + 1 - \delta K)k - K}\cos k(x-\xi)\,\mathrm{d}k,
\end{aligned} \tag{10}
$$

其中 $\quad r, r' = \{(x-\xi)^2 + (y \mp \eta)^2\}^{1/2}$.

或者替换为

$$
\begin{aligned}
G(x,y;\xi,\eta) = {}& -2\int_0^{\infty} \frac{L(k,y)L(k,\eta)}{k\{k^2(1 - \delta K + Dk^4) + K^2\}}\mathrm{e}^{-k|x-\xi|}\mathrm{d}k - \\
& 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\lambda(5DK^4\lambda^4 - \delta K + 1)}\mathrm{e}^{-K\lambda(y+\eta) + \mathrm{i}\lambda K|x-\xi|} - \\
& 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\lambda_1(5DK^4\lambda_1^4 - \delta K + 1)}\mathrm{e}^{-K\lambda_1(y+\eta) + \mathrm{i}\lambda_1 K|x-\xi|} + \\
& 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\bar{\lambda}_1(5DK^4\bar{\lambda}_1^4 - \delta K + 1)}\mathrm{e}^{-K\bar{\lambda}_1(y+\eta) - \mathrm{i}\bar{\lambda}_1 K|x-\xi|},
\end{aligned}
$$

其中 $\quad L(k,y) = k(Dk^4 - \delta K + 1)\cos ky - K\sin ky$.

现在，在直线：$y = 0$，$-X \leqslant x \leqslant X$；$x = \pm X, 0 \leqslant y \leqslant Y$；$y = Y$，$-X \leqslant x \leqslant X$；$x = 0\ \pm, a \leqslant y \leqslant b$，和以 (ξ,η) 为圆心，以 ε 为半径的圆弧为边界构成的区域内，对谐和函数 $G(x,y;\xi,\eta)$ 和 $\psi(x,y)$ 应用 Green 积分定理，并最终取 $X, Y \to \infty$，$\varepsilon \to 0$，得到

$$
2\pi\psi(\xi,\eta) = -\int_a^b f(y)\frac{\partial}{\partial x}G(0,y;\xi,\eta)\,\mathrm{d}y, \tag{11}
$$

其中

$$
f(y) = \psi(+0,y) - \psi(-0,y) = \phi(+0,y) - \phi(-0,y), \qquad y \in (a,b). \tag{12}
$$

注意到方程(8)，方程(11)简化为

$$
\phi(\xi,\eta) = \phi^{\mathrm{inc}}(\xi,\eta) - \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(y)\frac{\partial}{\partial x}G(0,y;\xi,\eta)\,\mathrm{d}y, \tag{13}
$$

其中，$\phi^{\mathrm{inc}}(x,y)$ 在方程(1)给出。

由条件(5)和方程(1)，得到

$$
\phi_\xi(0,\eta) = 0, \qquad \eta \in (a,b)
$$

和

$$\phi_{\xi}^{\mathrm{inc}}(0,\eta)=-\mathrm{i}\lambda K\mathrm{e}^{-\lambda K\eta},\qquad \eta\in(a,b).\tag{14}$$

将上述结果代入方程(13),得到

$$⨍_a^b f(y)\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}G(0,y;0,\eta)\,\mathrm{d}y=2\pi\,K\lambda\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\lambda K\eta},\qquad \eta\in(a,b).\tag{15}$$

由式(10),有

$$G_{x\xi}(0,y;0,\eta)=-\frac{1}{(y-\eta)^2}-\frac{1}{(y+\eta)^2}-2K⨍_0^\infty\frac{k\mathrm{e}^{-k(y+\eta)}}{\Delta(k)}\mathrm{d}k,\tag{16}$$

其中

$$\Delta(k)=k(Dk^4-\delta K+1)-K.\tag{17}$$

利用方程(16),超奇异积分方程(15)变为

$$\begin{aligned}⨍_a^b\Bigg[&\frac{1}{(y-\eta)^2}+\frac{1}{(y+\eta)^2}+\frac{2K^2\pi\,\mathrm{i}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda K(y+\eta)}}{5D(\lambda K)^4+1-\delta K}+\\&2K\int_0^{\lambda K}\frac{\mathrm{e}^{-k(y+\eta)}}{k(Dk^4-\delta K+1)-K}\mathrm{d}k+\\&2K(\lambda K)^2\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda K/x)(y+\eta)}x^2\mathrm{d}x}{\lambda K(D\lambda^4K^4+x^4-\delta Kx^4)-Kx^5}\Bigg]f(y)\,\mathrm{d}y=\\&-2\pi\lambda K\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\lambda K\eta},\qquad a<\eta<b.\end{aligned}\tag{18}$$

为了求解上面的方程,作如下替换:

$$\begin{cases}y=\dfrac{b+a}{2}+\dfrac{b-a}{2}t,\\[2mm]\eta=\dfrac{b+a}{2}+\dfrac{b-a}{2}t,\end{cases}\tag{19}$$

代入式(18),得到

$$⨍_{-1}^1\left[\frac{1}{(t-u)^2}+L(u,t)\right]F(t)\,\mathrm{d}t=h(u),\qquad -1<u<1,\tag{20}$$

其中

$$\begin{aligned}L(u,t)=&\frac{(b-a)^2}{4(b+a)^2+4(b^2-a^2)(t+u)+(b-a)^2(t+u)^2}+\\&\frac{(b-a)^2}{2}\frac{K^2\pi\lambda\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mu\lambda K}}{5D(\lambda K)^4+1-\delta K}+\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^{\lambda K}\frac{2Kk\mathrm{e}^{-k\mu}}{k(Dk^4+1-\delta K)-K}\mathrm{d}k+\\&(\lambda K)^4\frac{(b-a)^2}{4}2K\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda K/x)\mu}x^2\mathrm{d}x}{\lambda K(D\lambda^4K^4+x^4-\delta Kx^4)-Kx^5},\end{aligned}\tag{21}$$

$$\mu=b+a+\frac{b-a}{2}(t+u),\tag{22}$$

$$F(t)=f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t\right),\qquad -1<t<1,\tag{23}$$

$$F(\pm1)=0,\tag{24}$$

$$h(u)=-2\pi\lambda K\mathrm{i}\,\frac{b-a}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda K((b+a)/2+(b-a)u/2)},\qquad -1<t<1.\tag{25}$$

根据文献[12]的方法,假定

$$F(t)=(1-t^2)^{1/2}g(t),\tag{26}$$

使得 $F(\pm1)=0$. 这里,边界函数 $g(t)$ 近似为

$$g(t)=\sum_{n=0}^{N}a_nU_n(t),\qquad -1<t<1,\tag{27}$$

其中，$U_n(t)$ 为第二类 Chebyshev 多项式：

$$U_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},\tag{28}$$

a_n 为待定的未知数.

将方程(26)和(27)代入方程(20)，有

$$\sum_{n=0}^{N}a_nA_n(u)=h(u),\qquad -1<u<1,\tag{29}$$

其中

$$A_n(u)=-\pi(n+1)U_n(u)+\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{1/2}U_n(t)L(u,t)\mathrm{d}t.\tag{30}$$

如下定义配置点 $u=u_j$（参见文献[12]）：

$$u_j=\cos\left\{\frac{(j+1)\pi}{N+2}\right\},\qquad j=0,1,\cdots,N,$$

也可以为

$$u_j=\cos\left\{\frac{(2j+1)\pi}{2N+2}\right\},\qquad j=0,1,\cdots,N.$$

这样，方程(30)简化为线性方程组(31)：

$$\sum_{n=0}^{N}a_nA_n(u_j)=h(u_j),\qquad j=0,1,\cdots,N.\tag{31}$$

现在，就可以应用标准的方法，求解关于 a_n 的线性方程组. 求得 a_n 后，就可以求得 $g(t)$，再由方程(26) 求得 $F(t)$. $F(t)$ 已知后，由方程(23) 可求得 $f(t)$.

公式(11)令 $\xi\to\pm\infty$，并注意到 $\xi\to\pm\infty$ 时 $\psi(x,y)$ 的性质（见式(9)），可以得到 R 和 T 如下：

$$R=-\int_a^b\frac{K\,\mathrm{e}^{-K\lambda y}}{5DK^4\lambda^4-\delta K+1}f(y)\mathrm{d}y,\tag{32}$$

$$T=1+\int_a^b\frac{K\,\mathrm{e}^{-K\lambda y}}{5DK^4\lambda^4-\delta K+1}f(y)\mathrm{d}y.\tag{33}$$

令 $\quad y=(b+a)/2+(b-a)t/2,$

并经过一些运算后，有

$$R=-\frac{(b-a)K}{2}\sum_{n=0}^{N}a_n\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{1/2}U_n(t)}{5DK^4\lambda^4-\delta K+1}\mathrm{e}^{-K\lambda((b+a)/2+(b-a)t/2)}\mathrm{d}t,\tag{34}$$

$$T=1+\frac{(b-a)K}{2}\sum_{n=0}^{N}a_n\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{1/2}U_n(t)}{5DK^4\lambda^4-\delta K+1}\mathrm{e}^{-K\lambda((b+a)/2+(b-a)t/2)}\mathrm{d}t.\tag{35}$$

在求得 a_n 值之后，上述公式就可以用来数值地评估 R 和 T.

2 数值结果

当无量纲参数 $D'=D/a^4$，$\delta'=\delta/a^4$ 和波数 Ka 取不同数值时，对 $|R|$ 和 $|T|$ 进行数值计算. 在对反射系数 $|R|$ 进行数值计算时，表达式(31) 中取 $N=15$. 应用 Mathematica 软件，对不同的积分结果进行评估，如表 1 所示.

表 1 中 $|R_{\text{exact}}|$ 是文献[3] 给出的精确结果，在 $b/a=4$ 时，自由表面（即 $D'=0$，$\delta'=0$）水

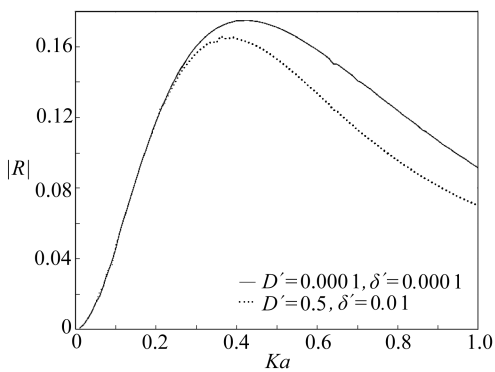
的反射系数随波数的变化. 表 1 同时给出了 D', δ' 很小($D' = 0.000\ 1$, $\delta' = 0.000\ 1$) 时,由式(34)计算的反射系数值.

表 1　反射系数 $|R|$ 的数值计算

Table 1　Numerical computation of the reflection coefficient $|R|$

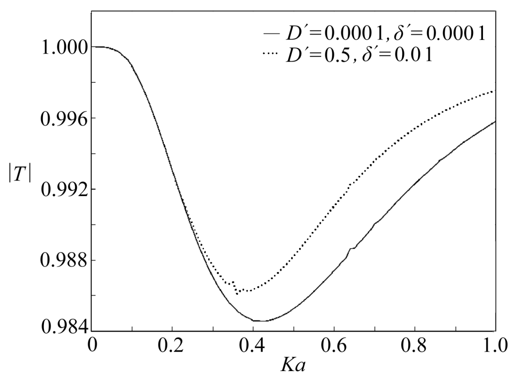
Ka	$\lvert R_{\text{exact}}\rvert$ $D' = 0$, $\delta' = 0$	$\lvert R\rvert$ $D' = 0.000\ 1$, $\delta' = 0.000\ 1$	Ka	$\lvert R_{\text{exact}}\rvert$ $D' = 0$, $\delta' = 0$	$\lvert R\rvert$ $D' = 0.000\ 1$, $\delta' = 0.000\ 1$
0.01	0.000 709 8	0.000 714 2	0.35	0.170 347	0.170 379
0.05	0.014 959 9	0.015 165 2	0.40	0.174 585	0.174 611
0.10	0.047 756 2	0.046 083	0.45	0.174 403	0.174 422
0.15	0.084 700 6	0.084 845 9	0.50	0.171 004	0.171 018
0.20	0.117 640	0.117 580	1.00	0.091 450 3	0.091 412 6
0.25	0.143 025	0.143 069	1.50	0.038 470 5	0.038 401 1
0.30	0.160 293	0.160 345	2.00	0.015 189 1	0.015 127 5

从表 1 中可以发现, $|R_{\text{exact}}|$和$|R|$ 在小数点后 3 ~4 位的数字基本相同,这说明了超奇异积分方程数值求解方案的有效性.



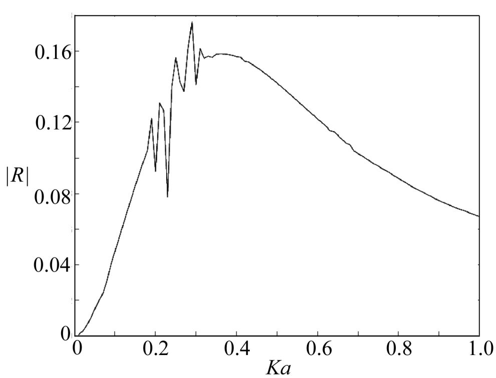
(a) $b/a = 4$ 时, $|R|$随 Ka 的变化

(a) $|R|$ against Ka for $b/a = 4$



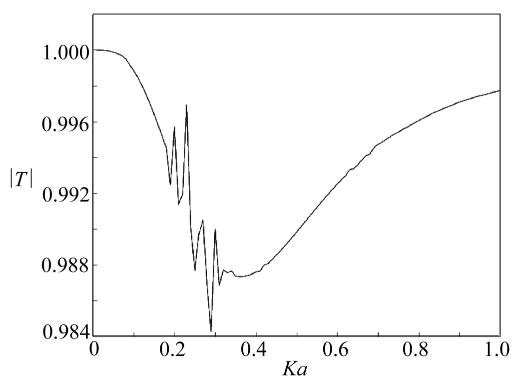
(b) $b/a = 4$ 时, $|T|$随 Ka 的变化

(b) $|T|$ against Ka for $b/a = 4$



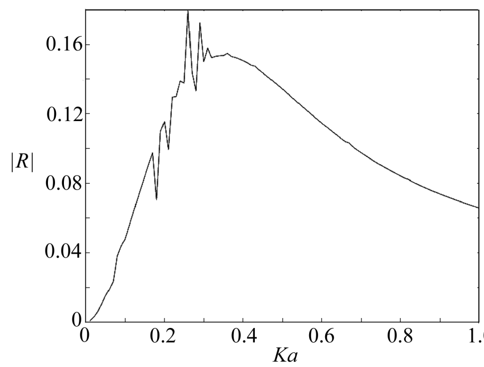
(c) $b/a = 4$, $D' = 1.0$, $\delta' = 0.01$ 时, $|R|$随 Ka 的变化

(c) $|R|$ against Ka for $b/a = 4$, $D' = 1.0$, $\delta' = 0.01$



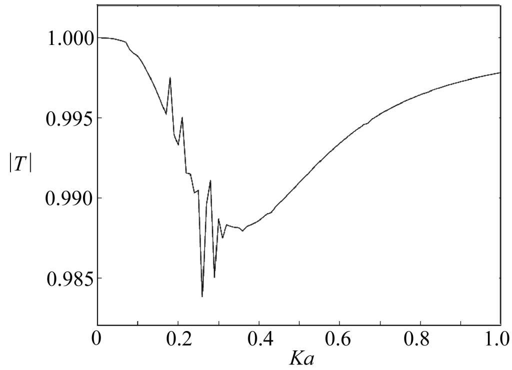
(d) $b/a = 4$, $D' = 1.0$, $\delta' = 0.01$ 时, $|T|$随 Ka 的变化

(d) $|T|$ against Ka for $b/a = 4$, $D' = 1.0$, $\delta' = 0.01$



(e) $b/a = 4$, $D' = 1.5$, $\delta' = 0.01$ 时，$|R|$随 Ka 的变化

(e) $|R|$ against Ka for $b/a = 4$, $D' = 1.5$, $\delta' = 0.01$

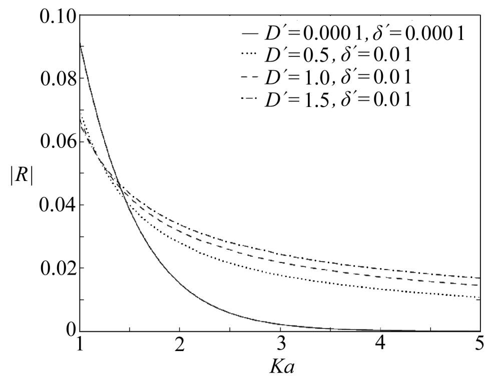


(f) $b/a = 4$, $D' = 1.5$, $\delta' = 0.01$ 时，$|T|$随 Ka 的变化

(f) $|T|$ against Ka for $b/a = 4$, $D' = 1.5$, $\delta' = 0.01$

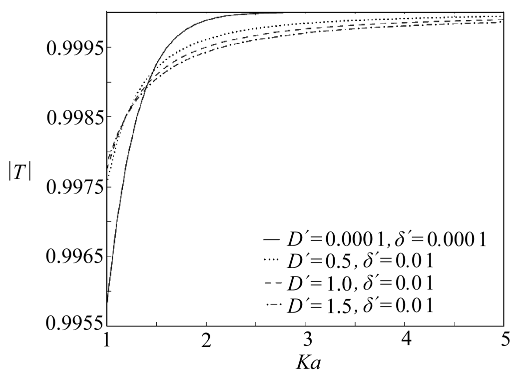
图 1 $|R|$和$|T|$随 Ka 的变化

Fig. 1 $|R|$ and $|T|$ against Ka



(a) $b/a = 4$ 时，$|R|$随 Ka 的变化

(a) $|R|$ against Ka for $b/a = 4$



(b) $b/a = 4$ 时，$|T|$随 Ka 的变化

(b) $|T|$ against Ka for $b/a = 4$

图 2 $b/a = 4$ 时 $|R|$和$|T|$随 Ka 的变化

Fig. 2 $|R|$ and $|T|$ against Ka for $b/a = 4$

当 $b/a = 4$，图 1(a)和图 1(b)分别描绘出 $D' = 0.000\,1$，$\delta' = 0.000\,1$ 和 $D' = 0.50$，$\delta' = 0.01$ 时，$|R|$和$|T|$随波数 Ka 的变化．图 1(a)可以发现，当 Ka 从 0 增大到 1，$|R|$ 先是增大然后减小．类似地，图 1(b)可以发现，当 Ka 从 0 增大到 1，$|T|$ 先是减小然后增大．这样的结果似乎是合理的，因为波数越大，相应的波就越短，它们又被限制在覆盖冰层表面附近，大部分被透射过障碍物．图 1(a)和图 1(b)中还可以发现，当 $0 < Ka < 0.15$ 时，$D' = 0.000\,1$，$\delta' = 0.000\,1$ 和 $D' = 0.5$，$\delta' = 0.01$ 两种情况，相对应的$|R|$值基本重合；类似地，当 $0 < Ka < 0.15$ 时，图 1(b)中的 $|T|$也有着类似的性质．出现这种现象，是因为波数越小，相应的波长就越长，长波传向海洋的底部，不受覆盖冰层的影响．当 Ka 从 0.15 开始继续增大，$|R|$随着 Ka 的增大而增大，并达到一个峰值，然后逐渐减小．可以发现，当 D' 从 0.000 1 增大到 0.5，δ' 从 0.000 1 增大到 0.01 时，$|R|$ 的峰值随之减少．这表明，覆盖冰层的存在，削弱了波的反射．类似地，从图 1(b)发现，覆盖冰层的存在，加强了波的透射．

当 $b/a = 4$，$\delta' = 0.01$，图 1(a)和图 1(e)分别描绘出 $D' = 1.0$ 和，$D' = 1.5$ 时的$|R|$ 值．类

似地,图1(d)和图1(f)分别描绘出 $b/a=4$,$\delta'=0.01$ 和 $D'=1.0$,1.5 时,$|T|$随 Ka 的变化情况.从图1(d)~图1(f)中可以发现,$|R|$和$|T|$间互补的特性.事实上,对图1(a)~图1(e)中所有的 D',δ' 和 Ka 值,为能量恒等式 $|R|^2+|T|^2=1$ 所检验.

图1(c)和图1(e)中,对一个长度固定的障碍物,$|R|$值随着 Ka 的增大,先出现增大,后出现减小.但是,与图1(a)不同,当 $0.15<Ka<0.3$,$D'=1.0$ 和1.5时,$|R|$ 值出现强烈的振荡.在图1(d)和图1(f)中,对于这些 D' 和 δ' 值,$|T|$值也存在着相似的震荡特性.$|R|$和$|T|$的这些奇特性质,可以归因于覆盖冰层的弹性特性.随着覆盖冰层弯曲刚度的增大,波在覆盖冰层和浸没其间的障碍物之间交互作用下,造成$|R|$和$|T|$ 值产生剧烈的起伏.

图2(a)和图2(b)中,分别描绘出 $b/a=4$,$Ka>1$,$D'=0.0001$,$\delta'=0.0001$ 和 $D'=0.5$,1.0,1.5,$\delta'=0.01$ 时$|R|$和$|T|$ 的变化情况.从图2(a)和图2(b)可以发现,$|R|$随着 Ka 的增大而减小,而$|T|$则随着 Ka 的增大而增大.而且,与 $D'=0.5$,1.0,1.5,$\delta'=0.01$ 时相比较,$D'=0.0001$,$\delta'=0.0001$ 时,无论是$|R|$的减小,还是$|T|$的增大,变化都十分急剧.因覆盖冰层弯曲刚度的增大,$|R|$的缩减率和$|T|$ 的增长率都出现了下降.

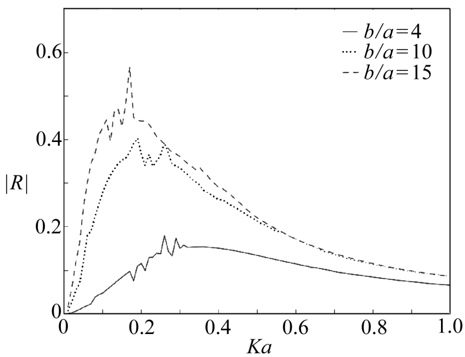


图3 $D'=1.5$,$\delta'=0.01$ 时,$|R|$随 Ka 的变化

Fig. 3 $|R|$ against Ka for $D'=1.5$, $\delta'=0.01$

当覆盖冰层参数 $D'=1.5$ 和 $\delta'=0.01$ 时,图3分别描绘出 $b/a=4$,10,15 时的$|R|$随着 Ka 的变化.可以发现,Ka 处于0.1~0.3时,$|R|$显示急剧变化.还可以发现,随着板的长度的增大,$|R|$ 的最大峰值也在增大.这表明,板的长度越长,反射系数波震荡峰值越高.

3 讨 论

应用超奇异积分方程的方法,在一个覆盖着冰层深度无限的水中,研究浸没其间的垂直薄板障碍物对水波的散射.使用超奇异积分方程的近似解,数值计算了反射系数 $|R|$和透射系数$|T|$.用图形给出了覆盖冰层的存在对$|R|$和$|T|$的影响.可以发现,$|R|$和$|T|$间互补的特性,$|R|$和$|T|$需满足能量等式$|R|^2+|T|^2=1$.由于覆盖冰层的存在,当 Ka 在0.15~0.3之间时,随着覆盖冰层弯曲刚度的增大,$|R|$或$|T|$ 值都有急剧变化.还可以发现,由于平板长度的增大,更多的波能被反射出去.

本文的结果是基于线性理论,被认为是此类研究的基准.也可以看成覆盖冰层水中波的非线性散射问题,但它组成为单独的一类问题.最近,Marchenko 和 Shrira[14]研究了流体在为冰层覆盖时的二维非线性波,沿着这个方向可以进行更进一步的研究.

参考文献:

[1] Dean W R. On the reflexion of surface waves by a submerged plane barrier[J]. *Math Proc Camb Phil Soc*, 1945, **41**: 231-238.

[2] Ursell F. The effect of a fixed vertical barrier on surface waves in deep water[J]. *Math Proc Camb Phil Soc*, 1947, **43**: 374-382.

[3] Evans D V. Diffraxion of surface waves by a submerged vertical plate[J]. *J Fluid Mech*, 1970, **40**: 433-451.

[4] Fox C, Squire V A. On the oblique reflection and transmission of ocean waves at shore fast sea-ice[J]. *Phil Trans R Soc Lond A*, 1994, **347**(1682): 185-218.

[5] Squire V A. Of ocean waves and sea ice revisited[J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2007, **49**(2): 110-133.

[6] Chung H, Fox C. Calculation of wave-ice interaction using the Wiener-Hopf technique[J]. *New Zealand J Math*, 2002, **31**: 1-18.

[7] Linton C M, Chung H. Reflection and transmission at the ocean/sea-ice boundary[J]. *Wave Motion*, 2003, **38**(1): 43-52.

[8] Chakrabarti A. On the solution of the problem of scattering of surface water waves by the edge of an ice-cover[J]. *Proc R Soc Lond A*, 2000,**456**(1997): 1087-1099.

[9] Gayen R, Mandal B N, Chakrabarti A. Water wave scattering by an ice-strip[J]. *J Engg Maths*, 2005,**53**(1): 21-37.

[10] Das D, Mandal B N. Wave scattering by a horizontal circular cylinder in a two-layer fluid with an ice-cover[J]. *Internat J Engrg Sc*, 2007, **45**(10): 842-872.

[11] Maiti P, Mandal B N. Wave scattering by a thin vertical barrier submerged beneath an ice-cover in deep water[J]. *Applied Ocean Research*, 2010, **32**(4): 367-373.

[12] Parsons N F, Martin P A. Scattering of water waves by submerged plates using hypersingular integral equations[J]. *Applied Ocean Research*, 1992, **14**(5): 313-321.

[13] Chowdhury R. Water wave scattering by obstacles and surface discontinuities[D]. Ph D thesis. Calcutta University, 2004.

[14] Marchenko A V, Shrira V I. Theory of two-dimensional nonlinear waves in liquid covered by ice[J]. *F Dyn Res*, 1991, **26**(4): 580-587.

Scattering of Water Waves by a Thin Vertical Plate Submerged Below Ice-Cover Surface

Paramita Maiti[1], Puspendu Rakshit[2], Sudeshna Banerjea[1]

(1. *Department of Mathematics*, *Jadavpur University*, *Kolkata*-700032, *India*;

2. *Deshapran Birendranath Institution for Boys*, 198-*B S. P. Mukherjee Road*, *Kolkata*-700026, *India*)

Abstract: Scattering of water waves by a vertical plate submerged in deep water covered with a thin uniform sheet of ice, modelled as an elastic plate was concerned. The problem was formulated in terms of a hypersingular integral equation by a suitable application of Green's integral theorem, in terms of difference of potential functions across the barrier. This integral equation was solved by collocation method using a finite series involving Chebyshev polynomials. The reflection and transmission coefficients were obtained numerically and presented graphically for various values of the wave number and ice cover parameter.

Key words: scattering problem; ice-cover surface; Green's integral theorem; hypersingular integral equation; reflection and transmission coefficients