

# 基于精确 Cosserat 模型的螺旋杆稳定性分析\*

刘延柱<sup>1</sup>, 薛 纭<sup>2</sup>

(1. 上海交通大学 工程力学系, 上海 200240;  
2. 上海应用技术学院 机械与自动化工程学院, 上海 200235)

(陈立群推荐)

**摘要:** 弹性杆的螺旋线平衡问题在 DNA、纤维、海底电缆和输油管线等方面具有应用背景. Kirchhoff 动力学比拟是分析弹性细杆平衡稳定性的有效方法. Kirchhoff 模型中包括中心线无拉伸变形和截面无剪切变形的假定与生物大分子等软物质的实际状况有较大差异. 基于精确 Cosserat 模型, 考虑中心线的拉伸压缩变形和截面剪切变形, 以及剪切变形引起杆中心线转动导致切线轴相对截面法线轴的偏离, 以 Euler 角表达截面姿态, 建立圆截面弹性杆的动力学普遍方程. 在静力学范畴内讨论螺旋线平衡状态的 Liapunov 稳定性和 Euler 稳定性问题, 导出稳定性条件及轴向力和扭矩的 Euler 临界值. 证明螺旋杆平衡的静态 Liapunov 稳定性和 Euler 稳定性条件是动态 Liapunov 稳定性的必要条件.

**关键词:** 精确 Cosserat 模型; Kirchhoff 杆; Liapunov 稳定性; Euler 载荷

**中图分类号:** O317; O343 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.05.007

## 引 言

弹性杆的螺旋线平衡问题在 DNA、纤维、海底电缆和输油管线等方面具有应用背景. 在关于弹性细杆平衡稳定性问题的研究中, Kirchhoff 动力学比拟作为一种有效的分析方法被广泛应用<sup>[1-5]</sup>. Kirchhoff 模型的中心线无拉伸变形和截面无剪切变形的假定与生物大分子等软物质的实际状况有较大差异. 近年来更接近弹性细杆实际情况的 Cosserat 精确模型, 由于取消 Kirchhoff 模型中不可伸长和截面无剪切变形的假定而日益受到关注<sup>[6-12]</sup>. 本文基于精确 Cosserat 模型, 考虑中心线的拉伸压缩变形和截面剪切变形, 以及剪切变形引起杆中心线转动导致切线轴相对截面法线轴的偏离, 将 Euler 角作为表达截面姿态的变量, 建立圆截面弹性杆的动力学普遍方程. 在静力学范畴内讨论螺旋线平衡状态的 Liapunov 稳定性, 导出受扰挠性线相对弧坐标变化的角频率. Liapunov 的稳定性概念是针对杆起始端扰动的稳定性. 从 Euler 稳定性概念出发, 如受扰挠性线同时满足杆两端的边界条件, 即认为杆的平衡状态失稳而出现屈曲. 因此利用补充的杆另一端边界条件, 可以确定屈曲状态对应的轴向力和扭矩的 Euler 临界值. 在动力学范畴内, 证明螺旋杆平衡的静态 Liapunov 稳定性和 Euler 稳定性条件是动态 Liapunov 稳定性的必要条件.

\* 收稿日期: 2011-02-21; 修订日期: 2011-03-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10972143)

作者简介: 刘延柱(1936—), 男, 南京人, 教授, 博士生导师(联系人. E-mail: liuyzhc@online.sh.cn).

apunov 稳定性的必要条件.

# 1 运动学分析

讨论端点  $O$  固定的圆截面弹性杆. 以  $O$  为原点建立惯性坐标系  $(O-\xi\eta\zeta)$  以及沿杆中心线的弧坐标  $s$ . 将  $(O-\xi\eta\zeta)$  的原点移至中心线上任意点  $P$ , 设  $(P-\xi\eta\zeta)$  绕  $\zeta$  轴转过  $\psi$  角为  $(P-x_0y_0z_0)$ , 再绕  $x_0$  轴转过  $\vartheta$  角为截面的主轴坐标系  $(P-xyz)$ ,  $z$  轴为截面的法线轴 (图 1). 设杆为均匀各向同性, 截面为刚性, 在平面  $(x, y)$  内无剪切变形, 仅在  $(y, z)$  和  $(x, z)$  平面内产生剪应变  $\gamma_{23}$  和  $\gamma_{13}$ . 剪切变形引起的无限小转动矢量  $\boldsymbol{\gamma}$  在  $(P-xyz)$  中的投影式为

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_{23} \quad \gamma_{13} \quad 0)^T, \tag{1}$$

$(P-xyz)$  的剪切变形后位置即截面作无限小转动  $\boldsymbol{\gamma}$  后的位置, 记作  $(P-x^*y^*z^*)$ .  $z^*$  轴为变形后中心线的切线轴, 因剪切变形而偏离  $z$  轴 (图 2). 设  $(P-xyz)$  绕  $z$  轴转过  $\varphi$  角为截面的连体坐标系  $(P-x_s y_s z_s)$  (图 1).

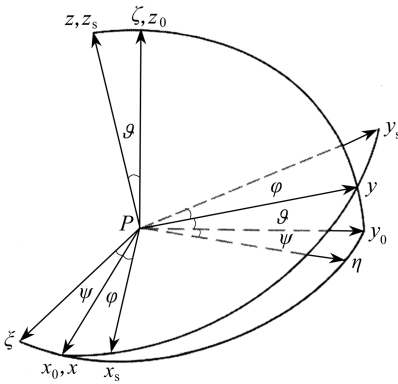


图 1 Euler 角

Fig.1 Euler's angles

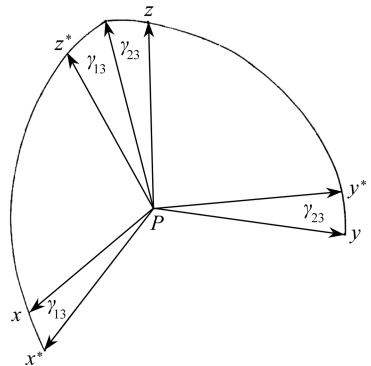


图 2 剪切变形

Fig.2 Shear deformation

由于剪切变形,  $z$  轴的基矢量  $\mathbf{e}_3$  转变为  $z^*$  轴的基矢量  $\mathbf{e}_3^*$ , 其相对  $(P-xyz)$  的投影为

$$\mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}_3 = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad 1)^T, \tag{2}$$

其中  $\varepsilon_1 = \gamma_{13}$ ,  $\varepsilon_2 = -\gamma_{23}$  为剪应变. 沿  $P$  点处的中心线取长度为  $\Delta s$  的微元段  $PQ$ , 设  $\mathbf{r}$  为弹性变形前  $P$  点相对  $O$  点的矢径, 其增量  $PQ = \Delta \mathbf{r} = \Delta s \mathbf{e}_3$ . 截面产生沿中心线的正应变  $\varepsilon_3$  和剪应变  $\boldsymbol{\gamma}$  后, 矢量  $\mathbf{r}$  和  $\Delta \mathbf{r}$  转变为  $\mathbf{r}^*$  和  $\Delta \mathbf{r}^*$ , 其中  $\Delta \mathbf{r}^* = \Delta s^* \mathbf{e}_3^*$ ,  $\Delta s^* = \Delta s(1 + \varepsilon_3)$ ,  $s^*$  为变形后的弧坐标, 满足

$$\frac{ds^*}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta s^*}{\Delta s} \right) = 1 + \varepsilon_3. \tag{3}$$

仅保留弹性应变的一次项, 变形后的矢径  $\mathbf{r}^*$  对弧坐标  $s$  的导数为

$$\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}^*}{\Delta s} \frac{\Delta s^*}{\Delta s} = \mathbf{e}_3^* (1 + \varepsilon_3) = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad 1 + \varepsilon_3)^T, \tag{4}$$

剪应变  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  和正应变  $\varepsilon_3$  组成弹性应变矢量  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)$ .

将  $(P-xyz)$  的角位移对弧坐标  $s$  或  $t$  的变化率分别记作  $\boldsymbol{\omega}$  和  $\boldsymbol{\Omega}$ ,  $(P-x_s y_s z_s)$  的角位移对弧坐标  $s$  或时间  $t$  的变化率为杆的弯扭度  $\boldsymbol{\omega}_s$  和截面的角速度  $\boldsymbol{\Omega}_s$ . 分别用撇号和点号表示对  $s$  和

$t$  的偏导数,各矢量在  $(P-xyz)$  中的投影  $\omega_j, \Omega_j, \omega_{sj}, \Omega_{sj}(j=1,2,3)$  为

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_{s1} = \vartheta', & \omega_2 = \omega_{s2} = \psi' \sin \vartheta, & \omega_3 = \omega_{s3} = \psi' \cos \vartheta, & \omega_{s3} = \phi', \\ \Omega_1 = \Omega_{s1} = \dot{\vartheta}, & \Omega_2 = \Omega_{s2} = \dot{\psi} \sin \vartheta, & \Omega_3 = \Omega_{s3} = \dot{\psi} \cos \vartheta, & \Omega_{s3} = \dot{\phi}, \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $\omega_{s1}, \omega_{s2}$  为  $P$  点处中心线的曲率,  $\omega_{s3}$  为杆的扭率,  $\phi$  为准坐标, 定义为

$$\phi' = \psi' \cos \vartheta + \varphi', \quad \dot{\phi} = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \quad (6)$$

定义  $P$  点的速度  $\mathbf{v}$  为  $\mathbf{r}^*$  对时间  $t$  的变化率

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}^*}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial t}. \quad (7)$$

$\mathbf{v}$  在  $(P-xyz)$  中的投影记作  $v_j(j=1,2,3)$ . 计算  $\mathbf{v}$  对  $s$  的偏导数, 利用式(7)、(4)导出

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}^*}{\partial s \partial t} = (1 + \varepsilon_3) \frac{\partial \mathbf{e}_3^*}{\partial t}. \quad (8)$$

取动坐标系  $(P-xyz)$  为求导的参考坐标系, 化作

$$\frac{\tilde{\partial} \mathbf{v}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = (1 + \varepsilon_3) \left( \frac{\tilde{\partial} \mathbf{e}_3^*}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_3^* \right), \quad (9)$$

其中的波浪号为相对  $(P-xyz)$  的局部导数符号.

## 2 动力学方程

讨论杆中心线  $P$  点处的  $\Delta \mathbf{r}^*$  微元段, 忽略分布力, 列写动量定理和动量矩定理(图 3):

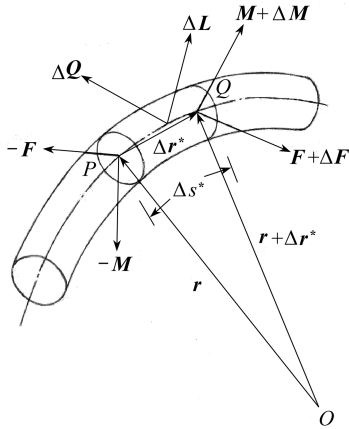


图3 微元段平衡状态的受力图

Fig. 3 Equilibrium of an infinitesimal segment

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{Q} = \Delta \mathbf{F} \Delta t, \\ \Delta \mathbf{L} = (\Delta \mathbf{M} + \Delta \mathbf{r}^* \times \mathbf{F}) \Delta t, \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $\Delta \mathbf{Q}$  和  $\Delta \mathbf{L}$  分别为微元段  $\Delta \mathbf{r}^*$  在  $\Delta t$  时间内的动量和对  $P$  点动量矩的增量,  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{M}$  为截面内力的主矢和主矩. 设微元段在变形前后有相同的质量  $\rho S \Delta s$  和惯性张量  $\mathbf{J} \Delta s$ , 其中  $\rho, S, \mathbf{J}$  为变形前微元段的密度、截面积和单位长度杆的惯量张量, 则有

$$\Delta \mathbf{Q} = \rho S \Delta \mathbf{v} \Delta s, \quad \Delta \mathbf{L} = \Delta(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}_s), \quad (11)$$

$\mathbf{J}$  在  $(P-xyz)$  中的投影为

$$\mathbf{J} = \text{diag}(J \quad J \quad J_0), \quad (12)$$

其中,  $J = \rho I, J_0 = \rho I_0, I, I_0$  为截面的惯性矩和极惯性矩.

对于半径为  $a$  的圆截面杆,  $S = \pi a^2, I = \pi a^4/4$  和  $I_0 = 2I$ . 将式(11)代入式(10), 各项除以  $\Delta s$  和  $\Delta t$ , 令  $\Delta s \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ , 得到微元段的以  $(P-xyz)$  为参考坐标系的动力学方程

$$\frac{\tilde{\partial} \mathbf{F}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F} - \rho S \left( \frac{\tilde{\partial} \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\tilde{\partial} \mathbf{M}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_3^* \times \mathbf{F} (1 + \varepsilon_3) - \left[ \frac{\tilde{\partial}}{\partial t} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}_s) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}_s) \right] = 0. \quad (14)$$

设杆无初始变形, 主矢  $\mathbf{F}$  和主矩  $\mathbf{M}$  满足线性本构关系

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega}_s, \quad (15)$$

其中,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  和  $\boldsymbol{\omega}_s$  为杆的应变和弯扭度,  $\mathbf{K}, \mathbf{A}$  为杆的抗拉伸、剪切和抗弯曲、扭转的刚度张量. 式 (15) 在  $(P-xyz)$  中的投影写作

$$\varepsilon_j = fF_j \quad (j = 1, 2), \quad \varepsilon_3 = f_0F_3, \quad (16a)$$

$$M_j = A\omega_{sj} \quad (j = 1, 2), \quad M_3 = C\omega_{s3}, \quad (16b)$$

其中,  $f = K^{-1}$ ,  $f_0 = K_0^{-1}$  为杆的切向和法向柔度系数,  $K = \kappa GS$ ,  $K_0 = ES$  为抗弯和抗扭刚度,  $A = EI$ ,  $C = GI_0$  为杆对  $x$  和  $z$  轴的抗弯和抗扭刚度,  $E, G$  为杆的弹性模量和剪切模量,  $\kappa$  为截面形状系数, 圆截面的  $\kappa$  为 0.9. 杆为均匀各向同性时  $G = E/2(1 + \nu)$ ,  $\nu$  为杆的 Poisson 比.

选择量纲为曲率的常数  $\omega_0$ , 定义无量纲化的弧坐标  $\hat{s}$ , 时间  $\hat{t}$ , 力  $\hat{F}_i$ , 速度  $\hat{v}_i$ , 柔度系数  $\hat{f}, \hat{f}_0$  等无量纲参数如下:

$$\begin{cases} \hat{s} = \omega_0 s, \quad \hat{t} = \sqrt{\frac{A}{\rho S}} \omega_0^2 t, \quad \hat{F}_i = \frac{F_i}{A\omega_0^2}, \quad \hat{v}_i = \frac{v_i}{\omega_0} \sqrt{\frac{\rho S}{A}} & (i = 1, 2, 3), \\ \sigma = \frac{I\omega_0^2}{S}, \quad \alpha = \frac{C}{A}, \quad \hat{f} = fA\omega_0^2, \quad \hat{f}_0 = f_0A\omega_0^2. \end{cases} \quad (17)$$

将式(5)、(15)、(17)代入矢量方程(9)、(13)、(14), 向  $(P-xyz)$  投影, 得到无量纲化的动力学方程

$$\begin{aligned} \vartheta'' + (\alpha\phi' - \psi' \cos \vartheta)\psi' \sin \vartheta - \hat{F}_2 + \hat{f}^* \hat{F}_2 \hat{F}_3 - \\ \sigma(\ddot{\vartheta} - \dot{\psi}^2 \cos \vartheta \sin \vartheta + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \vartheta) = 0, \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} \psi'' \sin \vartheta + 2\psi' \vartheta' \cos \vartheta - \alpha\phi' \vartheta' + \hat{F}_1 - \hat{f}^* \hat{F}_1 \hat{F}_3 - \\ \sigma(\ddot{\psi} \sin \vartheta + 2\dot{\psi}\dot{\vartheta} \cos \vartheta - 2\dot{\phi}\dot{\vartheta}) = 0, \end{aligned} \quad (18b)$$

$$\alpha\phi'' - 2\sigma\ddot{\phi} = 0, \quad (18c)$$

$$\hat{F}_1' + \psi'(\hat{F}_3 \sin \vartheta - \hat{F}_2 \cos \vartheta) - \hat{v}_1 + \dot{\psi}(\hat{v}_2 \cos \vartheta - \hat{v}_3 \sin \vartheta) = 0, \quad (18d)$$

$$\hat{F}_2' + \hat{F}_1 \psi' \cos \vartheta - \hat{F}_3 \vartheta' - \hat{v}_2 + \hat{v}_3 \dot{\vartheta} - \hat{v}_1 \dot{\psi} \cos \vartheta = 0, \quad (18e)$$

$$\hat{F}_3' + \hat{F}_2 \vartheta' - \hat{F}_1 \psi' \sin \vartheta - \hat{v}_3 - \hat{v}_2 \dot{\vartheta} + \hat{v}_1 \dot{\psi} \sin \vartheta = 0, \quad (18f)$$

$$\hat{v}_1' + \psi'(\hat{v}_3 \sin \vartheta - \hat{v}_2 \cos \vartheta) - \hat{f} \hat{F}_1 + \dot{\psi}[f \hat{F}_2 \cos \vartheta - (1 + \hat{f}_0 \hat{F}_3) \sin \vartheta] = 0, \quad (18g)$$

$$\hat{v}_2' + \hat{v}_1 \psi' \cos \vartheta - \hat{v}_3 \vartheta' + (1 + \hat{f}_0 \hat{F}_3) \dot{\vartheta} - \hat{f}(\hat{F}_2 + \hat{F}_1 \dot{\psi} \cos \vartheta) = 0, \quad (18h)$$

$$\hat{v}_3' + \hat{v}_2 \vartheta' - \hat{v}_1 \psi' \sin \vartheta + \hat{f}(\hat{F}_1 \dot{\psi} \sin \vartheta - \hat{F}_2 \dot{\vartheta}) = 0, \quad (18i)$$

其中撇号和点号改为对  $\hat{s}$  和  $\hat{t}$  的偏导数,  $\hat{f}^*$  定义为

$$\hat{f}^* = \hat{f} - \hat{f}_0 = A\omega_0^2(K^{-1} - K_0^{-1}). \quad (19)$$

方程组(18)共确定 9 个未知变量:  $\psi, \vartheta, \phi, \hat{F}_i, \hat{v}_i (i = 1, 2, 3)$ , 其中  $\phi(\hat{s}, \hat{t})$  可由解耦的方程 (18c) 独立确定.

### 3 螺旋线平衡

设杆变形前为直杆, 两个铰接端沿  $\zeta$  轴受轴向力  $\mathbf{F}_0$  和扭矩  $\mathbf{M}_0$  作用.  $\hat{f}, \hat{f}_0, \hat{f}^*$  和  $\sigma$  等参数与  $(a/R)^2$  成比例, 螺旋线半径  $R \gg a$  时其 2 阶以上小量可予忽略. 方程组(18)存在以下特解:

$$\begin{cases} \vartheta = \vartheta_0, \psi = \hat{s}, \phi' = \gamma, \\ \hat{F}_1 = 0, \hat{F}_2 = \hat{F}_0 \sin \vartheta, \hat{F}_3 = \hat{F}_0 \cos \vartheta, \end{cases} \quad (20)$$

其中,  $\hat{F}_0 = F_0 / (A\omega_0^2)$ . 此特解对应于杆在剪切变形前的螺旋线平衡状态, 以  $\vartheta_0$  为章动角, 即  $z$  轴和  $\zeta$  轴之间的夹角. 进动角  $\psi$  的变化率为  $\omega_0$ , 被用于定义式(17)中的无量纲参数. 螺旋线的半径  $R = \sin \vartheta_0 / \omega_0$  由参数  $\omega_0$  和  $\vartheta_0$  确定. 从方程(18a) 可导出轴向力  $\hat{F}_0$  与其它参数的关系

$$\hat{F}_0 = (m - \cos \vartheta_0) [1 + \hat{f}^* \cos \vartheta_0 (m - \cos \vartheta_0)], \quad (21)$$

其中,  $m = \alpha\gamma$  是与扭率成比例的常数. 从方程(20)和(16a)导出正应变和剪应变

$$\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \sin \vartheta, \varepsilon_3 = \varepsilon_{30} \cos \vartheta, \quad (22)$$

其中,  $\varepsilon_0, \varepsilon_{30}$  为最大剪应变和正应变

$$\varepsilon_0 = \hat{f}\hat{F}_0, \varepsilon_{30} = \hat{f}_0\hat{F}_0. \quad (23)$$

章动角  $\vartheta_0$  在弹性变形后的值  $\vartheta_0^*$  由  $\mathbf{e}_3^*$  和  $\zeta$  轴的基矢量  $\mathbf{e}_\zeta$  确定,

$$\sin \vartheta_0^* = |\mathbf{e}_3^* \times \mathbf{e}_\zeta| = \sin \vartheta_0 (1 - \varepsilon_0 \cos \vartheta_0), \quad (24)$$

匝数为  $N$  的螺旋杆长度为  $l = 2N\pi R / \sin \vartheta_0$ , 轴向和剪切变形后的长度为  $l^*$ :

$$l^* = l(1 + \varepsilon_{30} \cos \vartheta_0) = \frac{2N\pi R^*}{\sin \vartheta_0^*}, \quad (25)$$

将轴向和剪切变形后的螺旋线半径  $R^* = \sin \vartheta_0^* / \omega_0$  无量纲化为

$$\hat{R}^* = \hat{R}(1 - \varepsilon_0^* \cos \vartheta_0), \quad (26)$$

其中

$$\hat{R}^* = \omega_0 R^*, \hat{R} = \omega_0 R = \sin \vartheta_0, \varepsilon_0^* = \varepsilon_0 - \varepsilon_{30} = \hat{f}^* \hat{F}_0.$$

扭矩  $\mathbf{M}_0 = M_0 \mathbf{e}_\zeta$  和轴向力  $\mathbf{F}_0 = F_0 \mathbf{e}_\zeta$  在  $P$  点截面上产生的外力矩  $\mathbf{M}_e$  为

$$\mathbf{M}_e = M_0 \mathbf{e}_\zeta + (F_0 \mathbf{e}_\zeta) \times \mathbf{r}^*. \quad (27)$$

为使  $\vartheta_0 > 0$  与右螺旋对应, 令  $P$  点的径向坐标轴沿  $x_0$  轴的负方向. 则轴向和剪切变形后  $P$  点的矢径为  $\mathbf{r}^* = -R^* \mathbf{e}_{x_0} + (\dots) \mathbf{e}_\zeta$ , 其中  $\mathbf{e}_{x_0}$  为  $x_0$  轴的基矢量. 无量纲化的外力矩  $\hat{\mathbf{M}}_e = \mathbf{M}_e / (A\omega_0)$  的投影为

$$\begin{cases} \hat{M}_{e1} = 0, \hat{M}_{e2} = \hat{M}_0 \sin \vartheta_0 - \hat{F}_0 \hat{R}^* \cos \vartheta_0, \\ \hat{M}_{e3} = \hat{M}_0 \cos \vartheta_0 + \hat{F}_0 \hat{R}^* \sin \vartheta_0, \end{cases} \quad (28)$$

其中,  $\hat{M}_0 = M_0 / (A\omega_0)$ .  $P$  点处作用的无量纲化内力矩  $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} / (A\omega_0)$  可由式(15)和(20)确定:

$$\hat{M}_1 = 0, \hat{M}_2 = \sin \vartheta_0, \hat{M}_3 = m. \quad (29)$$

令式(28)表示的外力矩与式(29)表示的内力矩互等, 将式(26)代入, 在  $\vartheta_0 \neq 0$  条件下, 导出为使直杆变形为螺旋杆必须具备的与式(21)相同的轴向力  $\hat{F}_0$  和扭矩  $\hat{M}_0$ :

$$\hat{M}_0 = \sin^2 \vartheta_0 + m \cos \vartheta_0. \quad (30)$$

作为特例, 如杆仅受扭矩作用, 令  $\hat{F}_0 = 0$ , 则  $m = \cos \vartheta_0, \hat{M}_0 = 1$  或  $M_0 = A\omega_0$ . 如杆仅受轴向力作用, 令  $\hat{M}_0 = 0$ , 得到

$$m = -\tan \vartheta_0 \sin \vartheta_0, \hat{F}_0 = -\sec \vartheta_0 (1 - \hat{f}^*). \quad (31)$$

$\hat{F}_0$  和  $m$  为负值, 表明松弛状态的直杆仅能在轴向压力下方能实现螺旋线平衡, 且同时出现与

螺旋线卷绕方向相反的扭转变形. 式(21)和(31)中的参数 $\hat{f}^*$ 体现轴向变形和剪切变形的综合影响.

## 4 稳定性分析

为分析螺旋线平衡的稳定性,引入以下扰动变量:

$$\begin{cases} x_1 = \vartheta - \vartheta_0, x_2 = \psi - \hat{s}, x_3 = \hat{F}_1, x_4 = \hat{F}_2 - \hat{F}_0 \sin \vartheta, \\ x_5 = \hat{F}_3 - \hat{F}_0 \cos \vartheta, \dot{x}_6 = v_1, \dot{x}_7 = v_2, \dot{x}_8 = v_3, \end{cases} \quad (32)$$

其中,  $x_i (i=6,7,8)$  是以导数表示受扰速度  $v_i (i=1,2,3)$  的准坐标. 从动力学方程(18)导出线性化的扰动方程:

$$x_1'' - \sigma \ddot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2' + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0, \quad (33a)$$

$$a_{21}x_1' + a_{22}(x_2'' - \sigma \ddot{x}_2) + a_{23}x_3 = 0, \quad (33b)$$

$$x_3' + a_{31}x_4 - a_{32}x_5 - \dot{x}_6 = 0, \quad (33c)$$

$$a_{41}x_3 + x_4' - \dot{x}_7 = 0, \quad (33d)$$

$$a_{51}x_3 - x_5' + \dot{x}_8 = 0, \quad (33e)$$

$$a_{61}\dot{x}_2 + \hat{f}\dot{x}_3 - \dot{x}_6' + a_{62}\dot{x}_7 - a_{63}\dot{x}_8 = 0, \quad (33f)$$

$$a_{71}\dot{x}_1 - \hat{f}\dot{x}_4 + a_{72}\dot{x}_6 + \dot{x}_7' = 0, \quad (33g)$$

$$a_{81}\dot{x}_1 + a_{82}\dot{x}_6 - \dot{x}_8' = 0, \quad (33h)$$

各系数定义为

$$\begin{cases} a_{11} = [1 - \hat{f}^*(m - \cos \vartheta_0)] \sin^2 \vartheta_0, a_{12} = (m - 2 \cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0, \\ a_{14} = -[1 - \hat{f}^*(m - \cos \vartheta_0)] \cos \vartheta_0, a_{15} = \hat{f}^* \sin \vartheta_0 (m - \cos \vartheta_0), \\ a_{21} = 2 \cos \vartheta_0 - m, a_{22} = a_{32} = a_{51} = a_{63} = a_{82} = \sin \vartheta_0, \\ a_{23} = a_{71} = 1 - \hat{f}^* \cos \vartheta_0 (m - \cos \vartheta_0), a_{31} = a_{41} = a_{62} = a_{72} = \cos \vartheta_0, \\ a_{61} = [1 - \hat{f}^* \cos \vartheta_0 (m - \cos \vartheta_0)] \sin \vartheta_0, a_{81} = \hat{f} \sin \vartheta_0 (m - \cos \vartheta_0). \end{cases} \quad (34)$$

利用指数特解  $x_i(\hat{s}, \hat{t}) = x_{i0} e^{\lambda \hat{s} + w \hat{t}} (i=1,2,\dots,5)$  导出方程组(33)的含两个特征值  $\lambda$  和  $w$  的特征方程,写作以  $\lambda$  的函数为系数的  $w^2$  的多项式:

$$a_0(\lambda) + \sum_{i=1}^3 a_i(\lambda) w^{2i} = 0. \quad (35)$$

作为特例,令时域特征值  $w$  为 0. 方程(35)简化为静力学意义下的特征方程:

$$a_0(\lambda) = \lambda^5 (\lambda^2 + k^2) = 0. \quad (36)$$

除与刚体位移相联系的零根以外,  $\lambda$  只有纯虚根  $\lambda = \pm ik$ . 其中  $k$  为受扰的中心线相对弧坐标  $\hat{s}$  变化的角频率

$$k^2 = \sin^2 \vartheta_0 [1 - \hat{f}^*(m - \cos \vartheta_0)^2] + (m - 2 \cos \vartheta_0)^2. \quad (37)$$

基于 Kirchhoff 模型导出的参数  $k$  是上式中  $\hat{f}^* = 0$  的特例<sup>[2]</sup>. 一般情况下,微小的含  $\hat{f}^*$  的附加项不影响  $k^2$  的正号性,静力学范畴内的 Liapunov 稳定性条件可自然满足.

Liapunov 稳定性是微分方程的解相对初始扰动的稳定性. 将 Liapunov 稳定性概念应用于弹性杆时,仅考虑杆初始端的扰动. 因此必须附加条件使扰动解满足另一端的约束条件. 设两

端均为铰支,  $l$  为变形前的杆长, 则须满足  $x_i(l) = x_i(0)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 解出

$$k = \frac{2n\pi}{\omega_0 l} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (38)$$

从判断弹性杆屈曲的 Euler 稳定性观点出发, 扰动方程存在能满足两端约束条件的非零解即认为平衡状态失稳. 此时对应的轴向力和扭矩的特殊值即螺旋杆的 Euler 载荷. 从式 (37) 和 (38) 解出  $\omega_0$ , 代入式 (21) 和 (30) 即得到 Euler 载荷

$$\begin{cases} (F_0)_{cr} = \frac{4n^2 \pi^2 EI (m - \cos \vartheta_0)}{l^2 [\sin^2 \vartheta_0 + (m - 2\cos \vartheta_0)^2]} [1 + \hat{f}^* \Phi_1(\vartheta_0)], \\ (M_0)_{cr} = \frac{2n\pi EI (\sin^2 \vartheta_0 + m \cos \vartheta_0)}{l [\sin^2 \vartheta_0 + (m - 2\cos \vartheta_0)^2]^{1/2}} [1 + \hat{f}^* \Phi_2(\vartheta_0)], \end{cases} \quad (39)$$

其中,  $\Phi_1(\vartheta_0)$  和  $\Phi_2(\vartheta_0)$  的函数曲线如图 4 和图 5 所示,

$$\begin{cases} \Phi_1(\vartheta_0) = \frac{(m - \cos \vartheta_0) [m \sin^2 \vartheta_0 + \cos \vartheta_0 (m - 2\cos \vartheta_0)^2]}{\sin^2 \vartheta_0 + (m - 2\cos \vartheta_0)^2}, \\ \Phi_2(\vartheta_0) = \frac{\sin^2 \vartheta_0 (m - \cos \vartheta_0)^2}{2 [\sin^2 \vartheta_0 + (m - 2\cos \vartheta_0)^2]^{1/2}}. \end{cases} \quad (40)$$

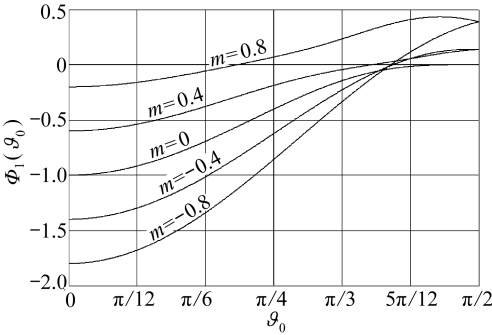


图 4 不同  $m$  对应的  $\Phi_1(\vartheta_0)$  函数曲线

Fig. 4 The function  $\Phi_1(\vartheta_0)$  for different  $m$

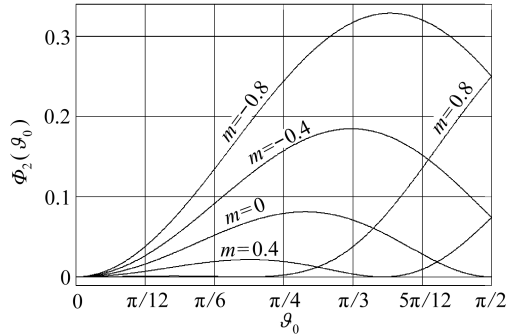


图 5 不同  $m$  对应的  $\Phi_2(\vartheta_0)$  函数曲线

Fig. 5 The function  $\Phi_2(\vartheta_0)$  for different  $m$

对于仅受轴向压力作用的螺旋杆, 令  $M_0 = 0, F_0 = -|F_0|, n = 1$ , 则  $m = -\sin^2 \vartheta_0 \sec \vartheta_0$ , 轴向力的 Euler 载荷为

$$|F_0|_{cr} = \frac{4\pi^2 EI \cos \vartheta_0}{l^2 (1 + 3\cos^2 \vartheta_0)} \left( 1 - \frac{4\hat{f}^* \cos^2 \vartheta_0}{1 + 3\cos^2 \vartheta_0} \right). \quad (41)$$

如忽略轴向变形和剪切变形, 令  $\hat{f}^* = 0$ , 轴向受压螺旋杆的 Euler 载荷简化为<sup>[8]</sup>

$$|F_0|_{cr} = \frac{4\pi^2 EI \cos \vartheta_0}{l^2 (1 + 3\cos^2 \vartheta_0)}, \quad (42)$$

轴向变形和剪切变形使轴向受压螺旋杆的 Euler 载荷降低.

由于静态 Liapunov 稳定性条件已得到满足, 将  $\lambda = \pm ik$  代入方程 (35), 化作仅含时间域特征值  $w$  的特征方程

$$a_0(ik) + \sum_{i=1}^3 a_i(ik) w^{2i} = 0. \quad (43)$$

杆的螺旋线平衡的动态稳定性条件即方程 (43) 的纯虚根条件或  $w^2$  的负根条件, 可根据方程的

系数  $a_i(ik)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) 通过数值计算作出判断. 条件之一的  $a_0(ik) > 0$  可视为动态稳定性的必要条件, 即

$$a_0(\lambda) = \lambda^5(\lambda^2 + k^2) > 0. \quad (44)$$

将不等式(44)与等式(36)对照可看出, 仅用不等号替换了公式中的等号. 由于 Euler 载荷源于等式(36), 因此从不等式(44)出发, 导致轴向力和扭矩载荷均须小于 Euler 载荷的结果

$$F_0 < (F_0)_{cr}, M_0 < (M_0)_{cr}. \quad (45)$$

从而得出结论, 螺旋杆平衡的静态 Liapunov 稳定性和 Euler 稳定性条件是动态 Liapunov 稳定性的必要条件. 上述结论曾基于 Kirchhoff 模型得出<sup>[4-5]</sup>, 以上分析表明, 此结论也适用于精确 Cosserat 模型.

## 5 结 论

1) 基于精确 Cosserat 模型, 考虑轴向和剪切变形, 建立了圆截面弹性细杆的动力学方程. 杆的螺旋线平衡状态由方程的特解所确定.

2) 静态 Liapunov 稳定性条件满足时, 计算受扰中心线满足杆两端边界条件时所对应的载荷值, 可以确定螺旋杆屈曲的 Euler 载荷. 从中显示出两种稳定性概念之间的差异. 满足 Liapunov 稳定性条件的弹性杆可发生 Euler 意义下的屈曲现象.

3) 螺旋杆平衡的静态 Liapunov 稳定性和 Euler 稳定性条件是动态 Liapunov 稳定性的必要条件.

### 参考文献:

- [1] Love A E H. *A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity* [M]. 4th ed. New York: Dover, 1927.
- [2] 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学 [M]. 北京: 清华大学出版社, Springer, 2006. (LIU Yan-zhu. *Nonlinear Mechanics of Thin Elastic Rod* [M]. Beijing: Tsinghua University & Springer, 2006. (in Chinese))
- [3] 刘延柱, 薛纭. 弹性细杆螺旋线平衡的动态稳定性 [J]. 力学季刊, 2005, **26**(1): 1-7. (LIU Yan-zhu, XUE Yun. Dynamical stability of helical equilibrium of a thin elastic rod [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2005, **26**(1): 1-7. (in Chinese))
- [4] 刘延柱, 盛立伟. 轴向受压螺旋杆的动态稳定性与振动 [J]. 力学季刊, 2006, **27**(2): 190-195. (LIU Yan-zhu, SHENG Li-wei. Dynamical stability and vibration of an helical rod under axial compression [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2006, **27**(2): 190-195. (in Chinese))
- [5] 刘延柱, 盛立伟. 圆截面弹性螺旋杆的稳定性与振动 [J]. 物理学报, 2007, **56**(4): 2305-2310. (LIU Yan-zhu, SHENG Li-wei. Stability and vibration of an elastic helical rod with circular cross section [J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, **56**(4): 2305-2310. (in Chinese))
- [6] Antman S S. *Nonlinear Problems of Elasticity* [M]. New York: Springer, 1995.
- [7] Bishop T C, Cortez R, Zhmudsky O O. Investigation of bend and Shear waves in a geometrically exact elastic rod model [J]. *J of Comput Physics*, 2004, **193**: 642-665.
- [8] Schuricht F. Regularity for shearable nonlinearly elastic rods in obstacle problems [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1998, **145**: 23-49.



- [9] Tucker R W, Wang C. Torsional vibration control and Cosserat dynamics of a drill-rig assembly[J]. *Meccanica*, 2003, **38**: 143-159.
- [10] Cao D Q, Liu D, Wang C H T. Nonlinear dynamic modelling of MEMS components via the Cosserat rod element approach [J]. *J Micromechanics and Microengineering*, 2005, **15**: 1334-1343.
- [11] Cao D Q, Tucker RW. Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: modeling and simulation [J]. *Intern J Solids and Structures*, 2008, **45**: 460-477.
- [12] LIU Yan-zhu. On dynamics of elastic rod based on exact Cosserat model[J]. *Chinese Physics B*, 2009, **18**(1): 1-8.

## Stability Analysis of a Helical Rod Based on Exact Cosserat's Model

LIU Yan-zhu<sup>1</sup>, XUE Yun<sup>2</sup>

(1. *Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, P. R. China;*

2. *School of Mechanical and Automation Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, P. R. China*)

**Abstract:** The helical equilibrium of a thin elastic rod has a practical background such as DNA, fiber, sub-ocean cable and oil-well dill string. The Kirchhoff's kinetic analogy is an effective approach in stability analysis of equilibrium of a thin elastic rod. The main hypotheses of Kirchhoff's theory including no extension of the centerline and no shear deformation of the cross section are not adaptable to the real soft materials of biological fibers. The dynamic equations of a rod with circular cross section were established on the basis of exact Cosserat's model considering tension and shear deformations. The Euler's angles were applied as the attitude representation of the cross section. The deviation of the normal axis of cross section from the tangent of the centerline was considered as the result of shear deformation. The Liapunov's stability of helical equilibrium was discussed in static category and the Euler's critical values of axial force and torque were obtained. The Liapunov's and Euler's stability conditions in space domain are the necessary conditions of Liapunov's stability of the helical rod in time domain.

**Key words:** exact Cosserat's model; Kirchhoff's rod; Liapunov's stability; Euler's load