

受热弹性复合球体空化问题的分析*

尚新春^{1,2}, 张锐², 任会兰³

(1. 北京科技大学 数学力学系, 北京 100083;

2. 北京科技大学 国家材料服役安全科学中心, 北京 100083;

3. 北京理工大学 爆炸科学与技术国家重点实验室, 北京 100081)

摘要: 研究了由两种弹性固体材料组成的复合球体,在均匀变温场作用下的空化问题. 采用了几何大变形的有限对数应变度量 and Hooke 弹性固体材料的本构关系,建立了问题的非线性数学模型. 求出了复合球体大变形热弹性膨胀的参数形式的解析解. 给出了空穴萌生时临界温度随几何参数和材料参数的变化曲线,以及空穴增长的分岔曲线. 算例的数值结果指出:超过临界温度后空穴半径将迅速增大,并且空穴萌生时环向应力将成为无限大,这意味着如果内部球体是弹塑性材料,则会在空穴表面附近产生塑性变形而造成材料的局部损伤. 另外,当内部球体材料的弹性接近于不可压时,复合球体可以在较低的变温下空化.

关键词: 空化; 热膨胀; 非线性大变形; 复合球体

中图分类号: O343;O175;TB301;TG113 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.05.005

引言

金属材料的空化问题一直是金属材料学者所研究的问题^[1]. 金属材料的金相观察指出:金属材料在较高应力下其内部会出现微孔形核,或者说会萌生出微小的空穴,即发生空化现象. 造成金属材料空化的主要原因,从微观机理上被解释为由于晶界滑移导致三叉晶界和夹杂二相粒子处应力集中所引起的. 基于固体力学理论来研究这一问题,可分为两个途径:一是研究无限大固体材料中已经存在的微小孔洞在拉伸变形过程中的增长规律,即材料的不稳定性^[2-3];二是研究有限固体材料在拉伸变形过程中,其内部空穴萌生和增长,即空化分岔问题^[4-5]. 后者的研究工作主要是针对超弹性类橡胶材料的空化问题进行的,其基本理论是由 Ball 于 1982 年创立的,将问题在数学上归结为非线性分岔问题^[4]. 对于一般的不可压超弹性材料,空化临界载荷可由一个广义积分来表示,而对于可压缩超弹性材料只是在几种特定形式的应变能函数条件下可给出空化问题的解析解,其进展可详见 Horgan 等人的综述性文章^[6]. 作者也曾得到过几个解析解^[7-8]. 另一方面,金属材料可以用 Hooke 弹性材料本构来描述,有关 Hooke 弹性体的空穴分岔解也有一些工作^[9-12]. 考虑温度效应对热超弹性材料空穴分岔的影响方面的研究并不多见. 例如,在给定的温度场条件下已有工作分析了超弹性材料的空穴分

* 收稿日期: 2011-01-04; 修订日期: 2011-03-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772024)

作者简介: 尚新春(1958—),男,山西人,教授,博士,博士生导师(联系人. E-mail: shangxc@ustb.edu.cn).

岔^[13-14]. 本文的目的是研究由变温引起的 Hooke 材料的空化问题, 与上面所提到的工作最明显的不同之处在于没有力载荷作用. 推导出了弹性复合球体内部空化临界温度的计算公式和分岔解.

1 数学模型

考虑由不同热弹性材料构成的复合球体, 内部球体的半径为 a , 外层球壳的外半径为 b , 其剖面如图 1 所示. 内部球体和外层球壳的弹性模量分别为 E_1 和 E_2 , Poisson 比分别为 ν_1 和 ν_2 , 线热膨胀系数分别为 α_1 和 α_2 , 导热系数分别为 k_1 和 k_2 . 其中(以下同样) 下标 $i = 1, 2$ 分别代表内部球体和外层球壳. 内部球体变形前和变形后的径向球坐标分别记为 R_1 和 r_1 . 外层球壳变形前和变形后的径向球坐标分别记为 R_2 和 r_2 .

初始时复合球体内温度均匀, 处于无热应力的自然状态. 当复合球外表面突加变温 T 后, 复合球内部会有变温. 分别记内部球体和外层球壳的变温场为 T_1 和 T_2 , 球对称时, 复合球温度场满足如下热传导方程:

$$\frac{d^2 T_i}{dR_i^2} + \frac{2}{R} \frac{dT_i}{dR_i} = 0, \tag{1}$$

外表面变温条件为

$$T_2 |_{R_2=b} = T. \tag{2}$$

在内部球体和外层球壳的交界面上满足变温和热流通量的连续性条件:

$$T_1 |_{R_1=a} = T_2 |_{R_2=a}, k_1 \left. \frac{dT_1}{dR_1} \right|_{R_1=a} = k_2 \left. \frac{dT_2}{dR_2} \right|_{R_2=a}. \tag{3}$$

当复合球球心处有空穴萌生时, 空穴内壁表面为绝热:

$$\left. \frac{dT_1}{dR_1} \right|_{R_1=\delta} = 0, \tag{4}$$

其中 δ 为空穴的半径.

求解上述问题(1) ~ (4) 知, 内部球体和外层球壳为均匀变温场, 其解为

$$T_1 = T_2 \equiv T \quad (\text{常数}). \tag{5}$$

引入自然对数应变来描述几何大变形, 即径向和环向应变分别为

$$\varepsilon_{r_i} = \ln \frac{dr_i}{dR_i}, \quad \varepsilon_{\theta_i} = \ln \frac{r_i}{R_i} \quad (i = 1, 2). \tag{6}$$

假设材料满足热弹性的线性本构关系, 即径向和环向 Euler 应力分别表示为

$$\begin{cases} \sigma_{r_i} = \frac{E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} [(1 - \nu_i)\varepsilon_{r_i} + 2\nu_i\varepsilon_{\theta_i} - (1 + \nu_i)\alpha_i T] \\ \sigma_{\theta_i} = \frac{E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} [\varepsilon_{\theta_i} + \nu_i\varepsilon_{r_i} - (1 + \nu_i)\alpha_i T] \end{cases} \quad (i = 1, 2). \tag{7}$$

变形后位形上的应力平衡方程为

$$\frac{d\sigma_{r_i}}{dr_i} + \frac{2}{r_i}(\sigma_{r_i} - \sigma_{\theta_i}) = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{8}$$

外表面应力自由条件为

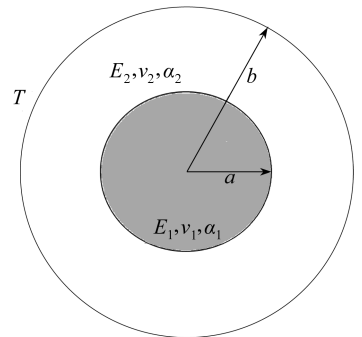


图 1 复合球的剖面图

Fig.1 Profile of the composite ball

$$\sigma_{r_2} |_{R_2=b} = 0. \quad (9)$$

在内部球体和外层球壳的交界面上满足径向位移和应力的连续性条件为

$$r_1 |_{R_1=a} = r_2 |_{R_2=a}, \sigma_{r_1} |_{R_1=a} = \sigma_{r_2} |_{R_2=a}. \quad (10)$$

当球心处有空穴萌生时,空穴的半径为有限,空穴内壁表面为自由:

$$r_1 |_{R_1=0} = \delta \geq 0, \sigma_{r_1} |_{R_1=0} = 0. \quad (11)$$

2 理论分析

引入参数变换^[5,10]:

$$t_i = \frac{R_i}{r_i} \frac{dr_i}{dR_i} \quad (i = 1, 2). \quad (12)$$

变量可表示为

$$R_i = R_i(t_i), r_i = r_i(t_i), \sigma_{r_i} = \sigma_{r_i}(t_i), \sigma_{\theta_i} = \sigma_{\theta_i}(t_i) \quad (i = 1, 2). \quad (13)$$

可由式(6)~(8)导出如下参数形式的一阶线性常微分方程:

$$\frac{dR_i}{dt_i} = \frac{R_i(t_i)}{t_i(1-t_i)F_i(t_i)}, \frac{dr_i}{dt_i} = \frac{r_i(t_i)}{(1-t_i)F_i(t_i)} \quad (i = 1, 2), \quad (14)$$

其中 $F_i(t_i) = \beta_i - 2\gamma_i t_i \ln t_i / (1-t_i)$, $\beta_i = (1+\nu_i)/(1-\nu_i)$, $\gamma_i = (1-2\nu_i)/(1-\nu_i)$.

设参数 t_i 的变化范围为 $t_i^1 \leq t_i \leq t_i^0$, t_i^0 为待定常数,满足

$$R_1(t_1^0) = a, R_2(t_2^0) = b, \quad (15)$$

$$R_1(t_1^1) = 0, R_2(t_2^1) = a. \quad (16)$$

引入待定常数 λ_1 和 λ_2 , 并且设

$$r_1(t_1^0) = \lambda_1 a, r_2(t_2^0) = \lambda_2 b. \quad (17)$$

求解线性常微分方程组(14)~(15)和(17)构成的初值问题,可以得到球坐标下球复合球的变形前、后径向坐标的参数解,如下:

$$R_i(t_i) = R_i(t_i^0) \left(\frac{t_i}{t_i^0} \right)^{1/\beta_i} \left(\frac{1-t_i^0}{1-t_i} \right)^{1/3} \exp \left[- \int_{t_i}^{t_i^0} H_i(s) ds \right] \quad (i = 1, 2), \quad (18)$$

$$r_i(t_i) = \lambda_i R_i(t_i^0) \left(\frac{1-t_i^0}{1-t_i} \right)^{1/3} \exp \left[- \int_{t_i}^{t_i^0} Q_i(s) ds \right] \quad (i = 1, 2). \quad (19)$$

上述表达式中的被积函数均为已知函数,定义为

$$H_i(s) = P_i(s) + Q_i(s),$$

$$P_i(s) = \frac{2\gamma_i}{\beta_i} \frac{\ln s}{\beta_i(1-s) - 2\gamma_i s \ln s}, Q_i(s) = \frac{2\gamma_i}{3} \frac{1-s+s \ln s}{\beta_i(1-s)^2 - 2\gamma_i s(1-s) \ln s}.$$

然后将式(18)和(19)的结果代入关系式(7),再使用应变表达式(6)和参数变换(12)得到径向和环向 Euler 应力的参数解为

$$\sigma_{r_i}(t_i) = \frac{E_i}{1-2\nu_i} \left[\ln(\lambda_i (t_i^0)^{1/\beta_i}) + \int_{t_i}^{t_i^0} P_i(s) ds - \alpha_i T \right] \quad (i = 1, 2), \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta_i}(t_i) = \sigma_{r_i}(t_i) - \frac{E_i}{1+\nu_i} \ln t_i \quad (i = 1, 2). \quad (21)$$

复合球球心处的条件(11),如果有空穴生成,可写成

$$r_1(t_1^1) = \delta \geq 0, \sigma_{r_1}(t_1^1) = 0. \quad (22)$$

当 $t_1 = t_1^1$, 代入空穴分岔解(18)~(20),利用式(15)~(16)的第1个条件,关系(22)变为

$$t_1^1 = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\delta}{a} = (t_1^0)^{1/\beta_1} (1 - t_1^0)^{1/3} \exp \left[\alpha_1 T - \int_0^{t_1^0} H_1(s) ds \right], \tag{24}$$

$$\lambda_1 = (t_1^0)^{-1/\beta_1} \exp \left[\alpha_1 T - \int_0^{t_1^0} P_1(s) ds \right]. \tag{25}$$

外表面边界条件(9)变为 $\sigma_{r_2}(t_1^0) = 0$. 将结果代入式(20)得到

$$\lambda_2 = (t_2^0)^{-1/\beta_2} \exp(\alpha_2 T). \tag{26}$$

交界面上的连续性条件(10)可写成

$$r_2(t_2^1) = \lambda_1 a, \sigma_{r_2}(t_2^1) = \sigma_{r_1}(t_1^0). \tag{27}$$

将表达式(25)和(26)代入到解(19)~(20)中消去 λ_1 和 λ_2 . 之后利用式(15)~(16)的第2个条件和式(27)得到

$$\left(\frac{t_2^1}{t_2^0} \right)^{1/\beta_2} \left(\frac{1 - t_2^0}{1 - t_2^1} \right)^{1/3} \exp \left[- \int_{t_2^1}^{t_2^0} H_2(s) ds \right] = \frac{a}{b}, \tag{28}$$

$$\int_0^{t_1^0} P_1(s) ds + \frac{E_2}{E_1} \frac{1 - 2\nu_1}{1 - 2\nu_2} \int_{t_2^1}^{t_2^0} P_2(s) ds = 0, \tag{29}$$

$$\ln \frac{(t_1^0)^{1/\beta_1}}{(t_2^1)^{1/\beta_2}} + \int_0^{t_1^0} P_1(s) ds + \int_{t_2^1}^{t_2^0} P_2(s) ds = (\alpha_1 - \alpha_2) T. \tag{30}$$

在空穴生成的临界状态,球心处空穴半径无限小 ($\delta \rightarrow 0$),由式(24)知有 $t_1^0 = 1$. 由式(30)得到空穴生成临界变温的表达式为

$$T_{cr} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\int_0^1 P_1(s) ds + \int_{t_2^1}^{t_2^0} P_2(s) ds - \frac{1}{\beta_2} \ln t_2^1 \right], \tag{31}$$

其中常数 t_2^0, t_2^1 可由式(28)~(29)中代入 $t_1^0 = 1$ 后确定.

当空穴生成后 ($T > T_{cr}$),空穴半径 δ 可由式(24)给出,其中未知常数 t_2^0, t_2^1 和 t_1^0 可由式(28)~(30)确定.

3 结果与讨论

观察表达式(31)和方程(28)~(30)可知,空穴生成的临界变温 T_{cr} 依赖于5个参数:半径比 b/a ,弹性模量比 E_1/E_2 , Poisson 比 ν_1, ν_2 和热膨胀系数差 $\alpha_1 - \alpha_2$. 算例中这5个参数所取的值为 $\alpha_1 - \alpha_2 = 12.4 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $b/a = 5$, $E_1/E_2 = 0.01$, $\nu_1 = 0.425$, $\nu_2 = 0.12$. 为了考查某个参数对临界变温的影响,在进行数值计算时这个参数取不同的值,而其余的4个参数取上述给定值. 数值计算的结果绘制了图2~图6.

图2给出了空穴生成时的临界温度 T_{cr} 随几何参数 b/a 变化的曲线. 曲线大致分为3段:
 (i) 在 $1 < b/a \leq 1.1$ 阶段,曲线变化急剧,即随着 b/a 值的增加,临界温度 T_{cr} 值会快速下降;
 (ii) 在 $1.1 < b/a \leq 1.2$ 阶段,曲线变化减缓;临界温度 T_{cr} 随半径比 b/a 的增大稍微有所增加;
 (iii) 如果 $b/a \geq 1.2$,曲线平缓,临界温度 T_{cr} 值趋近于常数. 图3显示了弹性模量 E_1/E_2 对临界温度 T_{cr} 的影响. 可以看到随着 E_1/E_2 的增大,临界温度 T_{cr} 近似线性地增大. 如图4和图5所示,临界温度 T_{cr} 随 Poisson 比 ν_1 和 ν_2 的变化曲线几乎都成线性关系. 与临界温度 T_{cr} 随着 Poisson 比 ν_2 的变化相比,临界温度 T_{cr} 的变化更加敏感的依赖于 Poisson 比 ν_1 . 图6表明临界温度 T_{cr} 随热膨胀系数差 $\alpha_1 - \alpha_2$ 的增大而非线性地减小.

从图2至图6中曲线的变化情况可以总结出:几何参数和各个材料参数对临界温度的影

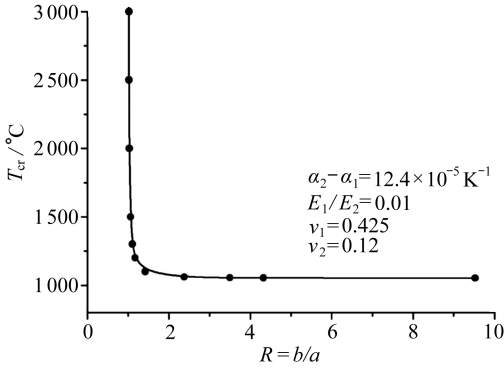


图2 临界温度 T_{cr} 随半径比 b/a 的变化曲线

Fig.2 Variation of the critical temperature T_{cr} with the radius ratio b/a

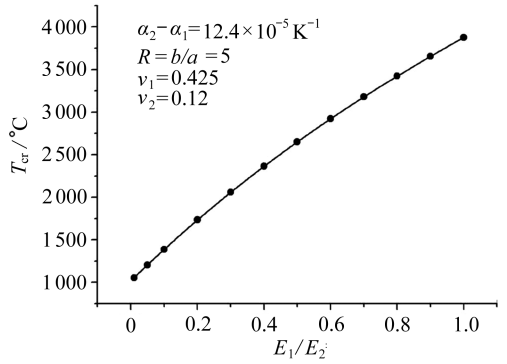


图3 临界温度 T_{cr} 随弹性模量比 E_1/E_2 的变化曲线

Fig.3 Variation of the critical temperature T_{cr} with the elastic modulus ratio E_1/E_2

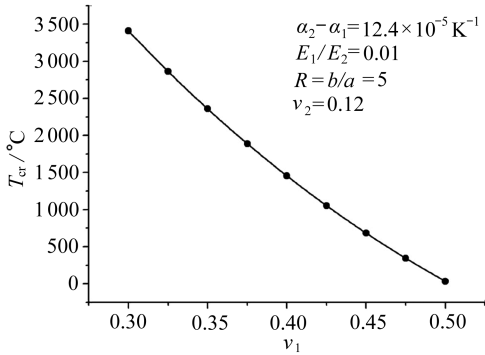


图4 临界温度 T_{cr} 随 Poisson 比 ν_1 的变化曲线

Fig.4 Variation of the critical temperature T_{cr} with Poisson's ratio ν_1

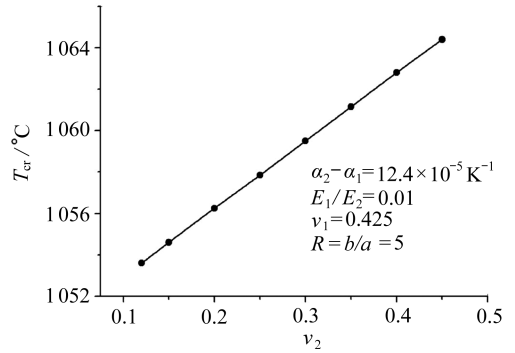


图5 临界温度 T_{cr} 随 Poisson 比 ν_2 的变化曲线

Fig.5 Variation of the critical temperature T_{cr} with Poisson's ratio ν_2

响是有所不同的。对于一个含有微小夹杂的弹性组合球,半径比 b/a 是最大的影响因素。此外,材料参数 E_1/E_2 和 $\alpha_1 - \alpha_2$ 的影响显著,而 Poisson 比 ν_2 和几何参数 b/a 的影响很小。特别是临界温度 T_{cr} 敏感的依赖于 Poisson 比 ν_1 。例如所给算例中,若将 Poisson 比 ν_1 从 0.425 增加到 0.475,则临界温度 T_{cr} 将从约 1100 °C 降低到约 300 °C。可见如果夹杂材料接近于不可压缩时,在较低的变温下弹性复合球也能产生空化。

对于给定如上的几个和材料参数的情况,空穴半径 $\delta(T > T_{cr})$ 可以通过方程(24) 计算得到,此时的常数 t_1^0 可以通过求解方程组(28) ~ (30) 确定。图7 给出了空穴半径随温度的升高而继续增大的分叉曲线。曲线在分叉点 $T = T_{cr}$ 附近剧烈变化,这意味着当变温稍稍超过临界值时,空穴半径会突然快速增长。空穴生成(空化)初期,空穴增长迅速,类似现象在只受力载荷产生空穴的情况下也会出现^[5,8]。

显然,在均匀温度场下,空穴生成前的复合球处于热膨胀状态,复合球内径向和环向热应力均匀并且彼此相等。空穴生成后,空穴表面无径向应力。进一步通过结果式(21) 可以看出空穴表面环形应力趋于无穷小,因为在球心处 $R_1 = 0$ 有 $t_1 = 0$,代入式(18) 可以得到。因此,一旦变温超过复合球的临界温度时,其球心处应力将会有突然的跳跃。在空穴生成的临界状态, T

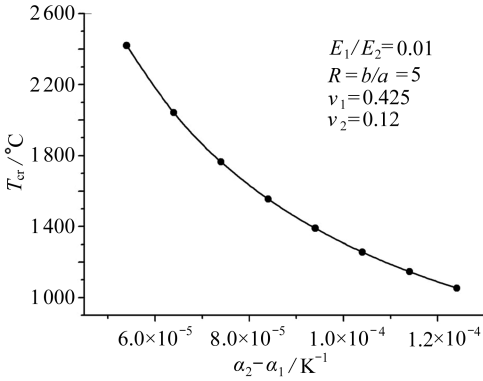


图6 临界温度 T_{cr} 随热膨胀系数差 $\alpha_1 - \alpha_2$ 变化的曲线

Fig.6 Variation of the critical temperature T_{cr} with the difference of thermal expansion coefficient $\alpha_1 - \alpha_2$

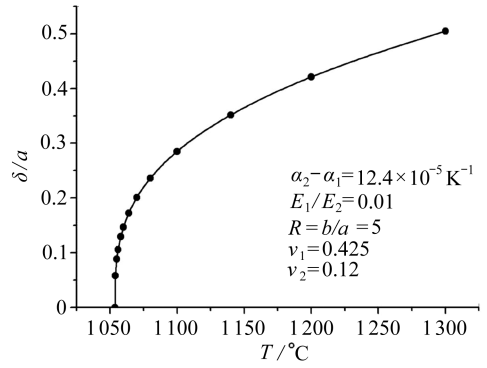


图7 无量纲空穴半径 δ/a 随变温 T 的分岔曲线

Fig.7 Bifurcation curve of the dimensionless radius δ/a versus the temperature T

$\rightarrow T_{cr}(t_1 \rightarrow 0)$, 此时, 空穴表面应力有极限 $\sigma_{\theta_1} - \sigma_{r_1} \rightarrow +\infty$. 这意味着如果复合球的材料是弹塑性的, 依据 Mises 屈服准则空穴附近区域将出现塑性屈服^[12]. 考虑塑性影响的热空穴分析超出了本文的范围.

参考文献:

- [1] Tvergaard V. Material failure by void growth to coalescence [J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1990, **27**: 83-151.
- [2] McClintock F A. A criterion for ductile fracture by growth of holes [J]. *J Appl Mech*, 1968, **35**: 363-371.
- [3] Rice J R, Tracey D M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields [J]. *J Mech Phys Solids*, 1969, **17**(3): 201-217.
- [4] Ball J M. Discontinuous equilibrium solutions and cavitation in nonlinear elasticity [J]. *Phil Trans R Soc London, A*, 1982, **306**(1496): 557-610.
- [5] Horgan C O, Abeyaratne R. A bifurcation problem for a compressible nonlinearly elastic medium: growth of a micro-void [J]. *J Elasticity*, 1986, **16**(2): 189-200.
- [6] Horgan C O, Polignone D A. Cavitation in nonlinearly elastic solid; a review [J]. *ASME Appl Mech Rev*, 1995, **48**(6): 471-485.
- [7] 尚新春, 程昌钧. 超弹性材料中的球形空穴分岔 [J]. *力学学报*, 1996, **28**(6): 751-755. (SHANG Xin-chun, CHENG Chang-jun. The spherical cavitation bifurcation in hyperelastic materials [J]. *Acta Mech Sinica*, 1996, **28**(6): 751-755. (in Chinese))
- [8] SHANG Xin-chun, CHENG Chang-jun. Exact solution for cavitated bifurcation for compressible hyperelastic material [J]. *Int J Eng Sci*, 2001, **39**(10): 1101-1117.
- [9] 金明, 黄克服, 武际可. Hooke 材料的微孔形空穴分岔 [J]. *固体力学学报*, 2001, **22**(3): 281-286. (JIN Ming, HUANG Ke-fu, WU Ji-ke. A study of the catastrophe and the cavitation for a spherical cavity in Hooke's material with 1/2 Poisson's ratio [J]. *Acta Mechnica Solida Sinica*, 2001, **22**(3): 281-286. (in Chinese))
- [10] SHANG Xin-chun, CHENG Chang-jun. Cavitation in Hookean elastic membranes [J]. *Acta Mech Solida*, 2002, **15**(1): 126-129.

- [11] 尚新春,程昌钧. 弹性固体材料中的空穴萌生于增长[J]. 北京科技大学学报, 2002, **24**(3): 380-382. (SHANG Xin-chun, CHENG Chang-jun. Void nucleation and growth for elastic solid materials[J]. *J University of Science and Technology Beijing*, 2002, **24**(3): 380-382. (in Chinese))
- [12] SHANG Xin-chun, CHENG Chang-jun, HU Yin-yan. Cavitated bifurcation in Hookean elastic and elastic-plastic materials[C]//CHIEN Wei-zang. *Proceeding of 4th International Conference on Nonlinear Mechanical*. Shanghai: Shanghai University Press, 2002: 315-319.
- [13] 宁建国,李伟,郝玖锋,刘海燕,黄筑平. 平面应变条件下孔洞化不稳定性问题的研究. 固体力学学报, 2003, **24**(3): 259-263. (NING Jian-guo, LI Wei, HAO Jiu-feng, LIU Hai-yan, HUANG Zhu-ping. Influence of the temperature on the cavitation instability under plane strain condition[J]. *Acta Mech Solida Sinica*, 2003, **24**(3): 259-263. (in Chinese))
- [14] 任九生,程昌钧. 热超弹性材料中的空穴生成问题[J]. 固体力学学报, 2004, **25**(3): 275-278. (REN Jiu-sheng, CHENG Chang-jun. Cavitation problem for thermohyperelastic materials [J]. *Acta Mech Solida Sinica*, 2004, **25**(3): 275-278 (in Chinese))

Analysis for Cavitation Problem of Elastic Composite Ball Heated

SHANG Xin-chun^{1,2}, ZHANG Rui², REN Hui-lan³

(1. *Department of Mathematics and Mechanics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, P. R. China;*

2. *National Center for Materials Service Safety, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, P. R. China;*

3. *State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P. R. China)*

Abstract: The cavitation problem of composite ball, composed by two elastic solid materials and in uniform temperature, was investigated. The nonlinear mathematical model of the problem was established by using finite logarithmic strain measure for geometric large deformation and by employing Hooke law for elastic solid. Analytic solutions in the form of parameter were derived for thermal dilatation of the composite ball with large elastic deformation. Solution curves were given to describe variations of the critical temperature in cavitation with the geometric and material parameters. Bifurcation curve was also given to reveal cavity growth after void nucleation. The numeric results for a computational example indicated that radius of cavity would rapidly enlarge over critical temperature, and the hoop stress would become infinite with void nucleation. This means the materials near the cavity would produce plastic deformation which leads to local failure and fracture if the material of internal ball is elastoplastic. In addition, the cavitation for the composite ball could appear in a low temperature if elastic property for the material of internal ball is close to be incompressible.

Key words: cavitation; thermal dilatation; nonlinear large deformation; composite ball